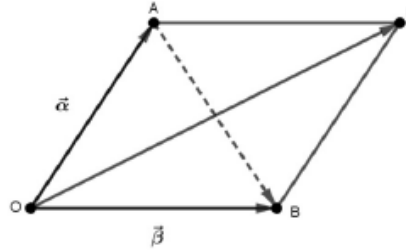


Άσκηση 1

ΛΥΣΗ

α) Το παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Οπότε από τον λεγόμενο «κανόνα του παραλληλογράμμου» προκύπτει:

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}. \text{ Επίσης } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}.$$

i. Έχουμε:

$$|\overrightarrow{OG}|^2 = (\overrightarrow{OG})^2 = (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2.$$

ii. Έχουμε:

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = (\overrightarrow{AB})^2 = (\vec{\beta} - \vec{\alpha})^2 = \vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha}^2 = |\vec{\beta}|^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\alpha}|^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2.$$

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OG}| &= |\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow \\ |\overrightarrow{OG}|^2 &= |\overrightarrow{AB}|^2 \Leftrightarrow \\ |\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2 &= |\vec{\alpha}|^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow \\ 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} &= 0 \Leftrightarrow \\ \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} &= 0 \stackrel{\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}}{\Leftrightarrow} \\ \vec{\alpha} &\perp \vec{\beta}. \end{aligned}$$

Άρα το παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ είναι ορθογώνιο γιατί η γωνία $\hat{O}$ είναι ορθή.

Εναλλακτικά, με δεδομένο ότι $|\overrightarrow{OG}| = |\overrightarrow{AB}|$, το παραλληλόγραμμο ΟΑΓΒ είναι ορθογώνιο γιατί οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

Άσκηση 2

ΛΥΣΗ

α) Αρκεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\mu \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\overrightarrow{B\Gamma} = \mu \overrightarrow{BM}$.

Πράγματι, θεωρώντας το B ως σημείο αναφοράς, είναι:

$$\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} - 2(\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{BA}) = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BM} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{BM}$$

β) Το M είναι το μέσο του τμήματος $B\Gamma$, διότι

$$\overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{B\Gamma} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{BM}$$

γ) i. Επειδή τα σημεία A, B, Γ ως κορυφές τριγώνου δεν είναι συνευθειακά, έπεται ότι τα μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$ δεν είναι παράλληλα.

Είναι $\kappa \overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \overrightarrow{AB}$.

Αν $\kappa \neq 0$, τότε $\kappa \overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{A\Gamma} = \frac{\lambda}{\kappa} \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{A\Gamma} // \overrightarrow{AB}$.

Αν $\lambda \neq 0$, τότε $\kappa \overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{\kappa}{\lambda} \overrightarrow{A\Gamma} \Rightarrow \overrightarrow{A\Gamma} // \overrightarrow{AB}$.

Επομένως πρέπει $\kappa = \lambda = 0$.

ii) Τότε είναι:
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 0 \\ \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = 0 \end{cases}$$

Αφού $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 0$ έπεται ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα. Επομένως, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, με $\hat{A} = 90^\circ$.

Αφού $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = 0$ έπεται ότι η διάμεσος AM του ορθογώνιου τριγώνου είναι κάθετη στην πλευρά $B\Gamma$, δηλαδή είναι και ύψος.

Ως εκ τούτου το τρίγωνο είναι και ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.