

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες

- | | |
|--|--|
| (α') Αν $\alpha\beta = 0$, τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$ | Σ ☐ Λ ☐ |
| (β') Αν $\alpha\beta \neq 0$, τότε $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ | Σ ☐ Λ ☐ |
| (γ') $(x - y)^2 = (y - x)^2$ | Σ ☐ Λ ☐ |
| (δ') $(x - y)^3 = (y - x)^3$ | Σ ☐ Λ ☐ |
| (ε') $(-1)^{19} = -1^{20}$ | Σ ☐ Λ ☐ |
| (στ') $10^{-4} = -10000$ | Σ ☐ Λ ☐ |
| (ζ') $x^4 : x^{-2} = x^2$ | Σ ☐ Λ ☐ |
| (η') Ο αντίθετος του $2x - y - 4$ είναι ο $y - 2x + 4$ | Σ ☐ Λ ☐ |
| (θ') Αν $(\alpha + \beta)^2 = 0$, τότε οι αριθμοί α και β είναι αντίθετοι. | Σ ☐ Λ ☐ |
| (ι') Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $\alpha^0 = 1$ | Σ ☐ Λ ☐ |

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

- | | |
|--|---|
| (α') $A = \frac{x^2 y^{-4}}{x^{-2} y^3}$ | (γ') $\Gamma = \frac{(x^{-2})^{-2}}{y^{10}} : \frac{(y^3)^{-2}}{x^{-10}}$ |
| (β') $B = \frac{(xy^3 z^{-2})^3}{(x^2 y^{-3} z^3)^{-1}}$ | (δ') $E = [x^5 (xy^2)^3] : (x^{-2} : y)^{-2}$ |

3. Αν $\frac{a}{\beta} = \frac{2}{3}$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

- | | | | |
|------------------------|---------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------|
| (α') $\frac{\beta}{a}$ | (β') $\frac{3a + \beta}{\beta}$ | (γ') $\frac{\beta}{3\beta - a}$ | (δ') $\frac{2a + 3\beta}{\beta - a}$ |
|------------------------|---------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------|

4. Να βρεθούν οι αριθμοί $x, y, z \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει $x + y + z = 30$ και $\frac{x}{4} = \frac{y}{8} = \frac{z}{3}$

5. Να αποδείξετε τις παρακάτω ταυτότητες

- (α') $(\alpha + 2\beta)^2 + (2\alpha - \beta)^2 - 4(\alpha^2 + \beta^2) = \alpha^2 + \beta^2$
 (β') $(x - 3)^2 + (2x - 1)^2 = 5(x - 1)^2 + 5$
 (γ') $(x - 3)^3 - 9(1 - x) = x^3 - 9(x - 2)^2$
 (δ') $(x^2 + 1)(\alpha^2 + 9) - (\alpha x - 3)^2 = (3x + \alpha)^2$
 (ε') $x(x - 3y)^2 + y(y - 3x)^2 = (x + y)^3$

6. Να κάνετε τις πράξεις

- | | |
|---|--|
| (α') $\frac{x^2 - x}{x^2 - 4} \cdot \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - x}$ | (δ') $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 6x + 9} \cdot \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$ |
| (β') $\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} \cdot \frac{3x^2 + 6x}{x^3 + 2x^2 + 4x}$ | (ε') $\frac{x^4 - y^4}{x^3 - y^3} \cdot \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2}$ |
| (γ') $\frac{2ax^2 - 10ax}{y^3 + 8y^2 + 16y} : \frac{ax^2 - 25a}{xy + 5y + 4x + 20}$ | (στ') $\frac{\alpha^4 - 4\alpha^2\beta^2}{\alpha^2 + 5\alpha\beta} : \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta + 5\beta^2}$ |

7. Να κάνετε τις πράξεις

$$(\alpha') \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$$

$$(\gamma') \left(\frac{x^2 + y^2}{y} - x\right) : \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \cdot \left(\frac{x^2 - y^2}{x^3 + y^3}\right)$$

$$(\beta') \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) : \left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)$$

8. (α') Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 4$ να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$K = (\alpha + 3\beta)^2 + (3\alpha - \beta)^2$$

(β') Αν $\alpha + \beta = 3$, να βρείτε την τιμή της παράστασης :

$$A = \alpha(\alpha + 1) + \beta(\beta + 1) + 2\alpha\beta + 1$$

9. Αν $(x + a)^2 + (y + \beta)^2 = 4(ax + \beta y)$, να αποδείξετε ότι $a = x$ και $\beta = y$.

10. Αν για τους αριθμούς x, y ισχύει

$$(x - 2y)^2 - x(x - 4y + 1) = (2y - 1)^2$$

να αποδείξετε ότι $4y - x = 1$

11. Αν $x + y = 1$, να δείξετε ότι

$$(\alpha') x^2 + y^2 = 1 - 2xy$$

$$(\beta') x^3 + y^3 = 1 - 3xy$$

12. Αν $x = \lambda + \frac{1}{\lambda}$ και $y = \lambda - \frac{1}{\lambda}$, να αποδείξετε ότι $x^2 = y^2 + 4$

13. Αν $x + y + z = xyz$, να αποδείξετε ότι

$$(\alpha') \frac{x + y}{z} = xy - 1$$

$$(\beta') \frac{x + y}{z} + \frac{y + z}{x} + \frac{z + x}{y} + 3 = xy + yz + zx$$

14. Για τους μη μηδενικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0$$

(α') Να αποδείξετε ότι

$$\alpha\beta + \beta\alpha + \beta\gamma = 0$$

(β') Να δείξετε ότι

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

15. (B12685) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$ ισχύει ότι

$$(\alpha + \beta) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \right) = 4$$

τότε να αποδείξετε ότι

$$(\alpha') \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2$$

$$(\beta') \alpha = \beta$$

16. (B13053) Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$

(α') Να αποδείξετε ότι :

$$(i) \beta + \gamma = -\alpha$$

$$(ii) \frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} = -\alpha$$

(β') Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\frac{\beta^2}{\gamma + \alpha}, \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta}$ και να αποδείξετε ότι :

$$\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta} = 0$$

17. (B13088) Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε :

$$A = 2(x + y)^2 - (x - y)^2 - 6xy - y^2$$

(α') Να αποδείξετε ότι $A = x^2$

(β') Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

18. (B13472) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν $\alpha^2 = 2\alpha + \beta$ και $\beta^2 = 2\beta + \alpha$.

(α') Να αποδείξετε ότι:

$$(i) \alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$$

$$(ii) \alpha + \beta = 1$$

(β') Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2$

19. (B14458) Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:

$$(x + 4y)(x + y) = 9xy$$

(α') Να αποδείξετε ότι

$$(i) (2y - x)^2 = 0$$

$$(ii) y = \frac{x}{2}$$

(β') Να αποδείξετε ότι

$$\left(2y - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(2y + \frac{x}{2}\right)^2 = 10y^2$$

20. (B14473) Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει:

$$\frac{4x + 5y}{x - 4y} = -2$$

(α') Να αποδείξετε ότι: $y = 2x$

(β') Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$$

21. (B14489) Αν οι αριθμοί $2\alpha - 1$ και $\beta - 1$ είναι αντίστροφοι, με $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$ να δείξετε ότι:

(α') $2\alpha + \beta = 2\alpha\beta$

(β') Οι αριθμοί $x = \alpha - \beta$ και $y = \alpha(1 - 2\beta) + 2\beta$ είναι αντίθετοι.

22. (B35388) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4 \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}$$

(α') Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$

(β') Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$$

23. (B14555) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση

$$(x - 2y)^2 - 2(3 - 2xy) = 5y^2 - 1$$

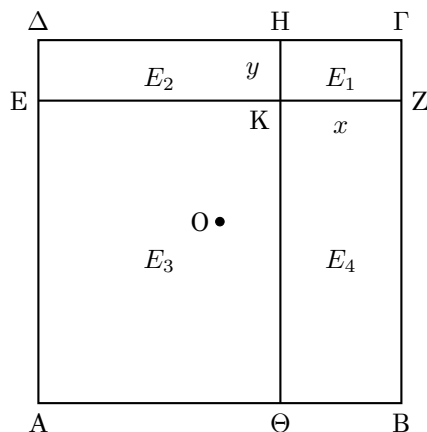
τότε:

(α') Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$

(β') Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$P = (x + y)^3(x - y)^3$$

24. (Δ15052) Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά ίση με 6 και οι ευθείες ΕΖ και ΗΘ είναι παράλληλες στις πλευρές του.



Αν $KZ = x$ και $KH = y$, $x, y \in (0, 6)$, τότε:

(α') Να υπολογίσετε τα E_1, E_2, E_3, E_4 , με τη βοήθεια των x, y .

(β') Να βρείτε τα εμβαδά E_1, E_2, E_3, E_4 , των τεσσάρων ορθογωνίων του σχήματος όταν $x = 4$ και $y = 2$

(γ') Αν επιπλέον ισχύει $E_1 + E_3 = E_2 + E_4$, να αποδείξετε ότι:

(i) $xy + 9 = 3(x + y)$

(ii) Τουλάχιστον ένα από τα τμήματα ΕΖ και ΗΘ διέρχεται από το κέντρο Ο του τετραγώνου.