

ΦΥΛΛΟ 7

Δ1.	$ax^2 + bx + \gamma = 0, \quad a \neq 0$	$2x^2 - 5x + 3 = 0$
	Μετατρέψτε την εξίσωση σε ισοδύναμη με συντελεστής στο x^2 το 1. 	
	Μετατρέψτε την εξίσωση στην οποία ο συντελεστής του x να είναι στη μορφή $2k$. 	
	Μεταφέρετε τους γνωστούς όρους στο 2^ο μέλος και κάντε ότι πράξεις μπορείτε. 	
	Προσθέστε και στα δύο μέλη κατάλληλο όρο ώστε το 1^ο μέλος να πάρει τη μορφή $(x + \lambda)^2$ 	
	Λύστε την εξίσωση που προέκυψε. 	
Δ2.	Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0, \quad a \neq 0$ 1. Βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης στην περίπτωση όπου $\Delta > 0$. $x_1 = \dots\dots\dots, \quad x_2 = \dots\dots\dots$ 2. Βρείτε το άθροισμα $x_1 + x_2$ των παραπάνω ριζών και συμβολίστε το με S. $S = x_1 + x_2 = \dots\dots\dots$ 3. Βρείτε το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$ των παραπάνω ριζών και συμβολίστε το με P. $P = x_1 \cdot x_2 = \dots\dots\dots$	

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $x^2 - x\sqrt{5} - 10 = 0$ β) $x^2 - 6x\sqrt{2} + 10 = 0$ γ) $3x^2 - (2 - 3\sqrt{7})x - 2\sqrt{7} = 0$

2. Να βρείτε το πλήθος των ριζών των παρακάτω εξισώσεων για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων.

α) $(\lambda + 8)x^2 + (\lambda + 2)x + \frac{\lambda}{4} = 0$ γ) $(\lambda - 3)x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda + 3 = 0$

β) $x^2 - (2\lambda - 4)x - \lambda(3 - \lambda) = 0$ δ) $(\lambda + 3)x^2 - 2(\lambda + 2)x + \lambda = 0$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $x^2 - (2\alpha + 3\beta)x + 6\alpha\beta = 0$

δ) $\lambda x^2 - (\lambda - 2)x - 2 = 0$

β) $2x^2 - (3\alpha - 2)x + \alpha(\alpha - 2) = 0$

ε) $(\lambda - 3)x^2 + 2\lambda x + \lambda + 3 = 0$

γ) $4x^2 - (5\alpha + 6)x + \alpha^2 - 4 = 0$

4. α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\mu^2 + 1)x^2 - 2\mu x + 1 = 0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$ για όλες τις τιμές του πραγματικού αριθμού μ .
 β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - 3(\alpha + \beta)x + 5\alpha\beta = 0$ έχει λύσεις στο $\mathbb{R}$.
 γ) Να αποδείξετε ότι, αν η εξίσωση $ax^2 - (\alpha - 2\beta)x - \beta = 0$ είναι 2^{ου} βαθμού, τότε έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.
5. Η εξίσωση $x^2 - (2\lambda - 1)x + \lambda^2 - 3 = 0$ έχει ρίζα το -3 . Να βρείτε :
 α) τον αριθμό λ , β) την άλλη ρίζα της εξίσωσης.
6. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η παρακάτω εξίσωση έχει διπλή ρίζα, την οποία και να βρείτε : α) $(1 - \alpha)x^2 + 2x + \alpha + 1 = 0$ β) $(\alpha + 2)x^2 - 4(\alpha + 1)x + 2\alpha + 5 = 0$
7. Για ποιες τιμές των κ και λ η εξίσωση $5x^2 + (2\kappa - 1)x + \lambda + 4 = 0$ έχει διπλή ρίζα το 0.
8. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (4\lambda - 2)x + (2\lambda - 1)^2 = 0$ (1).
 α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει μία διπλή ρίζα για κάθε πραγματικό αριθμό λ .
 β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , η διπλή ρίζα της εξίσωσης (1) βρίσκεται στο διάστημα $(-3, 5)$.
9. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2 + 2(\mu - 3)x + \mu^2 - 3 = 0$:
 α) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες γ) είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$
 β) έχει μια διπλή ρίζα δ) έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα
10. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $-\frac{x^2}{2} - (\alpha + 2)x - \alpha^2 + 4 = 0$ έχει διπλή ρίζα και η εξίσωση $3x^2 - 6x + \alpha = 0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.
11. Θεωρούμε τις εξισώσεις $\beta x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha = 0$ (1) και $-ax^2 + (\alpha + \beta)x + \beta - \alpha = 0$ (2), όπου $\beta \neq 0$. Να αποδείξετε ότι :
 α) η (1) έχει πραγματικές ρίζες.
 β) αν η (1) έχει μία μόνο ρίζα, τότε και η (2) έχει δύο διαφορετικές ρίζες.
12. Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η εξίσωση $(2\mu - 6)x^2 - 10x + 5 = 0$ έχει ρίζες :
 α) ετερόσημες β) ομόσημες
13. Α. Δίνεται η εξίσωση $3x^2 - 2(\lambda - 3)x - 4\lambda = 0$ (1).
 α) Να αποδείξετε ότι η (1) έχει, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, πραγματικές ρίζες.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η (1) έχει ρίζες :

i) αντίθετες ii) αντίστροφες iii) ομόσημες iv) ετερόσημες

B. Ομοίως για την εξίσωση $2x^2 - (\lambda - 4)x + 2 - \lambda = 0$.

14. A. Δίνεται η εξίσωση $4x^2 - (\alpha - 6)x + 2 - \alpha = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η (1) έχει, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, πραγματικές ρίζες.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α η (1) έχει ρίζες :

i) θετικές ii) αρνητικές

B. Ομοίως για την εξίσωση $3x^2 - (\alpha - 2)x + \alpha - 5 = 0$.

15. Να βρείτε για ποιες τιμές του α έχει ρίζες (πραγματικές και) αντίθετες η εξίσωση :

α) $-3x^2 + (2\alpha^2 - 8)x + 5 = 0$

γ) $4x^2 - (\alpha^2 + 5\alpha - 6)x + 5\alpha - 2 = 0$

β) $-x^2 - (|\alpha - 1| - 4)x + 3 = 0$

16. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ έχει ρίζες (πραγματικές και) αντίστροφες η εξίσωση :

α) $2x^2 - (\lambda - 3)x + \lambda^2 + \lambda = 0$

β) $-x^2 + (\lambda - 5)x + \lambda^2 - 3\lambda - 5 = 0$

17. A. Να βρείτε για ποιες τιμές των λ, μ η εξίσωση $x^2 + (2\lambda - 6)x + \mu + 5 = 0$ έχει ρίζες

x_1, x_2 με $x_1 < x_2 = 0$.

B. Να βρείτε για ποιες τιμές των λ, μ η εξίσωση $-x^2 + (4\mu - 8)x + \lambda - 5 = 0$ έχει ρίζες

x_1, x_2 με $0 = x_1 < x_2$.

18. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $-4x^2 + (\alpha - 1)x + 6 - \alpha = 0$ έχει ετερόσημες ρίζες, με την θετική να έχει μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

19. Αν μια ρίζα της εξίσωσης $x^2 + 12x - \lambda = 0$ είναι διπλάσια της άλλης, να βρείτε την τιμή του λ .

20. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $x^2 + (2\lambda - 1)x - 8 = 0$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_2 = x_1^2$.

21. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $x^2 + 2x + \lambda - 3 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2 για τις οποίες ισχύει :

α) $4x_1x_2 + 5(x_1 + x_2) + 10 = 0$

β) $(2x_1 - 3)(2x_2 - 3) = 5$

22. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $2x^2 + 4x + 3\lambda - 1 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2 για τις οποίες ισχύει:

α) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -4$

β) $\frac{1}{2x_1 - 1} + \frac{1}{2x_2 - 1} = \frac{2}{3}$

23. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - (\lambda - 2)x + \lambda - 6 = 0$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι η (1) έχει, για κάθε τιμή του λ , πραγματικές ρίζες.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:

α) $\frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2} = 2$ β) $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = 16$ γ) $(x_1^2 + x_1 x_2)(x_2^2 + x_1 x_2) = 2(\lambda - 6)$

24. Για ποιες τιμές του λ το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της εξίσωσης $2x^2 - 4\lambda x + 2\lambda - 1 = 0$ είναι ίσο με 1.

25. Να λύσετε την εξίσωση $-5x^2 + 10x + \gamma = 0$, αν είναι γνωστό ότι για τις ρίζες της x_1, x_2 ισχύει $3x_1 - 2x_2 = 16$.

26. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 3x - 5 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 πραγματικές και άνισες.

β) Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων.

i) $\frac{-5}{x_1 + x_2}$	iv) $\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 + x_2}$	vi) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$	viii) $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$
ii) $x_1 x_2$	v) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$	vii) $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$	ix) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$
iii) $x_1^2 + x_2^2$			x) $ x_1 - x_2 $

27. Να βρείτε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς :

α) $\frac{1}{2}$ και -2	γ) $1+\alpha$ και $1-\alpha$
β) $\sqrt{3}+2$ και $2-\sqrt{3}$	δ) $\frac{\alpha}{3}$ και -3α

28. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 1 = 0$. Χωρίς να βρείτε τα x_1, x_2 , να βρείτε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς :

α) $2x_1$ και $2x_2$	ε) $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$	η) $ x_1 $ και $ x_2 $
β) $\frac{x_1}{2}$ και $\frac{x_2}{2}$	στ) x_1^3 και x_2^3	
γ) $2x_1 - 3$ και $2x_2 - 3$	ζ) $\frac{3x_1 + 1}{x_1 - 3}$ και $\frac{3x_2 + 1}{x_2 - 3}$	
δ) x_1^2 και x_2^2		

29. Αν $\alpha(\alpha + \beta + \gamma) \neq 0$, και η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 , να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\alpha + \beta + \gamma)x^2 - 2(\alpha - \gamma)x + \alpha - \beta + \gamma = 0$ έχει ρίζες τους $\frac{1+x_1}{1-x_1}$ και $\frac{1+x_2}{1-x_2}$.

30. Να λύσετε χωρίς να χρησιμοποιήσετε τη διακρίνουσα Δ και τον τύπο των ριζών, τις εξισώσεις :

α) $x^2 - 5x + 4 = 0$	δ) $x^2 - 3\alpha x + 2\alpha^2 = 0$	στ) $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \beta^2 = 0$
β) $x^2 - 10x + 25 = 0$	ε) $x^2 + 4\alpha x + 3\alpha^2 = 0$	
γ) $x^2 - 5x - 6 = 0$		

31. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{3}{2}$

β) $\frac{5}{x-2} + \frac{2}{x-5} = 2$

γ) $\frac{16}{x^2-4} = \frac{x-2}{x+2} - \frac{1}{x-2}$

δ) $1 - \frac{3}{x+3} = \frac{9}{x^2+3x}$

ε) $\frac{2}{2-x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2x-x^2}$

στ) $\frac{x+1}{4x} - \frac{5x-1}{2x-4} = \frac{8-x}{3x^2-6x} - \frac{x-5}{x-2}$

ζ) $\frac{x}{x-2} + \frac{x-8}{x} = \frac{4}{x^2-2x}$

η) $\frac{5x+20}{x^2+4x} + \frac{14}{x^2-2x} = \frac{x}{2-x}$

32. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $(x^2+1)^2 - 6(x^2+1) + 8 = 0$

β) $(x^2+2x-3)^2 + 5(x^2+2x-3) + 4 = 0$

γ) $2\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 - 7\left(1 - \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$

δ) $\left(\frac{1-2x}{x}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{x} - 2\right) + 5 = 0$

ε) $x - 7\sqrt{x} + 10 = 0$

στ) $\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) = 10$

ζ) $(x^2-4x+2)^2 + 4(x^2-4x) + 11 = 0$

33. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $x^2 + 3|x| - 4 = 0$

β) $x^2 - |-5x| + 6 = 0$

γ) $5|x| - 4 = x^2$

δ) $4x^2 + |x| - 4 = 5(|x| - 2)$

ε) $(x+2)^2 + 2|x+2| - 3 = 0$

στ) $3(2x+1)^2 - 14\left|x + \frac{1}{2}\right| + 4 = 0$

ζ) $(x+2)^2 - 3\sqrt{x^2+4x+4} + 2 = 0$

34. Να βρείτε για ποιες τιμές του α έχει ρίζες (πραγματικές και) αντίθετες η εξίσωση $x^2 - (2+|a|-a^2)x + \pi - 4 = 0$.

35. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $x^4 - 4x^2 - 1 = 0$

β) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

γ) $-x^8 + 17x^4 = 16$

δ) $64x^4 - 63x^2 - 1 = 0$

ε) $|x^2 - 4|x| + 3| + |x^4 - 10x^2 + 9| = 0$

36. Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου είναι 3 cm, 5 cm και 7 cm. Αν κάθε πλευρά αυξηθεί κατά x cm, τότε το τρίγωνο θα γίνει ορθογώνιο. Να υπολογίσετε το x.

37. Μια παρέα σπουδαστών μίσθωσε ένα αυτοκίνητο για μια εβδομάδα και πλήρωσαν 400 €. Εάν κάποιος άλλος σπουδαστής προστεθεί στην παρέα, το μερίδιο του καθενός από το μίσθωμα θα ελαττωθεί κατά 20 €. Πόσοι ήταν οι σπουδαστές στην αρχική παρέα ;

38. Μια δεξαμενή γεμίζει από δύο βρύσες Α και Β, αν ανοίξουν μαζί, σε 6 ώρες. Η δεξαμενή γεμίζει από τη βρύση Α σε 5 ώρες λιγότερο από ό,τι γεμίζει από τη βρύση Β. Πόσες ώρες χρειάζεται η βρύση Α για να γεμίσει τη δεξαμενή μόνη της ;

- 39.** Το ψηφίο των δεκάδων ενός διψήφιου αριθμού είναι κατά 2 μεγαλύτερο από το ψηφίο των μονάδων του, ενώ το άθροισμα των τετραγώνων των ψηφίων του είναι κατά 14 μεγαλύτερο από τον αριθμό αυτό. Να βρείτε τον αριθμό.
- 40.** Ένας οδηγός κινούμενος με το αυτοκίνητό του με σταθερή ταχύτητα u , διένυσε μια απόσταση 240 km. Αν η ταχύτητά του ήταν κατά 20 km/h μεγαλύτερη, θα διένυε την απόσταση σε χρόνο λιγότερο κατά 1 ώρα. Να βρείτε την ταχύτητα u .
- 41.** Να λύσετε την εξίσωση $x^2 + (2P + 1)x - 3S + 2 = 0$, αν είναι γνωστό ότι έχει πραγματικές ρίζες με άθροισμα S και γινόμενο P .
- 42.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda = 0$ (1).
- Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.
 - Να βρείτε το λ , ώστε η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ίση με το τετράγωνο της άλλης.
 - Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1) για τη μικρότερη τιμή του λ που βρήκατε.
 - Να υπολογίσετε την παράσταση $A = \frac{x_1 + 2}{x_2} + \frac{x_2 + 2}{x_1}$.
 - Να βρείτε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1 - 1}$ και $\frac{1}{x_2 - 1}$.
- 43.** Δίνεται η εξίσωση $-x^2 - 2ax + a^2 + b^2 + 2 = 0$ (1).
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς a και b .
 - Έστω S και P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1). Να βρείτε τα a και b ώστε να ισχύει $2S = P - 2$.
 - Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1) για τις τιμές των a και b που βρήκατε.
 - Να υπολογίσετε την παράσταση $A = \frac{x_1 + 1}{x_1 + 2} + \frac{x_2 + 1}{x_2 + 2}$.
 - Να βρείτε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $\frac{x_1^2}{x_2}$ και $\frac{x_2^2}{x_1}$.