

1. Αν $\alpha < \beta < \gamma < \delta$, να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων :

$$(\alpha') (\alpha - \beta)(\gamma - \delta)$$

$$(\gamma') (\beta - \alpha)(\beta - \delta)(\delta - \alpha)(\alpha - \gamma)$$

$$(\beta') (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \delta)$$

$$(\delta') (\alpha - \beta)^2(\beta - \gamma)^3(\alpha - \delta)^{2023}$$

2. Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, να αποδείξετε ότι

$$(\alpha') \alpha + \gamma < \beta + \delta$$

$$(\gamma') \alpha - \delta < \beta - \gamma$$

$$(\beta') 2\alpha + 3\gamma < 2\beta + 3\delta$$

$$(\delta') \gamma - 3\beta < \delta - 3\alpha$$

3. Αν $0 < \alpha < \beta$ και $0 < \gamma < \delta$, να αποδείξετε ότι

$$(\alpha') \alpha\gamma < \beta\delta$$

$$(\gamma') \alpha^2 + \gamma^2 < \beta^2 + \delta^2$$

$$(\beta') \frac{\alpha}{\delta} < \frac{\beta}{\gamma}$$

$$(\delta') \frac{\alpha - \delta}{\beta} < \frac{\beta - \gamma}{\alpha}$$

4. Να αποδείξετε ότι :

$$(\alpha') \alpha^2 + 16 \geq 8\alpha$$

$$(\delta') \alpha^2 + \beta^2 + 8 \geq 4(\alpha - \beta)$$

$$(\beta') 2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha - \beta)^2$$

$$(\epsilon') 3(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha\beta \geq -2(\alpha + 2\beta)^2$$

$$(\gamma') (\alpha - \beta)^2 + 8\beta^2 \geq 4\alpha\beta$$

$$(\sigma\tau') \alpha^2 + \beta^2 \geq 2(\alpha - \beta - 1)$$

5. Να αποδείξετε ότι :

$$(\alpha') \alpha^4 + \beta^4 \geq \alpha^3\beta + \alpha\beta^3$$

$$(\delta') x^2 + 4xy + 5y^2 \geq 0$$

$$(\beta') 4x^2 + x^4 + 4y^2 + x^2y^2 \geq 0$$

$$(\epsilon') \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$$

$$(\gamma') x^2 + 10x + 26 > 0$$

$$(\sigma\tau') \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

6. Αν $0 < \alpha < \beta$, να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$(\alpha') \alpha^3 + \alpha\beta^2 \text{ και } \beta^3 + \alpha^2\beta$$

$$(\beta') \alpha^3 + \alpha^2\beta \text{ και } \beta^3 + \alpha\beta^2$$

7. (α') Να δείξετε ότι $\alpha^2 + 4 \geq 4\alpha$

(β') Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$,

(i) Να δείξετε ότι $(\alpha^2 + 4)(\beta^2 + 4)(\gamma^2 + 4) \geq 64\alpha\beta\gamma$

(ii) Ποτε ισχύει η ισότητα ;

8. Αν α, β ομόσημοι αριθμοί, να αποδείξετε ότι :

$$(\alpha') \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$$

$$(\beta') \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \geq 4$$

$$(\gamma') \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \right) \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) \geq 4$$

9. Αν $\alpha + \beta = 1$, να αποδείξετε ότι

$$(\alpha') \alpha\beta \leq \frac{1}{4}$$

$$(\beta') \alpha^2 + \beta^2 \geq \frac{1}{2}$$

10. Να προσδιορίσετε τα x, y στις παρακάτω περιπτώσεις

$$(\alpha') x^2 + y^2 + 12x + 2y + 37 = 0$$

$$(\beta') 4x^2 + y^2 - 16x + 2y + 17 \leq 0$$

$$(\gamma') 2x^2 + y^2 - 2xy - 4x + 4 \leq 0$$

11. (B12673) Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $0 < \alpha < \beta$

(α') Να αποδείξετε ότι

$$\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$$

(β') Να αποδείξετε ότι

$$\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$$

12. (B12922) Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + \beta^2$ και $B = 2\alpha\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(α') Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $A = 0$

(β') Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(γ') Να βρείτε την σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A - B = 0$

13. (B13266) Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(α') Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$

(β') (i) Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$

(ii) Για ποιές τιμές των α, β ισχύει $A + B = 0$

14. (B13323)

(α') Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει

$$(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17$$

(β') Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y ώστε

$$x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0$$

15. (B14410) Δίνονται οι παραστάσεις A και B με $A = \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{4}$ και $B = (\beta - 3)^2$

(α') Να δείξετε ότι $A = x^4 + x^2 + 2$

(β') (i) Να αιτιολογήσετε γιατί $A > 0$ για κάθε $x \neq \sqrt{2}$.

(ii) Για ποια τιμή του x η παράσταση A παίρνει τη μικρότερη τιμή της;

23. (Γ14713) Δίνεται η παράσταση

$$A = \frac{\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18}{\alpha^2 + 2\alpha}, \quad \alpha > 0$$

Να αποδείξετε ότι:

(α') $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18 = (\alpha^2 + 9)(\alpha + 2)$

(β') Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει

(i) $A = \frac{\alpha^2 + 9}{\alpha}$

(ii) $A \geq 6$. Πότε ισχύει η ισότητα $A = 6$;

24. (Γ14602) Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

(α') Να αποδείξετε ότι $0 < \alpha^3 < \alpha$.

(β') Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0, \quad \alpha^3, \quad 1, \quad \alpha, \quad \frac{1}{\alpha}$$