

ΦΥΛΛΟ 5

Δραστηριότητα 1^η

1. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:

α. $\sqrt{a} = x \Leftrightarrow \dots\dots\dots = a$, $a \dots\dots\dots 0$, $x \dots\dots\dots 0$

β. Αν $a \geq 0$, τότε $\sqrt{a} \dots\dots\dots 0$

γ. Αν $a \geq 0$, τότε $(\sqrt{a})^2 = \dots\dots\dots$

δ. Αν $a \in \mathbb{R}$, τότε $\sqrt{a^2} = \dots\dots\dots$

ε.

2. Να χαρακτηρίσετε ως Σ ή Λ καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

α. Αν $a \geq 0$, $b \geq 0$, τότε $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

β. Αν $a \geq 0$, $b \geq 0$, τότε $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

γ. Αν $a \geq 0$, $b > 0$, τότε $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

δ. Αν $a \geq 0$, $b \geq 0$, τότε $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$

ε. Αν $a \geq 0$, $b \geq 0$, τότε $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

Δραστηριότητα 2^η

1. Να βρείτε την πλευρά ενός κύβου του οποίου ο όγκος είναι ίσος με:

• 8 cm^3 • 27 cm^3 • 70 cm^3

2. Έστω n θετικός ακέραιος αριθμός. Η n -οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού a είναι ο μη αρνητικός αριθμός x που όταν υψωθεί στην n δίνει τον αριθμό a .

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow \dots\dots\dots = a, \quad a \dots\dots\dots 0, \quad x \dots\dots\dots 0$$

Δραστηριότητα 3^η

1. Αν $a \dots\dots\dots 0$, τότε $\sqrt[n]{a} \dots\dots\dots 0$

(Να συμπληρώσετε τα κενά με ένα από τα σύμβολα $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $=$)

2. Αν $a \geq 0$, τότε $(\sqrt[n]{a})^n = \dots\dots\dots$

3. • $\sqrt[3]{2^3} = \dots\dots\dots$ • $\sqrt[3]{(-2)^3} = \dots\dots\dots$ • $\sqrt[4]{2^4} = \dots\dots\dots$ • $\sqrt[4]{(-2)^4} = \dots\dots\dots$

Να βγάλετε ένα γενικό συμπέρασμα για τον αριθμό $\sqrt[n]{a^n}$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Δραστηριότητα 4^η

1. Να υπολογίσετε τις ρίζες: • $\sqrt[3]{8} = \dots\dots\dots$ • $\sqrt[3]{27} = \dots\dots\dots$ • $\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \dots\dots\dots$

Να διατυπώσετε μια ιδιότητα που να ισχύει στις n -οστές ρίζες και να την αποδείξετε.

2. Να υπολογίσετε τις ρίζες: • $\sqrt[3]{64} = \dots\dots\dots$ • $\sqrt[3]{8} = \dots\dots\dots$ • $\sqrt[3]{\frac{64}{8}} = \dots\dots\dots$

Να διατυπώσετε μια ιδιότητα που να ισχύει στις n -οστές ρίζες και να την αποδείξετε.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι επόμενες παραστάσεις.

$$\alpha) A = \sqrt{x-3} \quad \beta) B = \frac{2x-8}{\sqrt[5]{15-3x}} \quad \gamma) \Gamma = \frac{\sqrt[3]{3x+12}}{\sqrt[4]{7-x}} \quad \delta) \Delta = \frac{1-x}{\sqrt{9-3x}} + \frac{x}{x+2}$$

$$\epsilon) E = \sqrt{x^2+4x+4}$$

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$\alpha) \sqrt[9]{2^3} \cdot \sqrt[9]{2^5} \cdot \sqrt[9]{2}$$

$$\delta) \frac{\sqrt[5]{a^4 b^2} \cdot \sqrt[5]{a^{12} b^9}}{\sqrt[5]{a b}} \quad \alpha, \beta > 0$$

$$\zeta) \sqrt[3]{\frac{27}{a^{15} b^{18}}}, \quad \alpha, \beta > 0$$

$$\beta) \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{27}}$$

$$\epsilon) \sqrt[4]{a^{12} b^8}, \quad \alpha, \beta \geq 0$$

$$\gamma) \frac{\sqrt[5]{3^6} \cdot \sqrt[5]{3^8}}{\sqrt[5]{3^9}}$$

$$\sigma\tau) \sqrt[4]{16 a^8 b^{-20}}, \quad \alpha \geq 0, \beta > 0$$

3. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$\alpha) \sqrt{50} - \sqrt{18} - \sqrt{8}$$

$$\delta) \frac{\sqrt{32} + \sqrt{50} + \sqrt{98}}{\sqrt{2}}$$

$$\sigma\tau) \frac{\sqrt{18} + \sqrt{32} + \sqrt{50}}{\sqrt{72} - \sqrt{8}}$$

$$\beta) \sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{75}$$

$$\gamma) (\sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{18})\sqrt{8} \quad \epsilon) (\sqrt{20} + \sqrt{45})(\sqrt{80} - \sqrt{5}) \quad \zeta) \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16}$$

4. Να απλοποιήσετε τις επόμενες παραστάσεις :

$$\alpha) \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} \quad \beta) \sqrt[3]{8(3-\sqrt{5})^3} \quad \gamma) \sqrt[4]{16(\sqrt{7}-3)^4}$$

5. Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$\alpha) A = \sqrt{16y^2} - \sqrt{25x^2}, \quad x < 0 < y \quad \beta) B = \sqrt{x^2} + 2x$$

$$\gamma) \Gamma = \sqrt{x^2 y^4} + 2xy^2$$

$$\delta) \Delta = \sqrt{x^2} - \sqrt{x^2 - 2x + 1}, \quad 0 < x < 1$$

6. Να βρείτε τις τιμές των επόμενων παραστάσεων :

$$\alpha) A = \sqrt{5 + \sqrt{13 + \sqrt{9}}}$$

$$\epsilon) E = \sqrt[3]{25 + \sqrt{2 + \sqrt[3]{8}}}$$

$$\beta) B = \sqrt[3]{2\sqrt{8}\sqrt{4}}$$

$$\sigma\tau) Z = \sqrt{19 - \sqrt[3]{29 - \sqrt[4]{16}}}$$

$$\gamma) \Gamma = \sqrt[3]{35 - 2\sqrt{11 + \sqrt{25}}}$$

$$\zeta) H = \sqrt{\frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt{4}}} + \sqrt[3]{27}$$

$$\delta) \Delta = \sqrt{3} \cdot \sqrt{(\sqrt{27} - \sqrt{12}) \cdot \sqrt{3}}$$

$$\eta) \Theta = \sqrt{18^4 \sqrt[3]{8}}$$

7. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\alpha) \sqrt{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$\delta) (\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}})^2$$

$$\beta) \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4 - 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{4 + 2\sqrt{3}}$$

$$\epsilon) \sqrt[3]{3(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 (7 - 2\sqrt{10})}$$

$$\gamma) (\sqrt{2} - 1)^2 (2\sqrt{2} + 3)$$

$$\sigma\tau) \sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

8. α) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις $(3 + \sqrt{2})^2$ και $(1 - \sqrt{2})^2$.
 β) Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$.
9. α) Να βρείτε τα αναπτύγματα $(\sqrt{3} + 2)^2$ και $(\sqrt{3} - 2)^2$.
 β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = (\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}) \cdot \sqrt{3}$.
10. Να αποδείξετε ότι :
 α) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = -1$
 β) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{28 + 10\sqrt{3}} + \sqrt{28 - 10\sqrt{3}} = 14$
11. α) Να βρείτε τα αναπτύγματα $(2 + \sqrt{3})^3$ και $(2 - \sqrt{3})^3$.
 β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = (\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} - \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}) \cdot \sqrt{27}$.
12. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt[4]{2^3 \sqrt{2} \sqrt{2^7}} \cdot \sqrt[8]{8}$ και $\beta = \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1} \cdot \sqrt[6]{2\sqrt{2} + 3}$.
 α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β .
 β) Αν $x = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}}}$, $y = \sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}}$ και $\omega = \sqrt{\alpha - \sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}}}$, να υπολογίσετε το γινόμενο $x\omega$.
13. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή .
 α) $\frac{10}{\sqrt{5}}$ β) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ γ) $\frac{12}{\sqrt[8]{9^5}}$ δ) $\frac{6}{5\sqrt[7]{3^5}}$ ε) $\frac{20}{\sqrt[5]{6^3} \cdot \sqrt[4]{5}}$
 στ) $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ ζ) $\frac{1}{3\sqrt{2} + 2}$ η) $\frac{6}{4\sqrt{3} - 5\sqrt{2}}$ θ) $\frac{12}{\sqrt[6]{2^5} \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{6})}$
14. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} - \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{7}}$.
15. Να υπολογίσετε την παράσταση $A = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$.
16. Να συγκρίνετε τους επόμενους αριθμούς :
 α) $\sqrt{2} + 1$ και $\sqrt{3}$ δ) $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ και $\sqrt{10}$
 β) $\sqrt{2} - 2$ και $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ ε) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ και $2\sqrt{2}$
 γ) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ και $\sqrt{5}$ στ) $2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$ και $2\sqrt{6} - \sqrt{14}$

17. Να αποδείξετε ότι :

α) $\sqrt[4]{3} > \sqrt[3]{2}$

β) $\sqrt{5} + \sqrt{2} < \sqrt{10} + 1$

γ) $\sqrt{8+2\sqrt{6}} > \sqrt{2} + \sqrt{3}$

δ) $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{15} \geq 4$

ε) $6 > \frac{3\sqrt{7} + 5\sqrt{2}}{5}$

στ) $\sqrt[4]{9 - \sqrt{15}} > \sqrt{\frac{\sqrt{30} - \sqrt{2}}{2}}$

ζ) $\sqrt{4\alpha + 9\beta} \leq 2\sqrt{\alpha} + 3\sqrt{\beta}, \alpha, \beta \geq 0$

η) $\frac{(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2}{2} \leq \alpha + \beta, \alpha, \beta \geq 0$

θ) $\sqrt{\frac{\alpha + 4\beta}{2}} \geq \frac{\sqrt{\alpha} + 2\sqrt{\beta}}{2}, \alpha, \beta \geq 0$

18. Να βρείτε τους αριθμούς α, β για τους οποίους ισχύει :

α) $\sqrt[3]{\alpha + 3} + \sqrt[4]{\beta + 4} = 0$

γ) $\sqrt[6]{2\alpha + 1} = -\sqrt[5]{\beta + 2}$

β) $\sqrt{2\alpha + 6} + \sqrt[3]{\alpha - 2\beta + 7} = 0$

δ) $\alpha^2 - 2\sqrt{\alpha} + 1 + \sqrt{\beta - 2} = 0$

19. Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\sqrt{\alpha - 2} + \sqrt[3]{\beta + 3} = 0$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β .

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \sqrt[3]{3(\sqrt{\alpha - \beta} - \sqrt{\alpha})^2(7 + 2\sqrt{10})}$.

20. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

α) $36^{\frac{1}{2}}$

β) $27^{\frac{1}{3}}$

γ) $16^{\frac{1}{4}}$

δ) $8^{\frac{2}{3}}$

ε) $4^{\frac{5}{2}}$

στ) $4^{\frac{5}{6}} \cdot 4^{\frac{2}{3}}$

ζ) $49^{\frac{1}{6}} \cdot 49^{\frac{1}{3}}$

η) $\frac{27^{\frac{3}{4}}}{27^{\frac{1}{12}}}$

θ) $\frac{8^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{14}{15}}}{8^{\frac{1}{5}} \cdot 8^{\frac{1}{15}}}$

ι) $\left(8^{\frac{8}{9}}\right)^{\frac{3}{2}}$

ια) $\left(9^{\frac{15}{8}}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(9^{\frac{3}{20}}\right)^{\frac{5}{3}}$

ιβ) $\frac{\left(4^{\frac{39}{8}}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(4^{\frac{27}{28}}\right)^{\frac{7}{9}}}$