

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ (3.3)

ΘΕΜΑ 1238 (2^ο)

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $-2x^2 + 10x = 12$. (Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} = 0$ (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1246 (2^ο)

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 1)x = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = 1$ και για $\lambda = -1$. (Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1269 (2^ο)

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 5x - 1$.

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, x_1 και x_2 . (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: $x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$ και $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ (Μονάδες 9)

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1280 (2^ο)

Έστω α , β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha + \beta = 2 \quad \text{και} \quad \alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 = -30$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -15$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α , β και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1285 (2°)

Το πάτωμα του εργαστήριου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $(x+1)$ μέτρα και x μέτρα.

α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.

(Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1288 (2°)

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - kx - 2$, με $k \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{R}$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 2 = 0$ (1),

i) να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών της (1).

(Μονάδες 6)

ii) να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1, ρ_2 , όπου

$$\rho_1 = 2x_1 \text{ και } \rho_2 = 2x_2.$$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1290 (2°)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ .

(Μονάδες 13)

β) Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1)

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1315 (2°)

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha \cdot \beta = 4 \text{ και } \alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 = 20$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha + \beta = 5$.

(Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β , και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1316 (2°)

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha + \beta = -1 \quad \text{και} \quad \alpha^3 \beta + 2\alpha^2 \beta^2 + \alpha \beta^3 = -12$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -12$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1334 (2°)

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α, β , τέτοιοι ώστε:

$$\alpha + \beta = 12 \quad \text{και} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 272.$$

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι:

$$\alpha \cdot \beta = -64. \quad (\text{Μονάδες } 8)$$

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β . (Μονάδες 10)

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β . (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1348 (2°)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει: $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$ (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1349 (2°)

α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$ (Μονάδες 12)

β) Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + 3 = 0$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 1359 (2°)

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = \sqrt{3}$. (Μονάδες 10)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 13028 (2°)

Δίνεται η εξίσωση $ax^2 - 2ax - 2a - 2 = 0$, με $a \in \mathbb{R}^*$ (1).

α) Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}^*$ για τις οποίες η εξίσωση (1) έχει ρίζα το 3.

(Μονάδες 10)

β) Για $a=2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 14578 (3°)

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση $\Pi = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x}$

(Μονάδες 10)

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x} = 0.$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 1388 (4°)

Δίνεται η εξίσωση $(8-\lambda)x^2 - 2(\lambda-2)x + 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η εξίσωση να είναι 1^{ου} βαθμού.

(Μονάδες 5)

β) Αν η εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού, να βρείτε τις τιμές του λ ώστε αυτή να έχει μια διπλή ρίζα. Για τις τιμές του λ που βρήκατε, να προσδιορίσετε τη διπλή ρίζα της εξίσωσης.

(Μονάδες 10)

γ) Για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β), να δείξετε ότι το τριώνυμο

$$(8-\lambda)x^2 - 2(\lambda-2)x + 1$$

είναι μη αρνητικό, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1412 (4°)

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - \lambda) \cdot x^2 - (\lambda^2 - 1) \cdot x + \lambda - 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή: $\lambda x^2 - (\lambda+1)x + 1 = 0$

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2^{ου} βαθμού.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 1418 (4°)

Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά $(d+1)$ cm.

α) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d , το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β. (Μονάδες 6)

β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:

i) Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου. (Μονάδες 12)

ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1431 (4°)

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0 \quad (1) \quad \text{με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

(Μονάδες 10)

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

i) Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.

ii) Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ .

(Μονάδες 5)

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$,

ii) να βρείτε το λ .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1439 (4°)

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ (Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda < 0$, τότε:

i) το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

ii) να αποδείξετε ότι $|x_1 + x_2| \geq 2x_1 x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 1440 (4°)

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, με $\lambda > 0$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε $\lambda > 0$. (Μονάδες 10)

β) Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:

i) να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου. (Μονάδες 4)

ii) να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ και να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 4$ για κάθε $\lambda > 0$. (Μονάδες 8)

iii) για την τιμή του λ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4, τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 1448 (4°)

Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2 - 5x + \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha| \leq \frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς,

που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν $\alpha = 2$. (Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$ (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1451 (4°)

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1). (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες

ισχύει: $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = -4$ (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1452 (4°)

α) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1) (Μονάδες 10)

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$.

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1). (Μονάδες 7)

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β . (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1459 (4°)

Μία υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x , να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda = (2x+5)^2 - 8x \quad (1)$$

α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5 , ποιος είναι ο εξαγόμενος; (Μονάδες 6)

β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20 , ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος;

(Μονάδες 6)

γ) Να γράψετε τη σχέση (1) στη μορφή $4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$ και στη συνέχεια:

i) να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x , ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5 . (Μονάδες 6)

ii) να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ . (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1460 (4°)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ με β, γ πραγματικούς αριθμούς.

Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1 + x_2| = 4$, τότε:

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$. (Μονάδες 7)

γ) Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ (1)

Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 1463 (4°)

Δίνεται η εξίσωση

$$\alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0$$

όπου α, β δύο **θετικοί** αριθμοί.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 - \beta^2)^2$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών α, β , ώστε η εξίσωση να έχει δυο ρίζες άνισες, τις οποίες να προσδιορίσετε, ως συνάρτηση των α, β . (Μονάδες 10)

γ) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1 = \frac{\alpha}{\beta}$ και $x_2 = \frac{\beta}{\alpha}$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \geq 4. \quad (\text{Μονάδες } 7)$$

ΘΕΜΑ 1469 (4°)

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ , δηλαδή σταθερή.

(Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ .

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των

πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1475 (4°)

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

- α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. (Μονάδες 8)
- β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών. (Μονάδες 5)
- γ) Αν $\lambda > 0$ το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)
- δ) Αν $0 < \lambda \neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{x_1 + x_2}{2}$ και 1. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 1476 (4°)

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 + \lambda x - 36 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

- (α) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ , η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 8)
- (β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ .
- (i) Να δείξετε ότι ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης
- $$2x^2 - \lambda x - 36 = 0 \quad (\text{Μονάδες 7})$$
- (ii) Να δείξετε ότι:
- $\rho \neq 0$ και
 - ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης: $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$
- (Μονάδες 4+6=10)

ΘΕΜΑ 1478 (4°)

- α) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο $\Pi = 34$ cm και διαγώνιο $\delta = 13$ cm
- i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = 60$ cm². (Μονάδες 5)
- ii) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 5)
- iii) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου. (Μονάδες 5)
- β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 40 cm² και διαγώνιο 8 cm. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1491 (4°)

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:

i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 x_2)^{24} = 0. \quad (\text{Μονάδες 9})$$

ii) Για $\lambda = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης: $x_1^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2^2$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1500 (4°)

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 6x + \lambda - 7$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

β) i) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος $S = x_1 + x_2$ των ριζών και να εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

(Μονάδες 2)

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7 < \lambda < 16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες.

Ποιο είναι τότε το πρόσημο των ριζών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ) i) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση

$$x^2 - 6|x| + \lambda = 7 \quad (1)$$

έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 8)

ii) Έχει η εξίσωση (1) για $\lambda = 3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες; Να

αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 1508 (4°)

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$.

(Μονάδες 4)

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον:

$$|x_1 - 2| = |x_2 + 2|, \text{ τότε:}$$

i) Να δείξετε ότι: $x_1 - x_2 = 4$.

(Μονάδες 7)

ii) Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και η τιμή του λ .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 1509 (4°)

Δίνονται η εξίσωση: $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι: $p_1 = \alpha$ και $p_2 = -\frac{1}{\alpha}$

(Μονάδες 10)

γ) Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε: $|p_1 - p_2| = 2$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 1516 (4°)

α) Να λύσετε τις εξισώσεις

$$3x^2 - 14x + 8 = 0 \quad (1)$$

και

$$8x^2 - 14x + 3 = 0 \quad (2)$$

(Μονάδες 10)

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (3) \quad \text{και} \quad \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0 \quad (4),$$

με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$.

Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, τότε

i) $\rho \neq 0$ και

(Μονάδες 5)

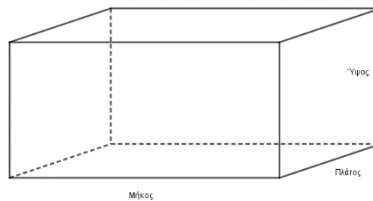
ii) ο $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4).

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 12683 (4^ο)

Η δεξαμενή του παρακάτω σχήματος έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ύψος ίσο με το ένα τέταρτο του μήκους της.

- α) Αν η δεξαμενή έχει όγκο 16m^3 , να βρείτε τις διαστάσεις της. (Μονάδες 8)
- β) Λόγω έλλειψης χώρου η δεξαμενή ανακατασκευάζεται με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ύψος 2 μέτρα. Αν το πλάτος της νέας δεξαμενής είναι κατά 2m μικρότερο από το μήκος της υπολογίστε τις διαστάσεις της βάσης προκειμένου ο όγκος να παραμείνει 16m^3 . (Μονάδες 9)
- γ) Αν η νέα δεξαμενή περιέχει 10m^3 πετρέλαιο να βρείτε το ύψος της στάθμης του πετρελαίου μέσα στη δεξαμενή. (Μονάδες 8)

**ΘΕΜΑ 12912 (4^ο)**

- α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)
- β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι: Αν $\beta < 0$, $\gamma > 0$ και $\beta^2 - 4\gamma > 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 13320 (4^ο)

Θεωρούμε τις εξισώσεις $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (I) και $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ (II) όπου α, β, γ είναι μη μηδενικοί ακέραιοι, με $\alpha \neq \gamma$.

- α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω εξισώσεις έχουν το ίδιο πλήθος ριζών. (Μονάδες 8)
- β) Αν ο αριθμός $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της (I) να δείξετε ότι ο $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της (II). (Μονάδες 9)
- γ) Να αποδείξετε, με απαγωγή σε άτοπο, ότι καμία από τις εξισώσεις (I), (II) δεν μπορεί να έχει ως ρίζα τον αριθμό $\sqrt{2}$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 14406 (4°)

Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους

ισχύει: $\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1} = \frac{\alpha}{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι. (Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \frac{\alpha^{22} \cdot (\beta^3)^8}{\alpha^{-2} \cdot (\alpha\beta)^{25}}$. (Μονάδες 7)

γ) Αν επιπλέον οι μη μηδενικοί αριθμοί α και β εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου με άθροισμα $\frac{5}{2}$, να τους υπολογίσετε. (Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τον αριθμό που πρέπει να προσθέσετε στο α ή στο β , έτσι ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να γίνει τετράγωνο. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 14490 (4°)

Έστω Ω το σύνολο που έχει ως στοιχεία τους αριθμούς που είναι οι ενδείξεις ενός ζαριού.

α) Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο Ω . (Μονάδες 5)

β) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda - 2 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

i. Το σύνολο A που περιέχει ως στοιχεία τις τιμές του $\lambda \in \Omega$, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 10)

ii. Την πραγματική τιμή του λ , αν η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες. (Μονάδες 6)

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β ii να υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης. (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 14651 (4°)

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0 \text{ όπου } \lambda > 0.$$

α) Να βρείτε:

i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ . (Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda > 0$. (Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (Μονάδες 6)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

ΘΕΜΑ 1262 (2°)

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{5 + \sqrt{5}}, \quad B = \frac{1}{5 - \sqrt{5}}$

α) Να δείξετε ότι:

i) $A+B = \frac{1}{2}$ (Μονάδες 8)

ii) $A \cdot B = \frac{1}{20}$ (Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1331 (2°)

α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6 = 0$ (1) (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1| < 2$ (2) (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2). (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 1337 (2°)

Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{3 - \sqrt{7}}, \quad B = \frac{1}{3 + \sqrt{7}}$

α) Να δείξετε ότι: $A + B = 3$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$ (Μονάδες 12)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A, B (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 14749 (3°)

α) i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ορίζεται η παράσταση: $A = \frac{x}{x - |x|}$. (Μονάδες 9)

iii. Για τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A, να δείξετε ότι

$A = \frac{1}{2}$ (Μονάδες 7)

β) Για $x < 0$, να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x^3}{x - |x|} = \frac{3}{2}x + 2$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 1407 (4°)

Τέσσερις αθλητές, ο Αργύρης, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Δημήτρης τερμάτισαν σε έναν αγώνα δρόμου με αντίστοιχους χρόνους (σε λεπτά) t_A , t_B , t_Γ και t_Δ , για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$t_A < t_B$$

$$t_\Gamma = \frac{t_A + 2t_B}{3} \quad \text{και}$$

$$|t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta|.$$

α) i) Να δείξετε ότι: $t_\Delta = \frac{t_A + t_B}{2}$. (Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τη σειρά με την οποία τερμάτισαν οι αθλητές. Να αιτιολογήσετε την

απάντησή σας. (Μονάδες 10)

β) Δίνεται επιπλέον ότι ισχύει:

$$t_A + t_B = 6 \quad \text{και} \quad t_A \cdot t_B = 8$$

i) Να γράψετε μία εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B

(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τους χρόνους τερματισμού των τεσσάρων αθλητών.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 1477 (4°)

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση:

$$x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0 \quad (1) \quad \text{με παραμέτρους } \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι: Αν $\gamma < 0$ τότε

i) $\beta^2 - 4\gamma > 0$ (Μονάδες 3)

ii) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 14543 (4°)

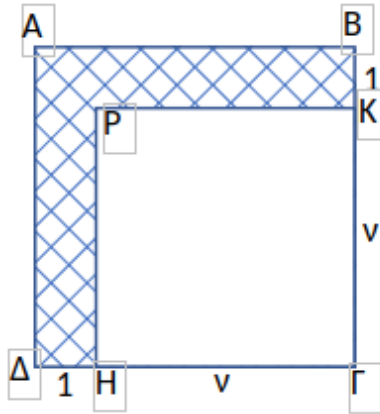
Κάθε περιττός ακέραιος αριθμός a γράφεται στη μορφή $a = 2k + 1, k$ ακέραιος.

α) Να γράψετε τους αριθμούς 3,5,7 ως διαφορά τετραγώνων δύο ακεραίων. (Μονάδες 6)

β) i) Να αποδείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων ισούται πάντα με έναν περιττό ακέραιο. (Μονάδες 6)

ii) Να γράψετε τον αριθμό 2021 ως διαφορά δύο τετραγώνων ακεραίων αριθμών. (Μονάδες 6)

γ) Στο σχήμα τα τετράπλευρα $AB\Gamma\Delta$ και ΓHPK είναι τετράγωνα με $(\Gamma\text{H})=(\Gamma\text{K})=v$ και $(\text{BK})=(\Delta\text{H})=1$. Αν γνωρίζουμε ότι το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν είναι ίσο με το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 45, να βρεθεί η τιμή του θετικού ακεραίου v . (Μονάδες 7)

**ΘΕΜΑ 14759 (4°)**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + 6ax + 6\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $f(\alpha) + f(\beta) \geq \beta^2 - 36$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(\alpha) + f(\beta) = \beta^2 - 36$. (Μονάδες 6)

γ) Αν $\alpha = 2$ και $\beta = -6$

i) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 6x$. (Μονάδες 6)

ii) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος γi), να δείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{6}. \quad (\text{Μονάδες 5})$$