Βιβλιοτετράδιο Μαθηματικών

Με τις απαντήσεις στις Ασκήσεις των Σχολικών Βιβλίων!

ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΗΝ ΥΛΗ ΤΩΝ ΝΕΩΝ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΤΟΥ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΣΤ΄ ΤΑΞΗ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΤΕΥΧΟΣ

3

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΓΙΑ ΤΗΝ ΣΤ΄΄ ΤΑΞΗ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Περιεχόμενα:

15. Παραγοντοποίηση φυσικών αριθμών

*Οι **πρώτοι αριθμοί*** είναι το "κατασκευαστικό" υλικό για να φτιαχτούν όλοι οι σύνθετοι αριθμοί.*
Κάθε σύνθετος αριθμός είναι φτιαγμένος από <u>έναν μοναδικό συνδυασμό πρώτων αριθμών</u>.
Γινόμενο πρώτων παραγόντων
Ένας σύνθετος αριθμός μπορεί να εκφραστεί και ως γινόμενο πρώτων αριθμών (γινόμενο πρώτων παραγόντων).

Η σειρά των διαιρέσεων δεν παίζει κανένα ρόλο, γιατί κάθε σύνθετος αριθμός αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων μόνο κατά έναν τρόπο.
*Για να αναλύσουμε έναν σύνθετο αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, μπορούμε να εργαστούμε με **<u>δεντροδιάγραμμα ή διαδοχικές διαιρέσεις.</u>***

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να εκφράσετε τον αριθμό 110 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων με διαδοχικές διαιρέσεις.

α. Εξετάζουμε, σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας, ποιος είναι ο μικρότερος πρώτος αριθμός με τον οποίο διαιρείται ο αριθμός 110. Βρίσκουμε ότι είναι το 2. Έτσι τον διαιρούμε και γράφουμε από κάτω το πηλίκο, που είναι 55.
β. Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία για το 55. Διαιρούμε με το 5 και γράφουμε το πηλίκο, που είναι το 11.
γ. Διαιρούμε το 11 με το 11, και γράφουμε το πηλίκο, που είναι το 1.
Η ανάλυση τελειώνει, γιατί το τελευταίο πηλίκο είναι το 1.

$$\begin{array}{r|l} 110 & 2 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$

Απάντηση: Ο αριθμός 110 εκφράζεται ως $2 \cdot 5 \cdot 11$.

*<u>Στη σελίδα 90 του δεύτερου τεύχους ασκ.3 είναι 29,31 αντί του 27,29.</u>

Παραγοντοποίηση φυσικών αριθμών

Απάντηση άσκησης 1 τετρ. εργασιών , σελ. 35

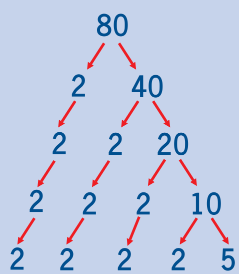
36	63	67	70	78	84	91
2 • 2 • 3 • 3	2 • 3 • 21	1 • 67	7 • 10	2 • 2 • 3 • 7	7 • 12	1 • 91
2 • 3 • 3 • 3	7 • 9	3 • 17	5 • 14	2 • 3 • 13	4 • 21	3 • 29
2 • 18	3 • 21	3 • 19	2 • 5 • 7	2 • 3 • 17	2 • 2 • 3 • 3 • 7	7 • 13
3 • 12	3 • 3 • 7	7 • 19	2 • 2 • 5 • 7	2 • 39	2 • 2 • 3 • 7	13 • 17

Απάντηση άσκησης 2 τετρ. εργασιών, σελ. 35

Αναλύουμε το 80 με δεντροδιάγραμμα σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

α. Εξετάζουμε, σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας, ποιος είναι ο μικρότερος πρώτος αριθμός με τον οποίο διαιρείται ο αριθμός 80. Βρίσκουμε ότι είναι το 2.
Επομένως, γράφουμε το γινόμενο 2 · 40.

β. Από κάτω, αφού γράψουμε ξανά τον πρώτο παράγοντα (το 2), συνεχίζουμε αναλύοντας με τον ίδιο τρόπο το 40. Διαιρείται με το 2 και έτσι γράφουμε το γινόμενο 2 · 20. Όμοια γράφουμε το 20 = 2 · 10 και το 10 = 2 · 5. Η ανάλυση τελειώνει, γιατί όλοι οι παράγοντες είναι πρώτοι αριθμοί.



Άρα 80 = 2 · 2 · 2 · 2 · 5

10= **2 · 5**	30= **2 · 3 · 5**	50= **2 · 5 · 5**	70= **2 · 5 · 7**
20= **2 · 2 · 5**	40= **2 · 2 · 2 · 5**	60= **2 · 2 · 3 · 5**	80= **2 · 2 · 2 · 2 · 5**

Παραγοντοποίηση φυσικών αριθμών

Απάντηση άσκησης 3
τετρ. εργασιών, σελ. 35

210	350	730
2 105	2 175	2 365
2 3 35	2 5 35	2 5 73
2 3 5 7	2 5 5 7	2 5 73

210 = **2 · 3 · 5 · 7** 350 = **2 · 5 · 5 · 7** 730 = **2 · 5 · 73**

Απάντηση άσκησης 4
τετρ. εργασιών, σελ. 35

α. Εξετάζουμε, σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας, ποιος είναι ο μικρότερος πρώτος αριθμός με τον οποίο διαιρείται ο αριθμός 96. Βρίσκουμε ότι είναι το 2. Έτσι τον διαιρούμε και γράφουμε από κάτω το πηλίκο, που είναι 48.
β. Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία για το 48. Διαιρούμε με το 2 και γράφουμε το πηλίκο, που είναι το 24.
γ. Διαιρούμε το 24 με το 2, και γράφουμε το πηλίκο, που είναι το 12.
δ. Διαιρούμε το 12 με το 2, και γράφουμε το πηλίκο, που είναι το 6.
ε. Διαιρούμε το 6 με το 2, και γράφουμε το πηλίκο, που είναι το 3.
στ. Διαιρούμε με το 3, και γράφουμε το πηλίκο, που είναι το 1. Η ανάλυση τελειώνει, γιατί το τελευταίο πηλίκο είναι το 1.

96	2
48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

Επομένως το 96 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων γράφεται ως εξής: 96 = 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 3
Με παρόμοια διαδικασία γράφουμε τους αριθμούς 405, 675, 291 και 87 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Παραγοντοποίηση φυσικών αριθμών

405	3
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

405 = 3 · 3 · 3 · 3 · 5

675	3
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

675 = 3 · 3 · 3 · 5 · 5

291	3
97	97
1	

291 = 3 · 97

87	3
29	29
1	

87 = 3 · 29

Προβλήματα

Πρόβλημα 1

Το 11 είναι παράγοντας του αριθμού 4.620. Ποιούς άλλους διαφορετικούς παράγοντες έχει ο αριθμός αυτός;

Σκέφτομαι...

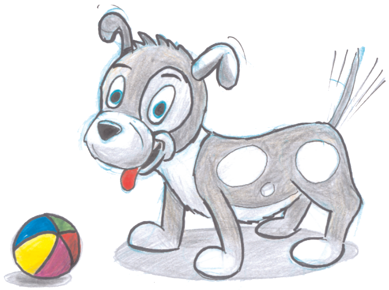
Θα αναλύσω τον αριθμό 4.620 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Θα διαιρέσω αρχικά με το 11 και θα συνεχίσω με τη μέθοδο των διαδοχικών διαιρέσεων.

...και λύνω!

4.620	11
420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	

4.620	2
2.310	2
1.155	3
385	5
77	7
11	11
1	

Απάντηση: Οι άλλοι παράγοντες είναι οι 2, 3, 5, 7.



Παραγοντοποίηση φυσικών αριθμών

Απάντηση προβλήματος 1 τετρ. εργασιών, σελ. 36

Θα αναλύσω το 100 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων με διαδοχικές διαιρέσεις.

100	2
50	2
25	5
5	5
1	

Απάντηση: 100 = 2 · 2 · 5 · 5

Απάντηση προβλήματος 2 τετρ. εργασιών, σελ. 36

Θα αναλύσω το 2.310 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων με διαδοχικές διαιρέσεις.

2.310	2
1.155	3
385	5
77	7
11	11
1	

Απάντηση: Οι άλλοι παράγοντες είναι οι 2, 3, 5, και 7.

Δραστηριότητα του τετραδίου εργασιών, σελ. 36

- Οι σελίδες που καλύπτει το καθένα από τα δύο μέρη της μιας ομάδας είναι **2 · 2**.
- Οι σελίδες που καλύπτει το συνολικό έργο της ομάδας είναι **2 · 2 · 2**.
- Οι σελίδες που καλύπτει το συνολικό έργο και των τριών ομάδων είναι **2 · 2 · 2 · 3 = 24**.
- Το συνολικό αριθμό των σελίδων της αφίσας μπορούμε να το βρούμε με τους εξής τρόπους:
  - 2 · 2 επί 6 που είναι οι υποομάδες: **2 · 2 · 6 = 24**
  - 2 · 2 · 2 επί 3 που είναι οι ομάδες: **2 · 2 · 2 · 3 = 24**
  - 6 · 4 που είναι τα φύλλα χαρτί: **4 · 6 = 24**

16. Πολλαπλάσια ενός αριθμού. - Ε.Κ.Π.

***Πολλαπλάσιο** ενός φυσικού αριθμού λέγεται ο αριθμός που προκύπτει, όταν τον πολλαπλασιάσουμε με έναν άλλο φυσικό αριθμό.Κάθε φυσικός αριθμός έχει άπειρα πολλαπλάσια.*
***Κοινά πολλαπλάσια** δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών λέγονται οι αριθμοί που είναι πολλαπλάσια όλων αυτών των φυσικών αριθμών.*
Το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια, εκτός από το 0, λέγεται Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.).

Για να βρούμε το Ε.Κ.Π. δύο ή περισσότερων αριθμών εξετάζουμε τον μεγαλύτερο από αυτούς. Αν αυτός δεν είναι το Ε.Κ.Π. τους, τον διπλασιάσουμε, τριπλασιάσουμε κ.λπ., ώσπου να βρούμε το πολλαπλάσιο του που είναι πολλαπλάσιο και των άλλων αριθμών.
*Ένας άλλος τρόπος είναι να τους αναλύσουμε ταυτόχρονα σε γινόμενο πρώτων παραγόντων με τη μέθοδο των διαδοχικών διαιρέσεων. **Το Ε.Κ.Π. τους είναι το γινόμενο όλων των πρώτων παραγόντων**.*

Άσκηση 1

Βρίσκω το Ε.Κ.Π. των αριθμών 20, 35 και 60 με διαδοχικές διαιρέσεις.

λύση

1ος τρόπος

α. Εξετάζουμε, σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας, ποιος είναι ο μικρότερος πρώτος αριθμός οποίος διαιρεί τουλάχιστον τον έναν από τους τρεις αριθμούς. Είναι ο αριθμός 2, ο οποίος διαιρεί το 20 και το 60. Διαιρούμε αυτούς τους αριθμούς, γράφουμε τα πηλίκα τους από κάτω και γράφουμε το 35 όπως είναι.

β. Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία, αναζητώντας πάντα το μικρότερο πρώτο αριθμό που να διαιρεί τουλάχιστον τον έναν αριθμό. Όσους δεν διαιρούνται τους ξαναγράφουμε από κάτω, μέχρι να γίνουν όλα τα πηλίκα ίσα με το 1.

20	35	60	2
10	35	30	2
5	35	15	3
5	35	5	5
1	7	1	7
	1		

Απάντηση: Το Ε.Κ.Π. των αριθμών 20, 35 και 60 είναι το $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$.

λύση

2ος τρόπος

Εξετάζουμε αν το 60 που είναι ο μεγαλύτερος διαιρείται με τους άλλους δύο αριθμούς , δηλ. αν είναι πολλαπλάσιο αυτών. Το 60 δεν διαιρείται με τους 20 και 35 συγχρόνως, γι'αυτό το διπλασιάζουμε. Το 120 επίσης δεν διαιρείται από τους 20 και 35 συγχρόνως. Τριπλασιάζουμε το 60. Το 180 πάλι δεν διαιρείται από τους 20 και 35 συγχρόνως. Τετραπλασιάζουμε το 60 και παίρνουμε τον 240 που δεν διαιρείται από τους 20 και 35 συγχρόνως. Συνεχίζουμε τη διαδικασία και φτάνουμε έτσι στον αριθμό 420 που διαιρείται από τους 20 και 35 συγχρόνως οπότε είναι πολλαπλάσιο των 20 και 35 και επειδή είναι το πρώτο κοινό πολλαπλάσιο που βρήκαμε είναι το Ε.Κ.Π (ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο) αυτών.

Απάντηση άσκησης 1 τετρ. εργασιών, σελ. 37

Για να βρούμε το Ε.Κ.Π. δύο ή περισσότερων αριθμών εξετάζουμε τον μεγαλύτερο από αυτούς. Αν αυτός δεν είναι το Ε.Κ.Π. τους, τον διπλασιάσουμε, τριπλασιάσουμε κ.λπ., ώσπου να βρούμε το πολλαπλάσιο του που είναι πολλαπλάσιο των άλλων αριθμών.

Εύρεση Ε.Κ.Π. (4,9):

Π9 = 9, 18, 27, **36**, ...

Το 36 είναι το πρώτο από τα πολλαπλάσια του 9, που διαιρείται με το 4. Άρα Ε.Κ.Π. (4,9) = 36. **(Κυκλώστε το δ)**.

Εύρεση Ε.Κ.Π. (10,15):

Π15 = 15, **30**, ...

Το 30 είναι το πρώτο από τα πολλαπλάσια του 15, που διαιρείται με το 10. Άρα Ε.Κ.Π. (10,15) = 30 **(Κυκλώστε το γ)**.

Εύρεση Ε.Κ.Π. (7,35):

Επειδή το 35 που είναι ο μεγαλύτερος είναι πολλαπλάσιο του 7 το Ε.Κ.Π. (7,35) = 35. **(Κυκλώστε το α)**.

Πολλαπλάσια ενός αριθμού. - Ε.Κ.Π.

Άσκηση 2

Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός που μπορεί να διαιρεθεί με τους αριθμούς 4, 12, 16;

Είναι το Ε.Κ.Π. των αριθμών 4, 12, 16. Θα το βρούμε με τη μέθοδο των διαδοχικών διαιρέσεων. Το Ε.Κ.Π. των αριθμών αυτών είναι το γινόμενο όλων των πρώτων παραγόντων.

4	12	16	2
2	6	8	2
1	3	4	2
1	3	2	2
1	3	1	3
	1		

Απάντηση: Ε.Κ.Π. (4, 12, 16) = 2 · 2 · 2 · 2 · 3 = 48.

Απάντηση άσκησης 2 τετρ. εργασιών, σελ. 37

99	66	3
33	22	11
3	2	2
3	1	3
1		

Ε.Κ.Π. (99, 66) = 198

18	180	2
9	90	2
9	45	3
3	15	3
1	5	5
	1	

Ε.Κ.Π. (18, 180) = 180

5	8	12	2
5	4	6	2
5	2	3	2
5	1	3	3
5	1	1	5
1	1		

Ε.Κ.Π. (5, 8, 12) = 120

4	7	15	2
2	7	15	2
1	7	15	3
	7	5	5
	7	1	7
	1		

Ε.Κ.Π. (4, 7, 15) = 140

Άσκηση 3

Να υπολογίσετε το Ε.Κ.Π. των αριθμών 6, 8, 12

λύση

1ος τρόπος

Θα βρω τα πολλαπλάσια των 6, 8 και12. Είναι:
Π6 = 6, 12, 18, 24, 30, ...
Π8 = 8, 16, 24, 32, 40, ...
Π12 = 12, 24, 36, 48, ...
Το μικρότερο κοινό πολλαπλάσιο και των τριών αριθμών είναι το 24. **Άρα το Ε.Κ.Π. (6, 8, 12) = 24**

2ος τρόπος

Αναλύω τους τρεις αριθμούς, σε γινόμενο πρώτων παραγόντων με τη μέθοδο των διαδοχικών διαιρέσεων. Το Ε.Κ.Π. των τριών αυτών αριθμών είναι το γινόμενο όλων των πρώτων παραγόντων.

6	8	12	2
3	4	6	2
3	2	3	2
3	1	3	3
1		1	

Απάντηση: Ε.Κ.Π. (6, 8, 12) = 2 · 2 · 2 · 3 = 24.

Απάντηση άσκησης 3 τετρ. εργασιών, σελ. 37

Θα υπολογίσω το Ε.Κ.Π. των αριθμών 6, 8, 10, 12 αναλύοντας τους σε γινόμενο πρώτων παραγόντων με τη μέθοδο των διαδοχικών διαιρέσεων. Το Ε.Κ.Π. τους είναι το γινόμενο όλων των πρώτων παραγόντων.

6	8	10	12	2
3	4	5	6	2
3	2	5	3	2
3	1	5	3	3
1		5	1	5
		1		

Ε.Κ.Π. (6, 8, 10, 12) = 2 · 2 · 2 · 3 · 5 = 120

Απάντηση: Ο αριθμός είναι ο 120.

Πολλαπλάσια ενός αριθμού. - Ε.Κ.Π.

Πρόβλημα 1

Οι μαθητές μιας τάξης (που είναι περισσότεροι από 20) χωρίζονται σε ομάδες των 3 ή των 4 παιδιών χωρίς να περισσεύει κανένας. Πόσοι μπορεί να είναι;

λύση

Ο αριθμός των μαθητών πρέπει να είναι κοινό πολλαπλάσιο του 3 και του 4. Για να βρω το Ε.Κ.Π. του 3 και του 4, σκέφτομαι τα πολλαπλάσια του 4 μέχρι να βρω το πρώτο κοινό τους πολλαπλάσιο:
0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, ...

(*Υπάρχουν πολλά κοινά πολλαπλάσια, αλλά οι μαθητές δεν μπορεί να είναι περισσότεροι από 30.*)

Απάντηση: **Οι μαθητές είναι 24.**

Απάντηση προβλήματος 1 τετρ. εργασιών, σελ. 37

Ο αριθμός των μαθητών πρέπει να είναι κοινό πολλαπλάσιο των 5, 10 και 12. Θα βρω το Ε.Κ.Π. των 5,10 και 12.

5	10	12	2
5	5	6	2
5	5	3	3
5	5	1	5
1	1		

Ε.Κ.Π. (5, 10, 12) = 2 · 2 · 3 · 5 = 60

Απάντηση: Ο μικρότερος αριθμός μαθητών είναι 60.

Πρόβλημα 2

Τρεις αθλητές στίβου ξεκινούν μαζί και τρέχουν το γύρο του γηπέδου. Ο πρώτος ολοκληρώνει τον ένα γύρο σε 5 λεπτά, ο δεύτερος σε 4 λεπτά και ο τρίτος σε 6 λεπτά. Σε πόσα λεπτά θα περάσουν ξανά μαζί από το ίδιο σημείο και πόσους γύρους θα έχει κάνει ο καθένας;

Θα ψάξω να βρω το Ε.Κ.Π. των αριθμών 5, 4, 6. Θα ακολουθήσω τη μέθοδο ταυτόχρονης ανάλυσης των αριθμών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

5	4	6	2
5	2	3	2
5	1	3	3
5	1	1	5
1			

Ε.Κ.Π. (5, 4, 6) = 2 · 2 · 3 · 5 = 60

Μετά από 60 λεπτά θα ξανασυναντηθούν και οι τρείς.
Ο πρώτος μέχρι τη στιγμή της συνάντησης
θα έχει τρέξει: **60 : 5 = 12 γύρους**
Ο δεύτερος: **60 : 4 = 15 γύρους**
Ο τρίτος: **60 : 6 = 10 γύρους**

Απάντηση προβλήματος 2 τετρ. εργασιών, σελ. 37

Ψάχνω να βρω σε πόσα λεπτά θα ξαναβρεθούν μαζί στο ίδιο σημείο από τη στιγμή που άρχισαν τη διαδρομή. Θα ψάξω να βρω το Ε.Κ.Π.(4,6,8). Σκέφτομαι τα πολλαπλάσια του 8 μέχρι να βρω το πρώτο κοινό τους πολλαπλάσιο: 8, 16, 24.

Ε.Κ.Π. (4, 6, 8) = 2 · 2 · 2 · 3 = 24

Ο πρώτος θα έχει κάνει:
24 : 4 = 6 γύρους
Ο δεύτερος θα έχει κάνει:
24 : 6 = 4 γύρους
Ο τρίτος θα έχει κάνει:
24 : 8 = 3 γύρους

Απάντηση: Μετά από 24 λεπτά θα ξανασυναντηθούν.
Ο πρώτος θα έχει κάνει 6 γύρους, ο δεύτερος 4 και ο τρίτος 3 γύρους.

Πολλαπλάσια ενός αριθμού. - Ε.Κ.Π.

Δραστηριότητα του τετραδίου εργασιών, σελ. 38

• Θα υπολογίσω το Ε.Κ.Π. των 3, 8, 12, 24, 144 και 360. Ο αριθμός αυτός θα μας δείξει πόσοι μήνες χρειάζονται για να παρατηρηθεί ξανά το φαινόμενο:

3	8	12	24	144	360	2
3	4	6	12	72	180	2
3	2	3	6	36	90	2
3	1	3	3	18	45	2
3		3	3	9	45	3
1		1	1	3	15	3
				1	5	5
					1	

Ε.Κ.Π. (3, 8, 12, 24, 177, 36) = 2 · 2 · 2 · 2 · 3 · 35 = 720

Οι 720 μήνες είναι 720:12=60 χρόνια. Μετά από 60 χρόνια θα παρατηρηθεί ξανά το φαινόμενο.

• Οι πλανήτες μέχρι τότε θα έχουν κάνει τις εξής περιστροφές:

Πλανήτης	Ερμής	Αφροδίτη	Γη	Άρης	Δίας	Κρόνος
Περιστροφές	720 : 3 = 240	720 : 8 = 90	60	30	5	2

Όσο πιο μακριά από τον Ήλιο βρίσκεται ο πλανήτης τόσο μεγαλύτερος είναι ο κύκλος που πρέπει να διαγράψει. Κατά συνέπεια τόσο περισσότερο χρόνο χρειάζεται για μία πλήρη περιστροφή.
Οι πέντε πλανήτες ήταν γνωστοί κατά την αρχαιότητα. Ετσι πήραν το όνομα τους από την ελληνική και ρωμαϊκή μυθολογία: ο Δίας (βασιλιάς των θεών), ο Άρης (ο θεός του πολέμου), ο Ερμής (ο αγγελιοφόρος των θεών), η Αφροδίτη (η θεά του Έρωτα και της Αγάπης) και ο Κρόνος (ο πατέρας του Δία και θεός της γεωργίας). Από την εποχή της ανακάλυψης του τηλεσκοπίου, έχουν βρεθεί τρεις ακόμα πλανήτες στο ηλιακό μας σύστημα: ο Ουρανός το 1781, ο Ποσειδώνας το 1846 και ο Πλούτωνας το 1930. Οι ώρες του χρόνου είναι 24 · 365 = 8760. Το αεροπλάνο λοιπόν διανύει 8,76 εκατομμύρια χιλιόμετρα το χρόνο. Άρα οι αποστάσεις κάθε πλανήτη από τον Ήλιο σε εκατομμύρια χιλιόμετρα έχουν ως εξής:

Πλανήτης	Ερμής	Αφροδίτη	Γη	Άρης	Δίας	Κρόνος
Περιστροφές	61,32	105,12	157,68	227,76	779,64	1.427,88

Το βάρος ενός σώματος είναι η δύναμη με την οποία ο πλανήτης έλκει το σώμα αυτό. Η δύναμη αυτή είναι συνάρτηση της μάζας του πλανήτη. Όσο πιο μεγάλη είναι η μάζα του πλανήτη τόσο πιο δυνατά έλκει τα σώματα που βρίσκονται κοντά του. Για παράδειγμα, στη Σελήνη η οποία έχει πολύ μικρότερη μάζα από αυτήν της Γης το βάρος ενός σώματος, το οποίο στη Γη ζυγίζει 50 κιλά, θα είναι 8,3 κιλά.

17. Δυνάμεις

Δύναμη φυσικού αριθμού

Ένα γινόμενο με ίδιους παράγοντες μπορεί να γραφεί ως δύναμη.
Η δύναμη αποτελείται από δύο αριθμούς:
*τη **βάση** που είναι ο αριθμός που χρησιμοποιείται ως παράγοντας στο γινόμενο και τον **εκθέτη** που δείχνει πόσες φορές ο αριθμός της βάσης χρησιμοποιείται ως παράγοντας.*

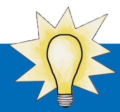
Ο εκθέτης γράφεται με μικρότερο μέγεθος, πάνω και δεξιά από τη βάση.
Για παράδειγμα, η δύναμη με βάση το 3 και εκθέτη το 4 γράφεται 3^4 και διαβάζεται:
3 στην τετάρτη (δύναμη).
Η δύναμη με εκθέτη το 2 διαβάζεται στη δευτέρα ή στο τετράγωνο (π.χ. 3^2 , 3 στη δευτέρα ή 3 στο τετράγωνο). Η δύναμη με εκθέτη το 3 διαβάζεται στην τρίτη ή στον κύβο (π.χ. 4^3 , 4 στην τρίτη ή 4 στον κύβο).

Άσκηση 1

Υπολόγισε τις πρώτες δυνάμεις του αριθμού 3.

λύση

3^2	3^3	3^4	3^5	3^6
$3 \cdot 3 = 9$	$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$



Απάντηση άσκησης 1 τετρ. εργασιών, σελ. 39

2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
$2 \cdot 2 = 4$	$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$

Δυνάμεις

Απάντηση άσκησης 2 τετρ. εργασιών, σελ. 39

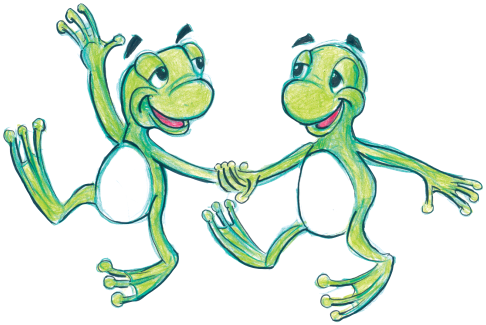
ΑΡΙΘΜΟΙ ▶ / ΔΥΝΑΜΗ ▼	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ΑΡΙΘΜΟΣ^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
ΑΡΙΘΜΟΣ^3	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1.000

Άσκηση 2

Να υπολογίσετε το διπλάσιο, το τετράγωνο, το τριπλάσιο και τον κύβο των αριθμών 3, 7.

λύση

	3	**7**
διπλάσιο	$2 \cdot 3 = 6$	$2 \cdot 7 = 14$
τετράγωνο	$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$	$7^2 = 7 \cdot 7 = 49$
τριπλάσιο	$3 \cdot 3 = 9$	$3 \cdot 7 = 21$
κύβος	$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$	$7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$



Απάντηση άσκησης 3 τετρ. εργασιών, σελ. 39

- Το διπλάσιο του 5 είναι $2 \cdot 5 = 10$, ενώ το τετράγωνο του 5 είναι $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$
- Το τριπλάσιο του 4 είναι $3 \cdot 4 = 12$, ενώ το 4 στον κύβο είναι $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
- Το διπλάσιο του 6 είναι $2 \cdot 6 = 12$, ενώ το τετράγωνο του 6 είναι $6^2 = 6 \cdot 6 = 36$

Άσκηση 3

Να βρείτε το γινόμενο πρώτων παραγόντων του αριθμού 625. Μπορείτε να γράψετε το γινόμενο αυτό με συντομότερο τρόπο;

λύση

Εξετάζουμε, σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας, ποιος είναι ο μικρότερος πρώτος αριθμός ο οποίος διαιρεί τον αριθμό 625. Βρίσκουμε ότι είναι ο αριθμός 5 και αρχίζουμε τη διαδικασία παραγοντοποίησης. Ολοκληρώνοντας τη διαδικασία, βρίσκουμε το γινόμενο πρώτων παραγόντων

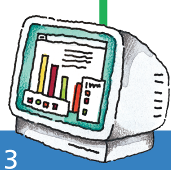
$$625 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

Διαπιστώνουμε ότι είναι ένα γινόμενο που αποτελείται από ίδιους παράγοντες. Άρα μπορεί να εκφραστεί με δύναμη.

Απάντηση: Ο αριθμός 625 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ και με συντομότερο τρόπο είναι: 5^4.

Απάντηση άσκησης 4 τετρ. εργασιών, σελ. 39

625	5	243	3	343	7	169	13
125	5	81	3	49	7	13	13
25	5	27	3	7	7	1	
5	5	9	3	1			
1		3	3				
		1					



Δυνάμεις

Γράψε με τη μορφή δύναμης τα παρακάτω γινόμενα	Ανάλυσε τους αριθμούς και γράψε τους με τη μορφή δύναμης.	
$20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 = 20^4$ $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$	$625 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$ $243 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$	$343 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3$ $169 = 13 \cdot 13 = 12^2$

Πρόβλημα 1

Τέσσερις εταιρείες κινητής τηλεφωνίας έχουν 4 υποκαταστήματα στη Δυτική Αττική, κάθε ένα από τα οποία απασχολεί 4 άτομα. Αν κάθε υπάλληλος εργάζεται σε αυτό 4 ώρες ημερησίως και για κάθε ώρα πληρώνεται 8€, πόσο θα είναι το κόστος για μισθοδοσία και για τις τέσσερις εταιρείες;

Οι τέσσερις εταιρείες έχουν συνολικά $4 \cdot 4 = 4^2$ υποκαταστήματα. Όλοι οι υπάλληλοι θα είναι $4 \cdot 4^2 = 4^3$ και οι συνολικές ώρες που εργάζονται σε αυτά ημερησίως θα είναι $4^3 \cdot 4 = 4^4$. Το κόστος της μισθοδοσίας θα το υπολογίσω πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό των συνολικών ωρών που εργάζονται οι υπάλληλοι ημερησίως, με το ποσό των χρημάτων που αμοίβονται για την κάθε ώρα.

$4 \cdot 4 = 4^2 = 16$

$4^2 \cdot 4 = 16 \cdot 4 = 64$

$4^3 \cdot 4 = 4^4 = 256$

$256 \times 8 = 2.048€$

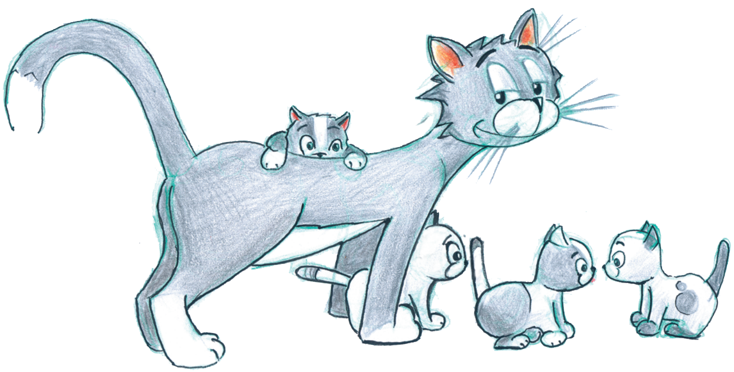
Απάντηση: Το κόστος της μισθοδοσίας και για τις τέσσερις εταιρείες ανέρχεται στο ποσό των 2.048€.

Απάντηση προβλήματος 1 τετρ. εργασιών, σελ. 39

Αρχικά, θα υπολογίσω την ποσότητα των τραπεζιών ($4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$) και στη συνέχεια την ποσότητα των καρεκλών ($4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$).
Γνωρίζοντας πόσο κοστίζει η μία καρέκλα και το ένα τραπέζι θα υπολογίσω το συνολικό κόστος.

Ο αριθμός των τραπεζιών είναι:	$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$
Άρα για τα τραπέζια η εταιρεία θα ξοδέψει:	$64 \cdot 80 = 5.120$€
Οι καρέκλες είναι:	$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$
Κάθε καρέκλα κοστίζει 60€, επομένως για τις καρέκλες θα ξοδέψει:	$256 \cdot 60 = 15.360$€
Το συνολικό κόστος για την αγορά των τραπεζιών και των καρεκλών είναι:	$15.360 + 5.120 = 20.480$€

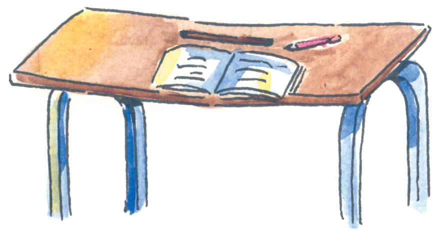
Απάντηση: Το συνολικό κόστος είναι 20.480€.



Δυνάμεις

Πρόβλημα 2

Πόσο θα κοστίσει η ανακαίνιση σε 5 αίθουσες ανά όροφο, ενός πενταόροφου σχολείου όταν σε κάθε αίθουσα θα πρέπει να μπουν 5 νέα θρανία και 5 καρέκλες; Το κόστος του ενός θρανίου είναι 100€ και της μιας καρέκλας 25€.



Αρχικά θα υπολογίσω την ποσότητα των θρανίων ($5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$) και στη συνέχεια την ποσότητα των καρεκλών ($5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$).
Γνωρίζοντας πόσο κοστίζει η μία καρέκλα και το ένα θρανίο, θα υπολογίσω το συνολικό κόστος.

Ο αριθμός των θρανίων θα είναι: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$
Άρα για τα θρανία θα ξοδέψει το σχολείο: $125 \cdot 100 = 1.250$€
Η ποσότητα των καρεκλών είναι: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$
Η κάθε καρέκλα κοστίζει 25€,
επομένως για τις καρέκλες θα ξοδέψουν: $625 \cdot 25 = 15.625$€
Το συνολικό κόστος για την αγορά
των θρανίων και των καρεκλών θα είναι: $15.625 + 1.250 = 16.875$€

Απάντηση: Το συνολικό κόστος είναι 16.875€.

Δυνάμεις

Απάντηση προβλήματος 2 τετρ. εργασιών, σελ. 40

Ο αριθμός των τζαμιών θα υπολογιστεί ως εξής:
Οι έξι πολυκατοικίες έχουν 6 ορόφους η καθεμία.
Συνολικά **οι όροφοι είναι 6^2**.
Κάθε όροφος είχε 6 διαμερίσματα.
Επομένως **τα διαμερίσματα είναι 6^3**.
Κάθε διαμέρισμα έχει 6 παράθυρα,
άρα συνολικά **τα παράθυρα είναι 6^4**.
Κάθε παράθυρο έχει 6 τζάμια, άρα **τα τζάμια είναι 6^5**.

$6^5 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 7.776.$

Απάντηση: Συνολικά θα καθαρίσουν 6^5 τζάμια,
δηλαδή 7.776.

Πρόβλημα 3

Ένας μηχανικός πρόκειται να αγοράσει πόρτες για ένα συγκρότημα πέντε πενταόροφων πολυκατοικιών. Ο κάθε όροφος έχει πέντε διαμερίσματα και το κάθε διαμέρισμα πέντε πόρτες. Πόσες πόρτες θα αγοράσει συνολικά;

λύση

$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$ πόρτες

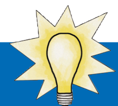
Δραστηριότητα του τετραδίου εργασιών, σελ. 40

Ο κύβος πλευράς 4 εκατοστών έχει όγκο $4 \cdot 4 \cdot 4=64$ κυβικά εκατοστά.
Διπλασιάζοντας την πλευρά ο όγκος οχταπλασιάζεται ($8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ κυβικά εκατοστά).
Για να διπλασιαστεί ο αρχικός κύβος, να γίνει δηλαδή 128 κ.εκ., πρέπει να βρεθεί ένας αριθμός ο οποίος, αν υψωθεί στην τρίτη δύναμη, να μας δώσει 128.
Παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να βρούμε αριθμό ο οποίος υψωμένος στην τρίτη να μου δώσει 128.
Το πρόβλημα δεν έχει λύση.

18. Δυνάμεις του 10

Χρησιμοποιώντας τις δυνάμεις του 10, μπορούμε να γράψουμε με σύντομο τρόπο πολύ μεγάλους αριθμούς.
Δυνάμεις του 10
Κάθε δύναμη του 10 είναι ίση με τον αριθμό που σχηματίζεται από το ψηφίο 1 και τόσα μηδενικά όσες μονάδες έχει ο εκθέτης. Μπορούμε να γράψουμε τους αριθμούς 10, 100, 1000, ...ως δυνάμεις με βάση το 10 βάζοντας ως εκθέτη τον αριθμό που δείχνει πόσα μηδενικά έχουν.

Για να γράψουμε έναν πολυψήφιο αριθμό, με τη βοήθεια των δυνάμεων του 10 κάνουμε τα εξής:
α. *Τον μετατρέπουμε σε γινόμενο με το 10, 100, 1000, ... ανάλογα με τον αριθμό των 0 που υπάρχουν στον αριθμό.*
β. *Μετατρέπουμε το 10, 100, 1000, ... σε δύναμη του 10*
γ. *Ο πολυψήφιος αριθμός έχει τώρα τη μορφή γινομένου του οποίου ο δεύτερος παράγοντας είναι δύναμη του 10.*



Απάντηση άσκησης 1 τετρ. εργασιών, σελ. 41

Κάθε δύναμη του **10** είναι ίση με τον αριθμό που σχηματίζεται από το ψηφίο **1** και τόσα **μηδενικά** όσες μονάδες έχει ο **εκθέτης**.

$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$

$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$

$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$

$10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100.000$

$10^6 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000.000$

$10^7 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000.000$

Άσκηση 1

Συμπλήρωσε τον πίνακα μετατρέποντας τους πολυψήφιους αριθμούς με τη βοήθεια των δυνάμεων του 10:

ΑΡΙΘΜΟΙ	4.000.000	35.000.000	770.000	13.000.000	3.400.000
ΜΕ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΟΥ 10					

Δυνάμεις του 10

λύση

ΑΡΙΘΜΟΙ	4.000.000	35.000.000	770.000	13.000.000	3.400.000
ΜΕ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΟΥ 10	$4 \cdot 10^6$	$3{,}5 \cdot 10^7$	$7{,}7 \cdot 10^5$	$1{,}3 \cdot 10^7$	$3{,}4 \cdot 10^6$

Απάντηση άσκησης 2 τετρ. εργασιών, σελ. 41

ΑΡΙΘΜΟΙ	5.000.000	250.000.000	880.000	170.000.000	1.200.000
ΜΕ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΟΥ 10	$5 \cdot 10^6$	$2{,}5 \cdot 10^8$	$8{,}8 \cdot 10^5$	$1{,}7 \cdot 10^8$	$1{,}2 \cdot 10^6$

Άσκηση 2

Να γράψεις τους παρακάτω αριθμούς α. με όλα τα ψηφία και β. με τη βοήθεια των δυνάμεων του 10.

Δεκατρία τρισεκατομμύρια: α.. β. ....

Επτά εξάκις εκατομμύρια: α.. β. ....

Εβδομήντα έξι τετράκις εκατομμύρια: α.. β. ....

λύση

Δεκατρία τρισεκατομμύρια: α. 13.000.000.000.000 β. $1{,}3 \cdot 10^{13}$

Επτά εξάκις εκατομμύρια: α. 7.000.000.000.000.000.000.000 β. $7 \cdot 10^{21}$

Εβδομήντα έξι τετράκις εκατομμύρια: α. 76.000.000.000.000.000 β. $7{,}6 \cdot 10^{16}$

Απάντηση άσκησης 3 τετρ. εργασιών, σελ. 41

Έντεκα τρισεκατομμύρια:	α. 11.000.000.000.000	β. $1{,}1 \cdot 10^{13}$
Εννιά εξάκις εκατομμύρια:	α. 9.000.000.000.000.000.000.000	β. $9 \cdot 10^{21}$
Ενενήντα οχτώ τετράκις εκατομμύρια:	α. 98.000.000.000.000.000	β. $9{,}8 \cdot 10^{16}$

Απάντηση άσκησης 4 τετρ. εργασιών, σελ. 41

α) Οι ώρες που κάνω μάθημα κάθε μέρα (5 ώρες)
β) Ο μέσος όρος ζώης του ανθρώπου (76 χρόνια)
γ) Η διάρκεια του διαλείμματος (δεκαλέπτου)
δ) Η ηλικία μου (12 χρονών)
ε) Ένας νέος 24 χρονών

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΣΕ ΔΕΥΤΕΡΟΛΕΠΤΑ
$6 \cdot 10^2$
$2{,}4 \cdot 10^9$
$7{,}4 \cdot 10^8$
$1{,}8 \cdot 10^4$
$3{,}7 \cdot 10^8$

Θα υπολογίσουμε πόσα δευτερόλεπτα έχει η ώρα (3.600 δευτ.). Ο χρόνος έχει:

$$365 \cdot 24 \cdot 3600 = 31.536.000, \text{ δηλαδή } 3{,}1 \cdot 10^7 \text{ περίπου.}$$

Έπειτα θα κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς.

Δυνάμεις του 10

Απάντηση άσκησης 4 τετρ. εργασιών, σελ. 41

- Το διάστημα ανάμεσα στους γαλαξίες 10^{23} χμ: 100.000.000.000.000.000.000.000 χμ.
- Το μέγεθος του γαλαξία μας 10^{18} χμ: 1.000.000.000.000.000.000 χμ.
- Το κοντινότερο στη Γη άστρο 10^{13} χμ: 10.000.000.000.000 χμ.
- Το μέγεθος του ηλιακού συστήματος 10^{9} χμ: 1.000.000.000 χμ.
- Το μέγεθος του Ήλιου 10^{6} χμ: 1.000.000 χμ.
- Το μέγεθος της Γης $1{,}2 \cdot 10^{4}$ χμ: 12.000 χμ.

Πρόβλημα 1

Οι επιστήμονες υπολόγισαν ότι, κάποιος ιός αν προσβάλλει έναν άνθρωπο και βρει ικανοποιητικές συνθήκες, μέσα σε 12 ώρες έχει δημιουργήσει αποικία 3.500.000.000 μονάδων. Πόσες μονάδες του ιού θα υπάρχουν στον άνθρωπο, αν αρχίσει την αντιβίωση 3 μέρες, αφού προσβληθεί από τον ιό; Να εκφράσετε τον αριθμό με τη βοήθεια των δυνάμεων του 10.

λύση

Ξέρουμε ότι 3 μέρες είναι 6 δωδεκάωρα. Αφού ο ιός πολλαπλασιάζεται περίπου κατά 3.500.000.000 μονάδες κάθε 12 ώρες, έπειτα από 3 μέρες θα υπάρχουν

$$3.500.000.000 \cdot 6 = 21.000.000.000$$, μονάδες ιού.

Μετατρέπουμε τον αριθμό στο γινόμενο $2{,}1 \cdot 10.000.000.000$

Μετατρέπουμε το 10.000.000.000 στη δύναμη 10^{10}. Ο αριθμός γράφεται τώρα $2{,}1 \cdot 10^{10}$.

Δυνάμεις του 10

Πρόβλημα 2

Ο πληθυσμός της Γης είναι περίπου $7 \cdot 10^9$ άνθρωποι. Γράψε τον αριθμό αυτό στην κανονική μορφή.

λύση

Η δύναμη 10^9 είναι ίση με το 1.000.000.000.

Άρα το γινόμενο $7 \cdot 10^9 = 7 \cdot 1.000.000.000 = 7.000.000.000$.

Απάντηση: Ο πληθυσμός της Γης είναι περίπου 7.000.000.000 άνθρωποι.

Δραστηριότητα του τετραδίου εργασιών, σελ. 42

Θα κάνω τις μετατροπές, γράφοντας τους πολυψήφιους αριθμούς.

Για να γράψουμε έναν πολυψήφιο αριθμό, με τη βοήθεια των δυνάμεων του 10 κάνουμε τα εξής:

α. Τον μετατρέπουμε σε γινόμενο με το 10, 100, 1000, ... ανάλογα με τον αριθμό των 0 που υπάρχουν στον αριθμό.

β. Μετατρέπουμε το 10, 100, 1000, ... σε δύναμη του 10

γ. Ο πολυψήφιος αριθμός έχει τώρα τη μορφή γινομένου του οποίου ο δεύτερος παράγοντας είναι δύναμη του 10.

Μπορούμε να γράψουμε τους αριθμούς 10, 100, 1000, ... ως δυνάμεις με βάση το 10 βάζοντας ως εκθέτη τον αριθμό που δείχνει πόσα μηδενικά έχουν.

Επομένως θα ισχύουν τα εξής:

Η ταχύτητα του φωτός θα είναι:	$3 \cdot 10^5$ χμ/δευτερόλεπτο ή 18.000.000 χμ/λεπτό
Από τον Ήλιο ως τη γη το φως χρειάζεται:	150.000.000 :18.000.000 = 8,33 λεπτά
Τέλος, το έτος φωτός σε χιλιόμετρα:	$(300.000 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365) = 9.460.800.000.000$ χμ.

Κριτήριο αξιολόγησης

Άσκηση 1

Υπολόγισε τις πρώτες δυνάμεις του αριθμού 3.

Άσκηση 2

Συμπλήρωσε τον πίνακα με τους αριθμούς και τα τετράγωνά τους:

ΑΡΙΘΜΟΙ ▶ / ΔΥΝΑΜΗ ▼											
ΑΡΙΘΜΟΣ^2											
ΑΡΙΘΜΟΣ^3	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1.000

Άσκηση 3

Να βρεις:

α. Το διπλάσιο και το τετράγωνο του 6.
β. Το τριπλάσιο και τον κύβο του 5.
γ. Το διπλάσιο και το τετράγωνο του αριθμού 7.

Άσκηση 4

Γράψε με τη μορφή δύναμης τα παρακάτω γινόμενα	**Ανάλυσε τους αριθμούς και γράψε τους με τη μορφή δύναμης.**	
$15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15$ $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$	216 256	729 512

Κριτήριο αξιολόγησης

Άσκηση 5

Κάνε με το νου σου τις παρακάτω διαιρέσεις και σημείωσε με ένα ✓ αυτές που είναι τέλειες:

96 : 2	96 : 3	96 : 4	96 : 5	96: 6	96 : 7	96 : 8	96 : 9
65 : 2	65 :3	65 :4	65 : 5	65 : 6	65 : 7	65 : 8	65 : 9

Γράψε όλους τους διαιρέτες:

- **Για το 96:**..
- **Για το 65:**..

Άσκηση 6

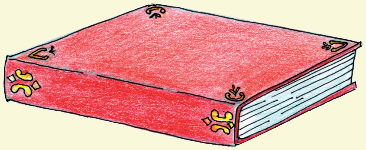
Ποιός είναι ο μικρότερος αριθμός που μπορεί να διαιρεθεί με τους αριθμούς 4, 5, 6;

Άσκηση 7

Ποιο είναι το Ε.Κ.Π. των αριθμών 5, 12 και 15;

Πρόβλημα 1

Ο Νίκος θέλει να τοποθετήσει 125 βιβλία σε μια βιβλιοθήκη. Κάθε ράφι χωράει μέχρι 6 βιβλία. Πόσα το πολύ βιβλία μπορεί να βάλει ώστε να χρησιμοποιήσει τα λιγότερα ράφια και σε όλα να υπάρχει ο ίδιος αριθμός βιβλίων;



Πρόβλημα 2

Ένας ανθοπώλης φτιάχνει ανθοδέσμες με 5, 7 ή 9 λουλούδια χωρίς να περισσεύει κανένα. Πόσα λουλούδια χρησιμοποίησε γνωρίζοντας ότι δεν είχε περισσότερα από 400 λουλούδια;

19. Κλάσματα ομώνυμα και ετερώνυμα

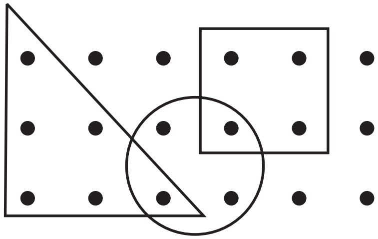
Άσκηση 1

Παρατήρησε το παρακάτω σχήμα και απάντησε τι μέρος του όλου είναι οι τελείες που βρίσκονται:

α) Έξω από το τρίγωνο

β) Έξω από το τρίγωνο, τον κύκλο και το τετράγωνο

γ) Μέσα στον κύκλο



λύση

α) Μέσα στο τρίγωνο έχω 6 τελείες άρα $\frac{6}{18}$,

οπότε έξω από το τρίγωνο έχω 18 - 6 = 12 τελείες δηλαδή το $\frac{12}{18}$ του όλου.

β) Μέσα στο τρίγωνο, τον κύκλο και το τετράγωνο έχω 12 τελείες, άρα έξω από αυτά τα σχήματα έχω 18 - 12 = 6 τελείες, δηλαδή το $\frac{6}{18}$ του όλου.

γ) Μέσα στον κύκλο έχω 4 τελείες, δηλαδή το $\frac{4}{18}$ του όλου.

Ο αριθμός που δηλώνει το μέρος ενός "όλου" ονομάζεται **κλάσμα**. Το κλάσμα σχηματίζεται από δύο φυσικούς αριθμούς, τον **αριθμητή** και τον **παρονομαστή**, που χωρίζονται μεταξύ τους από την κλασματική γραμμή με τη μορφή:

$$\frac{\textbf{αριθμητής}}{\textbf{παρονομαστής}}$$

Απάντηση άσκησης 1 τετρ. εργασιών β, σελ. 7

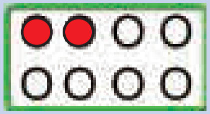
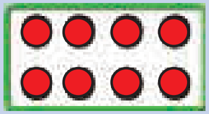
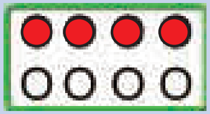
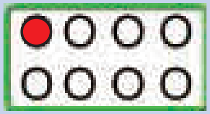
α) Μέσα στον κύκλο: $\frac{6}{24}$

β) Έξω από το ορθογώνιο: $\frac{12}{24}$

γ) Μέσα στον κύκλο και στο ορθογώνιο: $\frac{16}{24}$

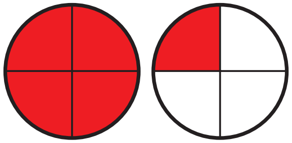
δ) Έξω από τον κύκλο και το ορθογώνιο: $\frac{8}{24}$

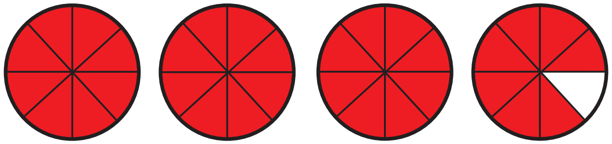
Απάντηση άσκησης 2 τετρ. εργασιών β, σελ. 7

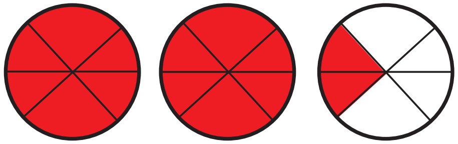
$\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$  $\frac{4}{4}=\frac{8}{8}$  $\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$  $\frac{1}{8}$ 

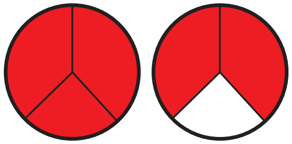
Άσκηση 2

Να γράψετε τα σκιασμένα μέρη του παρακάτω σχήματος σε μορφή κλάσματος και μεικτών αριθμών.

Α) 

Β) 

Γ) 

Δ) 

λύση

Α) $\frac{4}{4}+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{4}=1\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

Β) $\frac{8}{8}+\frac{8}{8}+\frac{8}{8}+\frac{7}{8}=1+1+1+\frac{7}{8}=3+\frac{7}{8}=3\frac{7}{8}=\frac{31}{8}$

Γ) $\frac{6}{6}+\frac{6}{6}+\frac{2}{6}=1+1+\frac{2}{6}=2+\frac{2}{6}=2\frac{2}{6}=\frac{14}{6}$

Δ) $\frac{3}{3}+\frac{2}{3}=1+\frac{2}{3}=1\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$

Κλάσματα ομώνυμα και ετερώνυμα

Απάντηση άσκησης 3 τετρ. εργασιών β, σελ. 7

Όταν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι ίσος με τον παρονομαστή, το κλάσμα είναι ίσο με το 1.

Α) $\frac{3}{3}+\frac{3}{3}+\frac{3}{3}+\frac{2}{3}=1+1+1+\frac{2}{3}=3\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$

Β) $\frac{2}{2}+\frac{2}{2}+\frac{2}{2}+\frac{1}{2}=1+1+1+\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

Γ) $\frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{4}{4}+\frac{3}{4}=1+1+1+\frac{3}{4}=3\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$

Δ) $\frac{3}{3}+\frac{3}{3}+\frac{3}{3}+\frac{1}{3}=1+1+1+\frac{1}{3}=3\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$

Απάντηση προβλήματος 1 τετρ. εργασιών β, σελ. 7

Επειδή θέλω να φτιάξω στίβες από τα νομίσματα των 20 λεπτών, οι οποίες θα αποτελούνται από ίσο αριθμό κερμάτων, οι αριθμοί που διαιρούν ακριβώς το 20 είναι: 1, 2, 4, 5, 10, 20.

- **20 : 1 = 20 → το $\frac{1}{1}$ του 20,**
- **20 : 2 = 10 → το $\frac{1}{2}$ του 20,**
- **20 : 4 = 5 → το $\frac{1}{4}$ του 20,**
- **20 : 5 = 4 → το $\frac{1}{5}$ του 20,**
- **20 : 10 = 2 → το $\frac{1}{10}$ του 20,**
- **20 : 20 = 1 → το $\frac{1}{20}$ του 20,**

Φτιάχνω τον παρονομαστή 100, οπότε θα έχω:

- **το $\frac{1}{1}$ του 20 = $\frac{100}{100}$,**
- **το $\frac{1}{5}$ του 20 = $\frac{20}{100}$,**
- **το $\frac{1}{2}$ του 20 = $\frac{50}{100}$,**
- **το $\frac{1}{10}$ του 20 = $\frac{10}{100}$,**
- **το $\frac{1}{4}$ του 20 = $\frac{25}{100}$,**
- **το $\frac{1}{20}$ του 20 = $\frac{5}{100}$,**

Κλάσματα ομώνυμα και ετερώνυμα

α. $\frac{1}{2}$ του 20 = 10 $\rightarrow$ $\frac{10}{20} = \frac{50}{100} = 0{,}5$ $\quad$ $\frac{1}{4}$ του 20 = 5 $\rightarrow$ $\frac{5}{20} = \frac{25}{100} = 0{,}25$

$\frac{1}{10}$ του 20 = 2 $\rightarrow$ $\frac{2}{20} = \frac{10}{100} = 0{,}1$ $\quad$ $\frac{1}{20}$ του 20 = 1 $\rightarrow$ $\frac{1}{20} = \frac{5}{100} = 0{,}05$

$\frac{1}{5}$ του 20 = 4 $\rightarrow$ $\frac{4}{20} = \frac{20}{100} = 0{,}2$ $\quad$ $\frac{1}{1}$ του 20 = 20 $\rightarrow$ $\frac{20}{20} = \frac{100}{100} = 1{,}0$

Πρόβλημα 1

Ο παππούς έδωσε από ένα παγωτό 150 γραμμαρίων στις τρεις εγγονές του. Η Αρετή έφαγε τα $\frac{3}{5}$ του δικού της παγωτού, η Καίτη έφαγε τα $\frac{2}{3}$ του δικού της και η Μαρία το $\frac{1}{2}$ του δικού της. Πόσα γραμμάρια έφαγε το καθένα από τα τρία κορίτσια;

Θα υπολογίσω πόσα γραμμάρια παγωτού έφαγε η Αρετή, πόσα η Καίτη και πόσα έφαγε η Μαρία. Γνωρίζω ότι όλες είχαν την ίδια ποσότητα παγωτού. Ξέροντας το μέρος του όλου που έφαγε η καθεμία, υπολογίζω τα γραμμάρια παγωτού που έφαγε το κάθε κορίτσι.

Η Αρετή έφαγε τα $\frac{3}{5}$ των 150 γραμμαρίων.
Δηλαδή αν χώριζε το παγωτό της σε 5 μέρη έφαγε τα:
3 x 150 : 5 = 30 γραμμ., 30 · 3 = 90 γραμμ.
Η Καίτη έφαγε τα $\frac{2}{3}$ των 150 γραμμ.
Δηλαδή αν χώριζε το παγωτό σε 3 μέρη έφαγε τα 2.
150 : 3 = 50 γραμμ., 50 · 2 = 100 γραμμ.
Η Μαρία έφαγε $\frac{1}{2}$ των 150 γραμμ.
Δηλαδή αν χώριζε το παγωτό σε 2 μέρη έφαγε το 1.
150 : 2 = 75 γραμμ., 75 · 1 = 75 γραμμ.

Απάντηση:

Η Αρετή έφαγε 90 γραμμάρια από το παγωτό της. Η Καίτη έφαγε 100 γραμμάρια, ενώ η Μαρία έφαγε 75 γραμμάρια.

Κλάσματα ομώνυμα και ετερώνυμα

Απάντηση προβλήματος 2 τετρ. εργασιών β, σελ. 8

Θα υπολογίσω πόσα γραμμάρια σοκολάτας έφαγε η Μαρία και πόσα γραμμάρια σοκολάτας έφαγε η Πόπη. Γνωρίζω ότι και οι δύο είχαν αρχικώς ίδια ποσότητα σοκολάτας. Ξέροντας το μέρος του όλου που έφαγε η καθεμία, υπολογίζω τα γραμμάρια σοκολάτας που έφαγε το κάθε ένα από τα δύο κορίτσια.

Η Μαρία έφαγε τα $\frac{3}{8}$ των 120 γραμμαρίων. Δηλαδή αν χώριζε τη σοκολάτα της σε 8 μέρη, έφαγε τα 3 x 120 : 8 = 15 γραμμ., 15 · 3 = 45 γραμμ.

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι η Πόπη έφαγε: 120 : 3 = 40 γραμμ., 40 · 1 = 40 γραμμ.

Απάντηση: Η Μαρία έφαγε 45 γραμμάρια από τη σοκολάτα της, ενώ η Πόπη 40 γραμμάρια.

Απάντηση προβλήματος 3 τετρ. εργασιών β, σελ. 8

Όταν ο αριθμητής ενός κλάσματος είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή, το κλάσμα είναι μεγαλύτερο από το 1.
Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να χωρίσουμε τις ακέραιες μονάδες και να μετατρέψουμε το κλάσμα σε **μεικτό αριθμό**.
Αφού λοιπόν μετατρέψω σε μεικτό αριθμό τον αριθμό που δείχνει την απόσταση του σπιτιού της Νίνας από το κολυμβητήριο, θα συγκρίνω τις δύο αποστάσεις, δηλαδή της απόστασης του σπιτιού της Νίνας και της απόστασης του σπιτιού του Βαγγέλη από το κολυμβητήριο και θα δω πιο παιδί μένει πιο κοντά στο κολυμβητήριο.

Η Νίνα μένει $\frac{10}{8} = \frac{8}{8} + \frac{2}{8} = 1\frac{2}{8}$ **χλμ.** από το καλυμβητήριο.

Επειδή $1\frac{2}{8} > 1\frac{1}{8}$, το σπίτι του Βαγγέλη απέχει μικρότερη απόσταση από το κολυμβητήριο.

Απάντηση: Ο Βαγγέλης μένει πιο κοντά στο κολυμβητήριο.

Κλάσματα ομώνυμα και ετερώνυμα

Πρόβλημα 2

Σε ένα κατάστημα παπουτσιών υπάρχουν 250 ζευγάρια παπούτσια. Τα $\frac{3}{5}$ των παπουτσιών είναι αθλητικά, ενώ από αυτά το $\frac{1}{3}$ είναι αποκλειστικά για μικρά παιδιά. Πόσα ζευγάρια αθλητικά παπούτσια είναι για παιδιά;

Όλα τα ζευγάρια παπούτσια είναι 250. Από αυτά τα $\frac{3}{5}$ είναι αθλητικά, δηλαδή αν τα παπούτσια τα χωρίσω σε 5 ομάδες θα πάρω τις 3. Επίσης, από τα αθλητικά παπούτσια το $\frac{1}{3}$ είναι αποκλειστικά για παιδιά. Κάνω τις πράξεις και υπολογίζω τα ζητούμενα.

250 : 5 = 50

50 x 3 = 150

(150 : 3) x 1 = 50 αθλητικά παπούτσια

Κλάσματα ομώνυμα και ετερώνυμα

Απάντηση προβλήματος 4 τετρ. εργασιών β, σελ. 8

Όλοι οι μαθητές είναι 126. Από αυτούς τα $\frac{3}{7}$ των μαθητών φορούν γυαλιά, δηλαδή αν τους μαθητές τους χωρίσω σε 7 ομάδες θα πάρω τις 3. Επίσης, από τους μαθητές αυτούς τα $\frac{5}{9}$ είναι αγόρια. Κάνω τις πράξεις και υπολογίζω τα ζητούμενα.

126 : 7 = 18

18 · 3 = 54 μαθητές

(54 : 9) · 5 = 30 αγόρια

Απάντηση: 54 μαθητές φορούν γυαλιά, από τους οποίους οι 30 είναι αγόρια.

Δραστηριότητα του τετραδίου εργασιών β, σελ. 8

- Το Α4 είναι το διπλάσιο του Α5 $\frac{A5}{A4} = \frac{1}{2}$
- Το Α5 είναι το διπλάσιο του Α6 $\frac{A6}{A5} = \frac{1}{2}$
- Το Α4 είναι το διπλάσιο του Α5, το οποίο είναι διπλάσιο του Α6, άρα $\frac{A6}{A4} = \frac{1}{4}$

20. Το κλάσμα ως ακριβές πηλίκο διαίρεσης

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να εκφράσετε τις διαιρέσεις με κλάσματα και αν γίνεται να απλοποιηθούν.

α) 3 : 4 =.........   β) 5 : 100 = ...   γ) 16 : 10 = ...   δ) 8 : 28 =.........

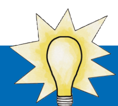
λύση

α) $3 : 4 = \frac{3}{4}$

β) $5 : 100 = \frac{5}{100} = \frac{5 : 5}{100 : 5} = \frac{1}{20}$

γ) $16 : 10 = \frac{16}{10} = \frac{16 : 2}{10 : 2} = \frac{8}{5}$

δ) $8 : 28 = \frac{8}{28} = \frac{8 : 4}{28 : 4} = \frac{2}{7}$



Απάντηση άσκησης 1 τετρ. εργασιών β, σελ. 9

α) $3 : 5 = \frac{3}{5}$

β) $8 : 1.000 = \frac{8 : 8}{1.000 : 8} = \frac{1}{125}$

γ) $20 : 50 = \frac{20 : 10}{50 : 10} = \frac{2}{5}$

δ) $1 : 3 = \frac{1}{3}$

Το κλάσμα εκφράζει το ακριβές **πηλίκο** μιας διαίρεσης: της διαίρεσης του αριθμητή με τον παρονομαστή του.

Το κλάσμα ως ακριβές πηλίκο διαίρεσης

Άσκηση 2

Να εκφράσετε τα κλάσματα με διαιρέσεις και να τις κάνεις.

α) $\frac{1}{5}$ **β)** $\frac{63}{9}$ **γ)** $\frac{1}{8}$ **δ)** $\frac{15}{8}$

λύση

Α) $\frac{1}{5} = 1:5 = 0,2$

διότι:

```
  1 | 5
 10 | 0,2
-10 |
  0 |
```

Β) $\frac{63}{9} = 7$

διότι:

```
 63 | 9
-63 | 7
  0 |
```

Γ) $\frac{1}{8} = 1:8 = 0,125$

διότι:

```
  1 | 8
 10 | 0,125
- 8 |
 20 |
-16 |
 40 |
-40 |
  0 |
```

Δ) $\frac{15}{8} = 15:8 = 1,875$

διότι:

```
 15 | 8
- 8 | 1,875
 70 |
-64 |
 60 |
-56 |
 40 |
-40 |
  0 |
```

Απάντηση άσκησης 2 τετρ. εργασιών β, σελ. 9

3 : 25 = 0,12

```
  3 | 25
 30 | 0,12
-25 |
 50 |
-50 |
  0 |
```

1 : 25 = 0,04

```
   1 | 25
  10 | 0,04
 100 |
-100 |
   0 |
```

18 : 3 = 6

```
 18 | 3
-18 | 6
  0 |
```

45 : 72 = 0,625

```
  45 | 72
 450 | 0,625
-432 |
 180 |
-144 |
 360 |
-360 |
   0 |
```

Το κλάσμα ως ακριβές πηλίκο διαίρεσης

Απάντηση άσκησης 3 τετρ. εργασιών β, σελ. 9

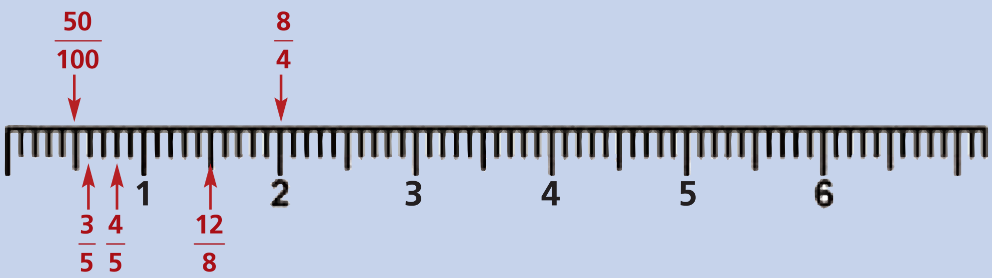
Οι δεκαδικοί αριθμοί γράφονται ως κλάσματα με παρονομαστή το 10, το 100, το 1000, ... ανάλογα με τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων που έχουν και το αντίστροφο.

$\frac{73}{100} = \boxed{\checkmark}\ 0{,}73 \qquad \frac{730}{1.000} = \boxed{\checkmark}\ 0{,}73 \qquad \frac{531}{100} = \boxed{\checkmark}\ 5{,}31 \qquad \frac{531}{1.000} = \boxed{\checkmark}\ 0{,}531$

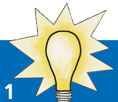
Απάντηση άσκησης 4 τετρ. εργασιών β, σελ. 9

Μετατρέπω τα κλάσματα σε δεκαδικούς για να μπορώ ευκολότερα να τοποθετήσω στην αριθμογραμμή τα μήκη. Οπότε:

$\frac{4}{5}$μ. = 0,8μ. $\quad \frac{8}{4}$μ. = 2μ. $\quad \frac{50}{100}$μ. = 0,5μ. $\quad \frac{12}{8}$μ. = 1,5μ. $\quad \frac{3}{5}$μ. = 0,6μ.



Το κλάσμα ως ακριβές πηλίκο διαίρεσης



Απάντηση προβλήματος 1 τετρ. εργασιών β, σελ. 9

Για κάθε ψωμάκι ο φούρνος χρειάζεται $\frac{4}{10}$ του κιλού αλεύρι. Θα κάνω τη διαίρεση και με μετατροπή θα βρω πόσα γραμμάρια αλεύρι που χρειάζεται ο φούρνος.

$\frac{4}{10}$ = 0,4 κιλά αλεύρι

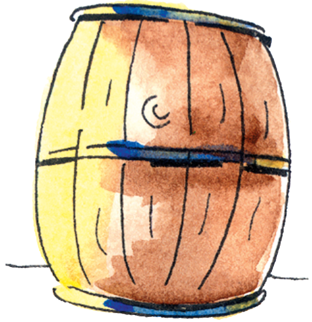
Το 1 κιλό αλεύρι είναι 1.000 γραμμάρια.

0,4 · 1.000 = 400 γραμμ. αλεύρι.

Απάντηση: **α.** 0,4 κιλά, **β.** 400 γραμμ.

Πρόβλημα 1

Ένα βαρέλι περιέχει 22 λίτρα κρασί. Αν το κρασί μοιραστεί εξίσου σε 6 δοχεία, πόσο κρασί θα χωρέσει κάθε δοχείο; Να εκφράσεις το αποτέλεσμα με δύο τρόπους. Ποιος είναι ο τρόπος που μου δίνει μεγαλύτερη ακρίβεια;



Θα μοιράσω 22 λίτρα κρασί σε 6 ίσες ποσότητες, που η κάθε μία θα μπει σε ένα δοχείο, οπότε θα υπολογίσω την ποσότητα του κάθε δοχείου κάνοντας διαίρεση. Θα γράψω την ποσότητα αυτή με την μορφή κλάσματος και θα συγκρίνω τους δύο τρόπους υπολογισμού ως προς την ακρίβεια.

22 : 6 = 3,66 λίτρα
με ακρίβεια εκατοστού.

ή $\frac{22}{6} = \frac{11}{3}$ σε μορφή κλάσματος

Απάντηση προβλήματος 2 τετρ. εργασιών β, σελ. 10

Θα μοιράσω τα 8 λίτρα σε 3 ίσες ποσότητες, που η κάθε μία θα μπει σε κάθε κανάτα, οπότε θα υπολογίσω την ποσότητα της κάθε κανάτας με διαίρεση. Θα γράψω την ποσότητα αυτή με μορφή κλάσματος και θα συγκρίνω τους δύο τρόπους υπολογισμού ως προς την ακρίβεια.

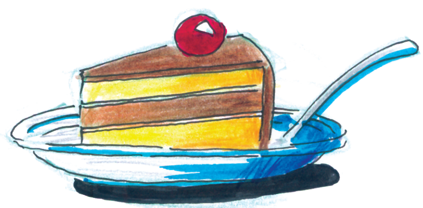
8 : 3 = 2,66 λίτρα νερού με ακρίβεια εκατοστού

ή $\frac{8}{3}$ σε μορφή κλάσματος

Απάντηση: Τα $\frac{8}{3}$ είναι πιο ακριβής τρόπος υπολογισμού, αφού το αποτέλεσμα της παραπάνω διαίρεσης είναι προσεγγιστικό.

Πρόβλημα 2

Η γιαγιά αγόρασε 8 πάστες για τα 4 εγγόνια της. Ήρθε όμως και ένας φίλος τους και έτσι τις μοίρασε σε 5 ίσα μέρη. Πόσο έφαγε κάθε παιδί;



Πρέπει να μοιράσει τις πάστες σε 5 ίσα μέρη. Άρα το κάθε παιδί θα φάει $\frac{8}{5}$ της πάστας.

$\frac{8}{5} = 8 : 5 = 1,6$ της πάστας.

Το κλάσμα ως ακριβές πηλίκο διαίρεσης

Απάντηση προβλήματος 3 τετρ. εργασιών β, σελ. 10

Πρέπει να μοιράσει τις κρέπες σε 4 ίσα μέρη, όσα δηλαδή είναι τα παιδιά. Άρα, το κάθε παιδί θα φάει $\frac{6}{4}$ της κρέπας.

6 : 4 = 1,5 κρέπα

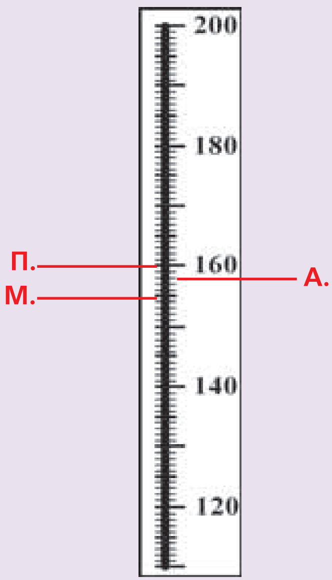
Απάντηση: Το κάθε παιδί θα φάει 1,5 κρέπα.

Δραστηριότητα του τετραδίου εργασιών β, σελ. 10

Πέτρος: $1\frac{15}{25} = \frac{40}{25} = 1{,}6$ μέτρα

Ανδρέας: $1\frac{580}{1.000} = \frac{1.580}{1.000} = 1{,}58$ μέτρα

Μιχάλης: $\frac{155}{100} = 1{,}55$ μέτρα



21. Ισοδύναμα κλάσματα

Απάντηση
άσκησης 1
τετρ. εργασιών β, σελ. 11

Αν **διαιρέσουμε** τους όρους ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό προκύπτει **ισοδύναμο** κλάσμα.

Επειδή $\frac{2:2}{10:2}=\frac{1}{5}$, $\frac{24}{12}=\frac{24:12}{12:12}=2$, $\frac{8:4}{4:4}=2$ και $\frac{9:3}{15:3}=\frac{3}{5}$,

τα ζευγάρια ισοδύναμων είναι: $\frac{9}{5}$ και $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{10}$ και $\frac{1}{5}$, $\frac{24}{12}$ και $\frac{8}{4}$

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να συμπληρωθούν οι ισότητες $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}=\frac{}{}=\frac{}{}=\frac{}{}$
Με ποιόν δεκαδικό αριθμό ισούνται τα κλάσματα;

λύση

Ισοδύναμα κλάσματα του $\frac{1}{4}$ είναι τα εξής:

$\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 2}{4\cdot 2}=\frac{2}{8}$, $\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{3}{12}$, $\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 4}{4\cdot 4}=\frac{4}{16}$, $\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{5}{20}$

Άρα $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}=\frac{3}{12}=\frac{4}{16}=\frac{5}{20}$

Το κλάσμα είναι ίσο με 0,25.

Ισοδύναμα κλάσματα

Απάντηση άσκησης 2 τετρ. εργασιών β, σελ. 11

Αν **πολλαπλασιάσουμε** τους όρους ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό προκύπτει **ισοδύναμο** κλάσμα με το αρχικό.

Άρα: $\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{4}{10}$, $\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 3}=\frac{6}{15}$, $\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 4}{5\cdot 4}=\frac{8}{20}$, $\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 5}{5\cdot 5}=\frac{10}{25}$, $\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 6}{5\cdot 6}=\frac{12}{30}$

Άρα: $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{6}{15}=\frac{8}{20}=\frac{10}{25}=\frac{12}{30}$ **Αυτά τα κλάσματα είναι ίσα με το 0,4.**

Απάντηση άσκησης 3 τετρ. εργασιών β, σελ. 11

1ος τρόπος

Αν **πολλαπλασιάσουμε** τους όρους ενός κλάσματος με τον ίδιο φυσικό αριθμό, προκύπτει **ισοδύναμο** με το αρχικό κλάσμα.
Παρατήρησα, λοιπόν, κάθε φορά με ποιον αριθμό έχει πολλαπλασιαστεί ή διαιρεθεί ο αριθμητής ή ο παρονομαστής σε κάθε κλάσμα και έκανα το ίδιο για τον παρονομαστή ή τον αριθμητή αντιστοίχως.

Άρα: $\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 4}{2\cdot 4}=\frac{4}{8}$, $\frac{5}{7}=\frac{5\cdot 5}{7\cdot 5}=\frac{25}{35}$, $\frac{36}{54}=\frac{36:6}{54:6}=\frac{6}{9}$, $\frac{7}{28}=\frac{7\cdot 3}{28\cdot 3}=\frac{21}{84}$

2ος τρόπος

Δύο κλάσματα λέγονται ισοδύναμα ή ίσα όταν **εκφράζουν** το ίδιο μέρος του όλου. Αν πολλαπλασιάσουμε “χιαστί” τους όρους δύο ισοδύναμων κλασμάτων, τα δύο γινόμενα που προκύπτουν είναι ίσα μεταξύ τους. (Με τον τρόπο αυτό ελέγχουμε αν δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα.)
πρέπει:

$2\cdot x=8$ **άρα** $x=4$
$7\cdot x=5\cdot 35$ **άρα** $x=25$
$36\cdot x=6\cdot 54$ **άρα** $x=9$
$7\cdot x=21\cdot 28$ **άρα** $x=84$

Άσκηση 2

Να βρεθούν τα ανάγωγα κλάσματα $\frac{2}{7}, \frac{4}{6}, \frac{15}{10}, \frac{9}{8}, \frac{6}{3}, \frac{2}{17}$

λύση

Τα κλάσματα που δεν μπορούν να απλοποιηθούν δηλαδή τα ανάγωγα κλάσματα είναι τα:

τα $\frac{2}{7}, \frac{9}{8}, \frac{2}{17}$ διότι το $\frac{4}{6}=\frac{4:2}{6:2}=\frac{2}{3}$, $\frac{15}{10}=\frac{15:5}{10:5}=\frac{3}{2}$, $\frac{6}{3}=\frac{6:3}{3:3}=\frac{2}{1}=2$

Απάντηση άσκησης 4 τετρ. εργασιών β, σελ. 11

Αν ένα κλάσμα δεν μπορεί να απλοποιηθεί (δεν υπάρχει αριθμός, εκτός από το 1, που να είναι κοινός διαιρέτης του αριθμητή και του παρονομαστή), το κλάσμα λέγεται **ανάγωγο**.

$\frac{11}{7}$ $\frac{5}{18}$ $\frac{7}{20}$ $\frac{2}{9}$

Απάντηση προβλήματος 1 τετρ. εργασιών β, σελ. 11

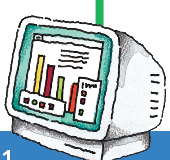
Στο σημείο F το ρεζερβουάρ είναι γεμάτο, άρα εκεί θα έχουμε τα $\frac{4}{4}$ της βενζίνης. Τα $\frac{45}{60}$ είναι $\frac{3}{4}$, αφού $\frac{45:15}{60:15}=\frac{3}{4}$. Αφού λοιπόν έχει καταναλώσει $\frac{3}{4}$, ο δείκτης θα είναι στο $\frac{1}{4}$.

Το $\frac{1}{4}$ των 60 λίτρων θα είναι: **60 : 4 = 15 λίτρα**

Το $\frac{1}{2}$ των 60 λίτρων θα είναι: **60 : 2 = 30 λίτρα**

Το $\frac{3}{4}$ των 60 λίτρων θα είναι **60 : 4 = 15 λίτρα, 15 x 3 = 45 λίτρα**

Απάντηση: 1,5 λίτρα, 30 λίτρα, 45 λίτρα.



Ισοδύναμα κλάσματα

Πρόβλημα 2

Ο Κώστας και η Ηρώ αγόρασαν μία πίτσα ο καθένας. Ο Κώστας έφαγε τα $\frac{12}{16}$ της πίτσας του και η Ηρώ έφαγε τα $\frac{6}{8}$ της δικιάς της πίτσας. Ποιος έφαγε την περισσότερη πίτσα.

λύση

Θα απλοποιήσω τα κλάσματα για να τα συγκρίνω.

Έχω: $\frac{12}{16} = \frac{12:4}{16:4} = \frac{3}{4}$, $\quad \frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$

Αφού τα κλάσματα είναι ισοδύναμα, η Ηρώ και ο Κώστας έφαγαν την ίδια ποσότητα πίτσας.

Απάντηση προβλήματος 2 τετρ. εργασιών β, σελ. 12

Θα χρησιμοποιήσω τη μέθοδο της απλοποίησης και θα συγκρίνω τα κλάσματα που θα προκύψουν.

$\frac{20}{25} = \frac{20:5}{25:5} = \frac{4}{5}$, $\quad \frac{24:6}{30:6} = \frac{4}{5}$

Απάντηση: Οι μαθητές των δύο τμημάτων έγραψαν το ίδιο καλά.

Ισοδύναμα κλάσματα

Δραστηριότητα του τετραδίου εργασιών β, σελ. 12

- Αν τους 25 μαθητές τους χωρίσω σε 5 μέρη, έλειπαν αυτοί που αποτελούν τα 2.
  Άρα 25 : 5 = 5,   5 · 2 = 10 μαθητές
- 30 : 3 = 10,   2 · 10 = 20 μαθητές
- 28 : 7 = 4,   4 · 3 = 12 μαθητές
- 24 : 6 = 4,   4 · 4 = 16 μαθητές
- 26 : 13 = 2,   2 · 3 = 6 μαθητές
- 27 : 9 = 3,   3 · 2 = 6 μαθητές

Συνολικά έλειπαν **10 + 20 + 12 + 16 + 6 + 6 = 70** μαθητές από το σχολείο.