

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ – ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις:

(α) $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln(x-1)$ και $h(x) = \ln(x+2)$,

(β) $f(x) = \ln \frac{1}{x}$, $g(x) = 1 + \ln \frac{1}{x+1}$,

2. Να βρεθούν οι τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

(α) $\log(\ln e^{1000})$

(β) $\ln(\log 10^e)$

(γ) $\log(\ln \sqrt[3]{e})$

(δ) $\log(\log 0,0001^{-4})$

(ε) $\ln(\ln e^5)$

3. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

(α) $\ln x = 3$

(β) $2 \log x + 2 = 0$

(γ) $\log x = \frac{3}{2}$

(δ) $\ln x = -2$

4. Να βρεθούν οι τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

(α) $10^{1-\log 2} + \sqrt{10}^{\log 25}$

(β) $\log(\log \sqrt[6]{\sqrt{10}})$

(γ) $3 \ln(e \ln e) + \ln(\ln e)$

(δ) $e^{-\ln \sqrt{e}}$

5. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\ln 4 - \ln 12 + \ln 3 = 0$

(β) $2 \log 3 + 3 \log 2 - 2 \log 6 = \log 2$

(γ) $\frac{1}{2} \ln 9 - \frac{1}{3} \ln 64 + \ln 4 = \ln 3$

(δ) $e^{\ln 5 + 2 \ln 2} = 20$

6. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

(α) $\frac{\log 7 + 3 \log 2}{\log 2 + \log 28}$

(β) $\log[(7 - \sqrt{39})(7 + \sqrt{39})]$

(γ) $2 \ln(3 + \sqrt{5}) + \ln(14 - 6\sqrt{5})$

7. Να λύσετε καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις:

(α) $2 \ln(2x-1) = \frac{1}{2} \ln x^5 - \ln \sqrt{x}$

(β) $\log(x+2) - 1 = \log 2 - \log(x+1)$

(γ) $2 \log(2x-1) - \log(3x-2x^2) = \log(4x-3) - \log x$

(δ) $\ln x^2 = \ln^2 x$

(ε) $\ln \frac{x}{3} = \frac{\ln x}{3}$

(η) $2 \log^2 x + 5 \log x - 3 = 0$

(θ) $(2 \ln x - 1) \ln x = 0$

(ι) $\ln(e^{2x} + 2) = x$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$. Να λυθεί η εξίσωση

$$f(x+1) = f(3x+1) - f(x).$$

9. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} 5^{\ln x} + 3^{\ln y} = 14 \\ 25^{\ln x} - 9^{\ln y} = -56 \end{cases}$$

10. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$(\alpha) \log(2x-1) > \log(3-x)$$

$$(\beta) \ln x^2 > \ln(x+2)$$

$$(\gamma) \ln^2 x - 5 \ln x + 6 > 0$$

$$(\delta) \ln^2 x > \ln x$$

11. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$(\alpha) 2^x < 5$$

$$(\beta) 3^{x-1} > 2^{x+1}$$

$$(\gamma) \left(\frac{1}{3}\right)^x < 2$$

12. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$(\alpha) \frac{e^x - 1}{e^x + 1} > \frac{1}{2}$$

$$(\beta) \frac{2e^x - 3}{e^x - 1} > 1$$

$$(\gamma) \frac{e^{2x} - 3}{e^x - 1} < 3$$

13. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$(\alpha) \frac{2 \ln x + 1}{\ln x + 1} > 1$$

$$(\beta) \frac{\ln x - 1}{\ln x} \leq \frac{1}{2}$$

14. Έστω $a > 0$, και η εξίσωση $a^x = x^a$. Να επαληθευτεί ότι ο a είναι ρίζα της εξίσωσης και κατόπιν να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$\text{εξίσωση } \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a}.$$

15. Αν οι αριθμοί

$$\ln 2, \ln(e^x - 1), \ln(e^x + 3)$$

αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, να βρείτε το x .

16. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , με τύπο

$$f(x) = 2 \log(4-x) + \log(x^2 - 4) - \log x.$$

17. Δίνεται συνάρτηση f , με τύπο

$$f(x) = x^2 - 2(1 + \ln \theta)x + 5 - \ln^2 \theta, \theta > 0.$$

Να βρείτε τις τιμές του θ έτσι, ώστε:

$$(\alpha) \text{ η } C_f \text{ να εφάπτεται του άξονα } x'x,$$

$$(\beta) \text{ η } C_f \text{ να βρίσκεται πάνω από τον άξονα } x'x,$$

(γ) η f να έχει ελάχιστη τιμή το 4.

18. Δίνεται συνάρτηση f , με τύπο

$$f(x) = \ln \frac{3-x}{3+x}.$$

(α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

(β) Να αποδειχθεί ότι η f είναι περιττή.

(γ) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > 0$.

19. Δίνεται συνάρτηση f , με τύπο

$$f(x) = x^{\frac{1}{\log x}} \log x.$$

(α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

(β) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) < 1$.

20. Δίνεται συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \ln|x-1|$.

(α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

(β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$.

(γ) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) < 0$.

21. Δίνεται συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \ln|\ln x|$.

(α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

(β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

(γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$.

22. Δίνεται συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \ln^2 x^2$

(α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

(β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

(γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.

23. Δίνεται συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \ln \frac{e^x - e^{-x}}{2e^x + 3e^{-x}}$.

(α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

(β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + 2 \ln 2 \leq 0$.

24. Δίνεται συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} - 1}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(β) Να αποδείξετε ότι είναι περιττή.

(γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία

$$y = \frac{2}{3}.$$

25. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + (\ln^2 \kappa)x^3 + \ln \kappa \cdot x^2 - 2x - 1$, με $\kappa > 0$. Αν το

$P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 1$, να υπολογιστούν οι τιμές κ . Έστω κ_1, κ_2 οι τιμές

αυτές, με $\kappa_1 < \kappa_2$. Τότε, να λυθεί η ανισότητα

$$\log(\kappa_1 x) < \log(\kappa_1 \kappa_2) - \log(\kappa_2 x) + 2\kappa_1, \text{ με } x > 0.$$

26. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με τύπους $f(x) = \log(x - 2)$ και

$$g(x) = 1 - \log(x + 1).$$

(α) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων αυτών.

(β) Να βρεθεί το σημείο τομής M των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g .

27. Δίνεται συνάρτηση f , με τύπο

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(β) Να αποδείξετε ότι

$$f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(99) = \ln 100.$$

28. Δίνεται συνάρτηση f , με τύπο

$$f(x) = \sqrt{\ln^2 x}$$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την f .

(γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .