

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

5.1. Ιδιότητες δυνάμεων

Αν $a, b \in \mathbb{R}$ και $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ ισχύουν:

$$1. a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$$

$$2. a^{x_1} : a^{x_2} = \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2}$$

$$3. (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$4. \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$5. (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$$

$$6. a^0 = 1 \text{ και } a^{-x} = \frac{1}{a^x}, a \neq 0$$

Αν $a \geq 0$, τότε ορίζεται η δύναμη με εκθέτη ρητό:

➤ Αν μ, ν θετικοί ακέραιοι, σχετικά πρώτοι και $\nu > 1$, τότε ορίζουμε

$$a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^\mu}$$

➤ Αν ο εκθέτης είναι ρητός της μορφής $x = -\frac{\mu}{\nu}$, με $\mu > 0, \nu > 1$ και $a > 0$, τότε

$$a^{-\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{a^{\frac{\mu}{\nu}}} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{a^\mu}}$$

Εκθετική συνάρτηση

Έστω a ένας θετικός αριθμός ($a > 0$). Σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τον αριθμό a^x . Έτσι, ορίζεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = a^x$. Η συνάρτηση αυτή στην περίπτωση όπου $a \neq 1$ λέγεται *εκθετική συνάρτηση* με βάση τον αριθμό a . Αν $a = 1$ τότε έχουμε τη σταθερή συνάρτηση $f(x) = 1$.

Μελέτη της εκθετικής συνάρτησης

- ♦ Έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.
- ♦ Έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$. Δηλ., $a^x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ♦ Η γραφική παράσταση της f δεν παρουσιάζει συμμετρίες.

Σημείωση: Η συνάρτηση δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή, ούτε περιοδική και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

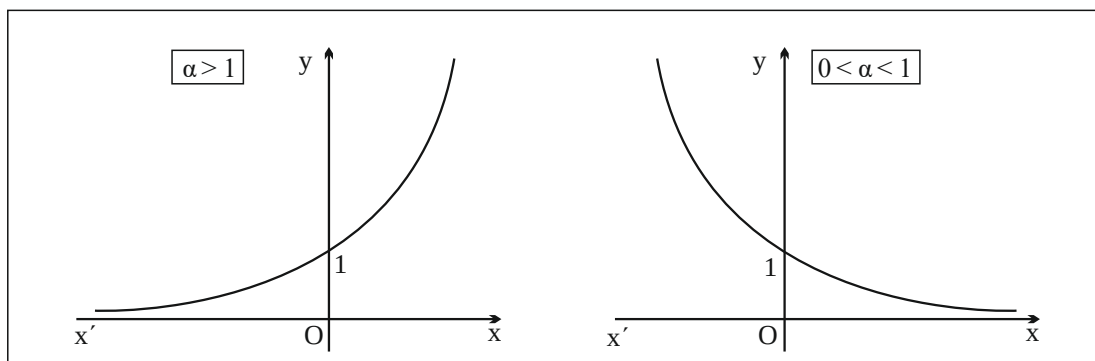
- ♦ Η f είναι *γνησίως αύξουσα* αν $a > 1$ και *γνησίως φθίνουσα* αν $0 < a < 1$.

Για $a > 1$:

Για $0 < a < 1$:

Αν $x_1 < x_2$ τότε $a^{x_1} < a^{x_2}$

Αν $x_1 < x_2$ τότε $a^{x_1} > a^{x_2}$



- ♦ Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $(0, 1)$.
- ♦ Η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον άξονα των x

Για $a > 1$	Για $0 < a < 1$
Αν το $x \rightarrow +\infty$ τότε $a^x \rightarrow +\infty$	Αν το $x \rightarrow +\infty$ τότε $a^x \rightarrow 0$. Ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f , στο $+\infty$.
Αν το $x \rightarrow -\infty$ τότε $a^x \rightarrow 0$. Όταν συμβαίνει αυτό λέμε ότι η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$ (δηλ. τον άξονα $x'x$), στο $-\infty$.	Αν το $x \rightarrow -\infty$ τότε $a^x \rightarrow +\infty$

- ♦ Από τη μονοτονία της εκθετικής συνάρτησης προκύπτει ότι αν $x_1 \neq x_2$, τότε και $a^{x_1} \neq a^{x_2}$.

Ορισμός. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση. Αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η πρόταση

$$\text{αν } x_1 \neq x_2 \text{ τότε } f(x_1) \neq f(x_2),$$

τότε η f καλείται *ένα προς ένα* (1-1).

Ισοδύναμα, μπορούμε να πούμε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 αν για κάθε x_1, x_2 του A ισχύει η πρόταση

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

5.5. Παρατηρήσεις

- (1) Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι 1-1.

- (2) Μία άρτια συνάρτηση δεν είναι ποτέ 1-1. Μία περιττή συνάρτηση μπορεί να είναι 1-1.
- (3) Αν η συνάρτηση f δεν είναι 1-1 τότε υπάρχουν, τουλάχιστον, δύο στοιχεία $x_1, x_2 \in D_f$ τέτοια ώστε $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = f(x_2)$. Για παράδειγμα, η $f(x) = x^2$ δεν είναι 1-1, αφού είναι $-2 \neq 2$ και $f(-2) = f(2) = 4$.
- (4) Αν η f είναι 1-1 τότε κάθε παράλληλη ευθεία στο $x'x$ τέμνει το πολύ σε ένα σημείο τη C_f .
- (5) Έστω η εξίσωση $f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι 1-1, τότε η εξίσωση έχει το πολύ μία ρίζα.
- (6) Για τις εκθετικές συναρτήσεις με τύπους $f(x) = a^x$ και $g(x) = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x} = f(-x).$$

Δηλαδή, τα σημεία των γραφικών παραστάσεων των f, g με αντίθετες τετμημένες $(x, -x)$, έχουν τις ίδιες τεταγμένες ($g(x) = f(-x)$), που σημαίνει ότι οι συναρτήσεις f, g είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$.

Ο αριθμός e

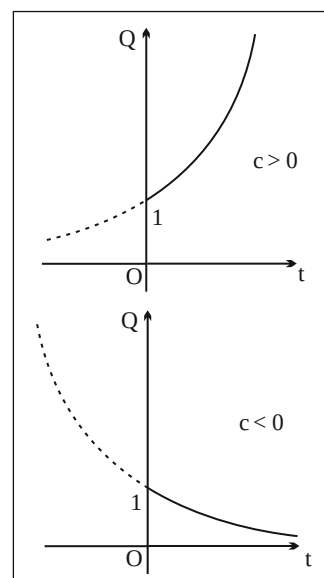
Αποδεικνύεται ότι αν ο θετικός ακέραιος n αυξάνει απεριόριστα, τότε οι

όροι της ακολουθίας (a_n) με $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ προσεγγίζουν ολοένα και

περισσότερο έναν ορισμένο πραγματικό αριθμό. Ο αριθμός αυτός είναι άρρητος και συμβολίζεται με e . Είναι $e \approx 2,7182\ 8182\ 8459\ 0452\dots$

Για την εκθετική συνάρτηση με τύπο $f(x) = e^x$ ισχύουν όλες οι γνωστές ιδιότητες της συνάρτησης $f(x) = a^x$ με $a > 1$. Οι εκθετικές συναρτήσεις με βάση το e χρησιμοποιούνται συχνά στις σύγχρονες επιστήμες. Τέτοιο παράδειγμα είναι η συνάρτηση

$$Q(t) = Q_0 e^{ct}, \quad Q_0 > 0, \quad c \text{ σταθερά, } t \text{ χρόνος,}$$



η οποία εκφράζει το νόμο της εκθετικής μεταβολής και αποτελεί ικανοποιητικό μοντέλο για πάρα πολλές εφαρμογές της Φυσικής, της Βιολογίας, της Στατιστικής και άλλων επιστημών. Η ποσότητα Q_0 (για $t = 0$) λέγεται αρχική τιμή της Q . Αν $c > 0$, τότε η συνάρτηση Q είναι γνησίως αύξουσα και εκφράζει το νόμο της εκθετικής αύξησης. Αν $c < 0$, τότε η συνάρτηση Q είναι γνησίως φθίνουσα και εκφράζει το νόμο της εκθετικής απόσβεσης.

Εκθετικές εξισώσεις

Μια εξίσωση στην οποία ο άγνωστος εμφανίζεται στο εκθέτη δύναμης λέγεται εκθετική.

➤ Εκθετικές εξισώσεις της μορφής $a^x = \beta$ ή $a^{f(x)} = \beta$ με $a, \beta > 0$ και $a \neq 1$.

Για να λυθεί μια τέτοια εξίσωση μετατρέπουμε τον β σε δύναμη του a .

$$a^x = \beta = a^\lambda \text{ άρα } x = \lambda$$

(αφού η a^x είναι 1-1)

Για παράδειγμα:

$$2^x = 32 \Leftrightarrow 2^x = 2^5 \Leftrightarrow x = 5.$$

➤ Εκθετικές εξισώσεις της μορφής $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $0 < a \neq 1$.

Είναι

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

Για παράδειγμα:

$$2^{x^2-2x} = 8^{x-2} \Leftrightarrow 2^{x^2-2x} = 2^{3(x-2)} \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x = 3(x - 2) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x = 2 \\ x = 3 \end{matrix}$$

➤ Εκθετικές εξισώσεις της μορφής $\alpha\kappa^{2x} + \beta\kappa^x + \gamma = 0$.

Θέτουμε $\kappa^x = w$ και η εξίσωση μετατρέπεται στο τριώνυμο $\alpha w^2 + \beta w + \gamma = 0$.

Για παράδειγμα:

$$7^{2x} - 8 \cdot 7^x + 7 = 0 \xRightarrow{7^x = w} w^2 - 8w + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} w = 1 \\ w = 7 \end{matrix}$$

$$\omega = 1 \Leftrightarrow 7^x = 1 \Leftrightarrow 7^x = 7^0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\omega = 7 \Leftrightarrow 7^x = 7 \Leftrightarrow x = 1$$

➤ Εκθετικές εξισώσεις της μορφής $\alpha\kappa^{2x} + \beta\kappa^x\lambda^x + \gamma\lambda^{2x} = 0$.

Διαιρούμε με λ^{2x} και θέτουμε $\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^x = w$. Τότε η εξίσωση μετατρέπεται στο τριώνυμο

$$\alpha w^2 + \beta w + \gamma = 0.$$

Δηλαδή,

$$\begin{aligned}\alpha\kappa^{2x} + \beta\kappa^x\lambda^x + \gamma\lambda^{2x} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\alpha\kappa^{2x}}{\lambda^{2x}} + \beta\frac{\kappa^x\lambda^x}{\lambda^{2x}} + \gamma = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^{2x} + \beta\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^x + \gamma = 0 \\ &\stackrel{\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^x = w}{\Rightarrow} \alpha w^2 + \beta w + \gamma = 0\end{aligned}$$

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

Ορισμός. Θεωρούμε την εξίσωση $a^x = \theta$, με $a > 0$, $a \neq 1$ και $\theta > 0$. Η εξίσωση αυτή έχει μοναδική λύση την οποία ονομάζουμε *λογάριθμο του θ ως προς βάση a* και τη συμβολίζουμε **$\log_a \theta$** .

Συνεπώς, ισχύει η ισοδυναμία

$$a^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_a \theta$$

Δηλαδή, λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ ως προς βάση a , ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός x (ο εκθέτης) στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον a για να βρούμε θ .

Παραδείγματα

$$\log_3 9 = 2 \text{ γιατί } 3^2 = 9,$$

$$\log_4 64 = 3 \text{ γιατί } 4^3 = 64,$$

$$\log_{10} 10000 = 4 \text{ γιατί } 10^4 = 10000,$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4 \quad \text{γιατί}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$\log_{10} 0,001 = -3 \text{ γιατί } 10^{-3} = 0,001$$

Άμεσες συνέπειες του ορισμού των λογαρίθμων

Από την σχέση $a^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_a \theta$ και τον ορισμό του λογάριθμου, έχουμε τα παρακάτω:

1. $a^{\log_a \theta} = \theta$

2. $\log_a a^x = x, x \in \mathbb{R}$

3. $\log_a 1 = 0$ (γιατί $a^0 = 1$)

4. $\log_a a = 1$ (γιατί $a^1 = a$)

Ιδιότητες λογαρίθμων

Έστω θ_1, θ_2 και θ θετικοί αριθμοί, $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, $\kappa \in \mathbb{R}$ και ν φυσικός με $\nu \geq 2$.

1. $\log_{\alpha}(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2$	2. $\log_{\alpha} \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_{\alpha} \theta_1 - \log_{\alpha} \theta_2$
3. $\log_{\alpha} \theta^{\kappa} = \kappa \cdot \log_{\alpha} \theta$	4. $\log_{\alpha} \sqrt[\nu]{\theta} = \frac{1}{\nu} \log_{\alpha} \theta$
5. $\log_{\alpha} \frac{1}{\nu} = -\log_{\alpha} \nu$	6. $\log_{\alpha} \theta_1 = \log_{\alpha} \theta_2 \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2$

Απόδειξη.

1. Θέτουμε

$$\log_{\alpha} \theta_1 = x_1 \quad \text{και} \quad \log_{\alpha} \theta_2 = x_2 \quad (\text{I})$$

Τότε έχουμε:

$$\alpha^{x_1} = \theta_1 \quad \text{και} \quad \alpha^{x_2} = \theta_2.$$

Οπότε:

$$\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \theta_1 \theta_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_1+x_2} = \theta_1 \theta_2.$$

Από τον ορισμό όμως του λογαρίθμου, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$x_1 + x_2 = \log_{\alpha}(\theta_1 \theta_2).$$

Η οποία, λόγω των σχέσεων (I) γράφεται

$$\log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2 = \log_{\alpha}(\theta_1 \theta_2).$$

2. Θέτουμε

$$\log_{\alpha} \theta_1 = x_1 \quad \text{και} \quad \log_{\alpha} \theta_2 = x_2 \quad (\text{II})$$

Τότε έχουμε:

$$\alpha^{x_1} = \theta_1 \quad \text{και} \quad \alpha^{x_2} = \theta_2.$$

Οπότε:

$$\alpha^{x_1} : \alpha^{x_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2} \Leftrightarrow \alpha^{x_1-x_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2}$$

Από τον ορισμό όμως του λογαρίθμου, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$x_1 - x_2 = \log_a \frac{\theta_1}{\theta_2}.$$

Η οποία, λόγω των σχέσεων (II) έχουμε τελικά:

$$\log_a \theta_1 - \log_a \theta_2 = \log_a \frac{\theta_1}{\theta_2}.$$

3. Θέτουμε

$$\log_a \theta = x \quad \text{(III)}$$

Τότε έχουμε $a^x = \theta$ και συνεπώς $a^{kx} = \theta^k$.

Από τον ορισμό όμως του λογαρίθμου, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$kx = \log_a \theta^k$$

και λόγω της σχέσης (III), προκύπτει ότι $k \log_a \theta = \log_a \theta^k$.

4. Είναι $\log_a \sqrt[n]{\theta} = \log_a \theta^{\frac{1}{n}}$, εφόσον $\theta > 0$. Σύμφωνα με τη ιδιότητα (3) τελικά, έχουμε

$$\log_a \sqrt[n]{\theta} = \log_a \theta^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a \theta.$$

5. Ομοίως, είναι $\log_a \frac{1}{v} = \log_a v^{-1} = -\log_a v$.

6. Ισοδύναμα, έχουμε:

$$\begin{aligned} \log_a \theta_1 = \log_a \theta_2 &\Leftrightarrow \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \log_a \frac{\theta_1}{\theta_2} = 0 \\ &\Leftrightarrow a^0 = \frac{\theta_1}{\theta_2} \\ &\Leftrightarrow 1 = \frac{\theta_1}{\theta_2} \\ &\Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2. \end{aligned}$$

Δεκαδικοί και φυσικοί λογάριθμοι

☞ Οι λογάριθμοι με βάση τον αριθμό $a = 10$ λέγονται *δεκαδικοί λογάριθμοι* και συμβολίζονται με **logθ** αντί για $\log_{10} \theta$. Δηλαδή, για τους δεκαδικούς λογάριθμους ισχύει:

$$\log \theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta$$

☞ Οι λογάριθμοι με βάση τον άρρητο αριθμό $e \approx 2,72$ λέγονται *φυσικοί* ή *νεπέριοι* λογάριθμοι και συμβολίζονται με **lnθ** αντί για $\log_e \theta$. Δηλαδή, για τους φυσικούς λογάριθμους ισχύει:

$$\ln \theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$$

Για τους φυσικούς λογάριθμους οι ιδιότητες διαμορφώνονται ως εξής:

♦ $e^{\ln \theta} = \theta$	♦ $\ln e^x = x, x \in \mathbb{R}$
♦ $\ln 1 = 0$ (γιατί $e^0 = 1$)	♦ $\ln e = 1$ (γιατί $e^1 = e$)
♦ $\ln(\theta_1 \cdot \theta_2) = \ln \theta_1 + \ln \theta_2$	♦ $\ln \frac{\theta_1}{\theta_2} = \ln \theta_1 - \ln \theta_2$
♦ $\ln \theta^\kappa = \kappa \cdot \ln \theta$	♦ $\ln \sqrt[\nu]{\theta} = \frac{1}{\nu} \ln \theta$
♦ $\ln \frac{1}{\theta} = -\ln \theta$	♦ $\ln \theta_1 = \ln \theta_2 \Leftrightarrow \theta_1 = \theta_2$

Αλλαγή βάσης (εκτός ύλης)

Με τη βοήθεια του παρακάτω τύπου μπορούμε να μετατρέψουμε ένα λογάριθμο με βάση τυχαίο αριθμό σε κλάσμα λογαρίθμων που θα έχουν βάση το 10 ή το e.

$$\log_\beta \theta = \frac{\log_\alpha \theta}{\log_\alpha \beta}$$

♦ Αν $\alpha = 10$, έχουμε $\log_\beta \theta = \frac{\log \theta}{\log \beta}$

♦ Αν $\alpha = e$, έχουμε $\log_\beta \theta = \frac{\ln \theta}{\ln \beta}$

Από τον τύπο αλλαγής βάσης προκύπτει άμεσα ότι **$\log_\alpha \beta \cdot \log_\beta \alpha = 1$**

$$\log_\alpha \beta \cdot \log_\beta \alpha = \frac{\ln \beta}{\ln \alpha} \cdot \frac{\ln \alpha}{\ln \beta} = 1.$$

Λογαριθμική συνάρτηση

Έστω α ένας πραγματικός αριθμός, με $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$. Σε κάθε $x > 0$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τον αριθμό $\log_\alpha x$, οπότε ορίζεται η συνάρτηση:

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } f(x) = \log_\alpha x.$$

Μελέτη της λογαριθμικής συνάρτησης

- ♦ Έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$.
- ♦ Έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
- ♦ Η γραφική παράσταση της f δεν παρουσιάζει συμμετρίες.

Σημείωση: Η συνάρτηση δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή, ούτε περιοδική και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

- ♦ Η f είναι **γνησίως αύξουσα** αν $\boxed{\alpha > 1}$ και **γνησίως φθίνουσα** αν $\boxed{0 < \alpha < 1}$.

Δηλαδή:

$\boxed{\text{Για } \alpha > 1}$:

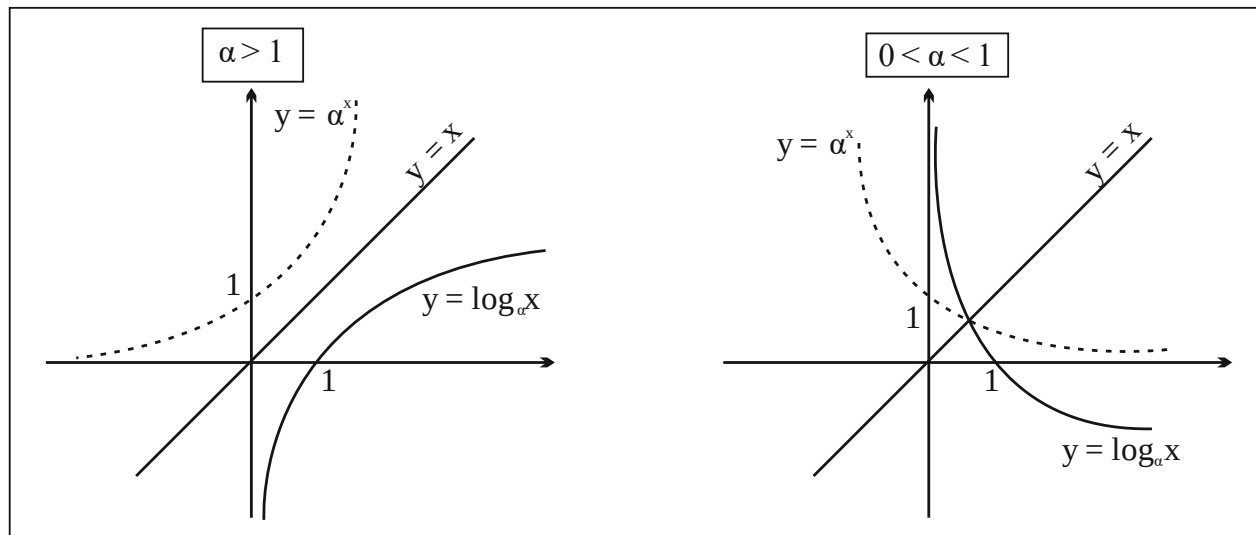
Αν $x_1 < x_2$ τότε $\log_{\alpha} x_1 < \log_{\alpha} x_2$

$\boxed{\text{Για } 0 < \alpha < 1}$:

Αν $x_1 < x_2$ τότε $\log_{\alpha} x_1 > \log_{\alpha} x_2$

- ♦ Από τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \log_{\alpha} x$ προκύπτει ότι αν για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 \neq x_2$ τότε, ισχύει και $\log_{\alpha} x_1 \neq \log_{\alpha} x_2$. Δηλαδή η λογαριθμική συνάρτηση είναι 1-1 και συνεπώς ισχύει η ισοδυναμία $x_1 = x_2 \Leftrightarrow \log_{\alpha} x_1 = \log_{\alpha} x_2$.

Γραφική παράσταση



Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = \log_{\alpha} x$ και $y = \alpha^x$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ (διχοτόμος του 1^{ov} και 3^{ov} τεταρτημορίου).

Αν $a > 1$	Αν $0 < a < 1$
➤ Οι αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι του 1 έχουν λογάριθμους θετικούς (για $x > 1$, η γραφική παράσταση βρίσκεται πάνω από τον $x'x$), ενώ οι αριθμοί που είναι μικρότεροι του 1 έχουν λογάριθμους αρνητικούς.	➤ Οι αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι του 1 έχουν λογάριθμους αρνητικούς (για $x > 1$, η γραφική παράσταση βρίσκεται κάτω από τον $x'x$), ενώ οι αριθμοί που είναι μικρότεροι του 1 έχουν λογάριθμους θετικούς.
➤ Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$ και έχει ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιάξονα Oy' .	➤ Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(1,0)$ και έχει ασύμπτωτο το θετικό ημιάξονα Oy .

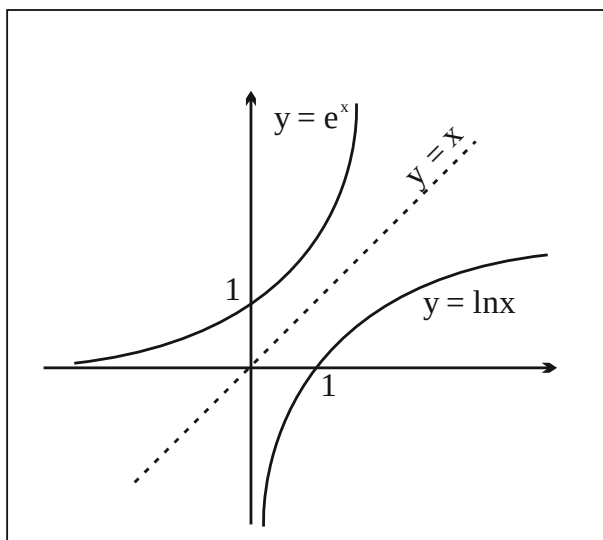
Λογαριθμική συνάρτηση με βάση e

Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \ln x$ λέγεται λογαριθμική συνάρτηση με βάση e . Παρατηρούμε ότι

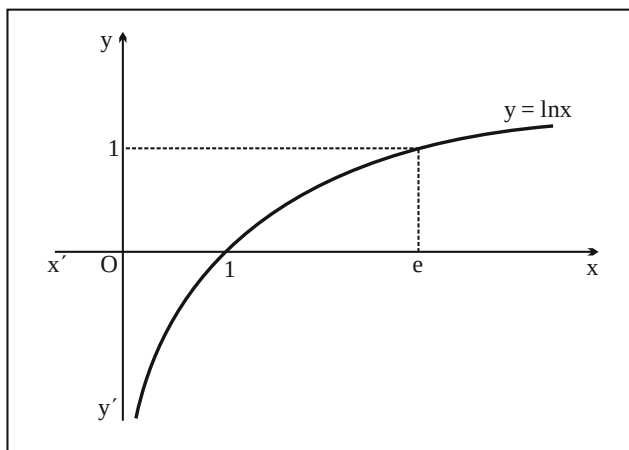
$$y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x.$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^x$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

Για την $f(x) = \ln x$ ισχύουν όλες οι ιδιότητες της λογαριθμικής συνάρτησης με βάση $a > 1$ (εφόσον $e \approx 2,72 > 1$) που έχουν προαναφερθεί.



Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \ln x$, προκύπτει ότι καθώς το x πλησιάζει το 0, με θετικές τιμές (από τα δεξιά), το y μικραίνει απερίοριστα, δηλαδή, όταν το $x \rightarrow 0$ (το x τείνει στο 0), με $x > 0$, το $\ln x \rightarrow -\infty$. Επίσης όταν το x μεγαλώνει απερίοριστα, τότε το $\ln x$ μεγαλώνει, επίσης, απερίοριστα, δηλ όταν το $x \rightarrow +\infty$ τότε και $\ln x \rightarrow +\infty$. Ειδικότερα από το παρακάτω σχήμα έχουμε:



- ♦ Αν $0 < x < 1$ τότε $\ln x < 0$.
- ♦ Αν $1 < x < e$ τότε $0 < \ln x < 1$
- ♦ Αν $e < x$ τότε $1 < \ln x$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Κατά την επίλυση λογαριθμικών εξισώσεων και ανισώσεων πρέπει να ικανοποιούνται οι περιορισμοί. ΔΕΝ ΞΕΧΝΑΕ ότι στη λογαριθμική συνάρτηση με τύπο $f(x) = \log_a x$ πρέπει να ισχύουν $x > 0$ και $1 \neq a > 0$.