

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ – ΕΝΟΤΗΤΑ 4.2

### ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2<sup>ου</sup> ΒΑΘΜΟΥ

#### ΘΕΜΑ 12722 (2<sup>ο</sup>)

Θεωρούμε το τριώνυμο  $f(x) = x^2 - x - 3$

- α) Να βρείτε τις ρίζες του  $f(x)$  (Μονάδες 12)
- β) Να επιλύσετε την ανίσωση  $-2 \cdot f(x) < 0$  (Μονάδες 13)

#### ΘΕΜΑ 12976 (2<sup>ο</sup>)

- α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο  $2x^2 - x - 1$ . (Μονάδες 12)
- β) Να λύσετε την ανίσωση  $x(1 - 2x) \leq -1$ . (Μονάδες 13)

#### ΘΕΜΑ 13321 (2<sup>ο</sup>)

- α) Να λύσετε την εξίσωση  $x^4 - 16 = 0$ . (1) (Μονάδες 8)
- β) Να λύσετε την ανίσωση  $x^2 + 3x \leq 0$ . (2) (Μονάδες 9)
- γ) Να εξετάσετε εάν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι και λύσεις της ανίσωσης (2). (Μονάδες 8)

#### ΘΕΜΑ 14189 (2<sup>ο</sup>)

- α) Αν  $x^2 - 3x - 4 < 0$ , να δείξετε ότι  $-1 < x < 4$ . (Μονάδες 12)
- β) Δίνεται η παράσταση  $A = |2x + 2| + |x - 5|$  με τις τιμές του  $x$  να επαληθεύουν την ανίσωση του ερωτήματος α). Να αποδείξετε ότι:  $A = x + 7$ . (Μονάδες 13)

#### ΘΕΜΑ 14474 (2<sup>ο</sup>)

Δίνεται το τριώνυμο  $2x^2 + 3x - 5$ .

- α) Να εξετάσετε αν το 1 είναι ρίζα του τριωνύμου. (Μονάδες 12)
- β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο. (Μονάδες 13)

#### ΘΕΜΑ 14577 (2<sup>ο</sup>)

Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 - x - 2 = 0$  (1).

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό  $-1$ . (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε και τη δεύτερη ρίζα της εξίσωσης (1). (Μονάδες 8)
- γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση:  $A = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$ ,  $x \neq 0, x \neq -1$ . (Μονάδες 9)

**ΘΕΜΑ 34162 (2°)**

α) Να λύσετε τις ανισώσεις:  $|2x - 5| \leq 3$  και  $2x^2 - x - 1 \geq 0$  (Μονάδες 16)

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α). (Μονάδες 9)

**ΘΕΜΑ 34919 (2°)**

α) Να λύσετε την ανίσωση  $x^2 - 10x + 21 < 0$ . (Μονάδες 13)

β) Αν  $3 < x < 7$ , να δείξετε ότι η παράσταση

$$A = |x^2 - 10x + 21| + x^2 - 10x + 22$$

είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του  $x$ . (Μονάδες 12)

**ΘΕΜΑ 35030 (2°)**

α) Να αποδείξετε ότι  $x^2 + 4x + 5 > 0$ , για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ . (Μονάδες 10)

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4| \quad (\text{Μονάδες 15})$$

**ΘΕΜΑ 35035 (2°)**

Δίνεται το τριώνυμο:  $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$ ,  $x \in \mathbb{R}$

α) Να λύσετε την ανίσωση  $f(x) \leq 0$  και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 13)

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός  $\sqrt[3]{2}$  είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

**ΘΕΜΑ 36887 (2°)**

Δίνεται το τριώνυμο  $2x^2 - 3x + 1$ .

α) Να βρείτε τις ρίζες του. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  για τις οποίες:  $2x^2 - 3x + 1 < 0$  (Μονάδες 5)

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  και  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  είναι λύσεις της ανίσωσης:  $2x^2 - 3x + 1 < 0$

(Μονάδες 10)

**ΘΕΜΑ 36892 (2°)**

α) Να λύσετε την εξίσωση:  $\frac{|x|}{3} - \frac{|x| + 4}{5} = \frac{2}{3}$ . (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση:  $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$ . (Μονάδες 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

**ΘΕΜΑ 37169 (2°)**

Δίνεται το τριώνυμο  $-x^2 + (\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3}$ .

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι :  $\Delta = (\sqrt{3} + 1)^2$ .

(Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το αρχικό τριώνυμο.

(Μονάδες 13)

**ΘΕΜΑ 37168 (2°)**

Δίνονται οι ανισώσεις:  $-x^2 + 5x - 6 < 0$  (1) και  $x^2 - 16 \leq 0$  (2).

α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1), (2).

(Μονάδες 12)

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

(Μονάδες 13)

**ΘΕΜΑ 37182 (2°)**

α) Να λυθεί η εξίσωση:  $x^2 - x - 2 = 0$ .

(Μονάδες 8)

β) Να λυθεί η ανίσωση:  $x^2 - x - 2 > 0$  και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 12)

γ) Να τοποθετήσετε τον αριθμό  $-\frac{4}{3}$  στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι ο αριθμός  $-\frac{4}{3}$  λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β);

(Μονάδες 5)

**ΘΕΜΑ 38203 (2°)**

α) Να λύσετε την εξίσωση :  $x^2 - 25 = 0$ .

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση :  $x^2 - 36 \leq 0$ .

(Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος.

(Μονάδες 9)

**ΘΕΜΑ 13174 (4°)**

Δίνονται οι παραστάσεις  $A = \frac{-x^2 + 4|x| - 3}{|x| - 1}$  και  $B = \frac{x^2 - 4|x| + 4}{|x| - 2}$ .

α) Για ποιες τιμές του  $x \in \Gamma$  ορίζονται οι παραστάσεις A και B;

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι  $A = 3 - |x|$  και  $B = |x| - 2$ .

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση:  $B - A < 2d(x, 4) - 5$ .

(Μονάδες 9)

**ΘΕΜΑ 13176 (4°)**

Δίνονται οι ανισώσεις  $|x-1| < 2$  και  $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ .

- α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 8)
- β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για  $x \in (-1, 1] \cup [2, 3)$ . (Μονάδες 8)
- γ) i. Αν οι αριθμοί  $\rho_1$  και  $\rho_2$ , με  $\rho_1 < \rho_2$ , είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με

$$\rho_1, \rho_2 \in (-1, 1], \text{ είναι και ο αριθμός } \frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4} \text{ κοινή τους λύση; (Μονάδες 4)}$$

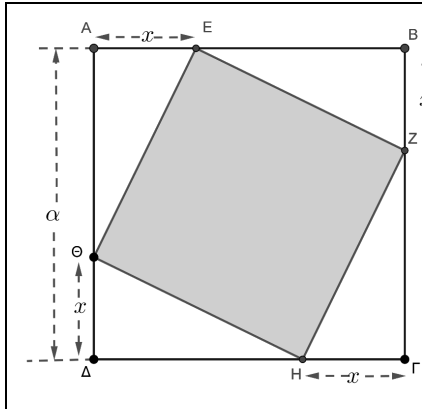
- ii. Αν οι αριθμοί  $\rho_1$  και  $\rho_2$ , με  $\rho_1 < \rho_2$ , είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με

$$\rho_1 \in (-1, 1] \text{ και } \rho_2 \in [2, 3), \text{ είναι και ο αριθμός } \frac{\rho_1 + 3\rho_2}{4} \text{ κοινή τους λύση;}$$

(Μονάδες 5)

**ΘΕΜΑ 13368 (4°)**

Στο παρακάτω σχήμα οι κορυφές του τετραγώνου  $EZH\Theta$  βρίσκονται πάνω στις πλευρές του τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$ .



- α) Αν η πλευρά του τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $\alpha$  και η απόσταση των κορυφών του  $EZH\Theta$  από τις αντίστοιχες κορυφές του  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $x$ , όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι το εμβαδόν του  $EZH\Theta$  δίνεται από τη σχέση:

$$(EZH\Theta) = x^2 + (\alpha - x)^2 \text{ με } 0 \leq x \leq \alpha.$$

(Μονάδες 6)

- β) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του  $EZH\Theta$  δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το μισό του εμβαδού  $AB\Gamma\Delta$ . (Μονάδες 11)
- γ) Να βρείτε την πλευρά  $\alpha$  του τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$  αν για  $x = 1$ , το εμβαδόν του  $EZH\Theta$  είναι τα δύο τρίτα του εμβαδού του  $AB\Gamma\Delta$ , δηλαδή:  $(EZH\Theta) = \frac{2}{3}(AB\Gamma\Delta)$ . (Μονάδες 8)

(Δίνεται  $\sqrt{3} \approx 1,73$ )

**ΘΕΜΑ 14123 (4°)**

Δίνεται το τριώνυμο  $f(x) = x^2 - \alpha x - (\alpha + 1)$ ,  $x \in R$ , με παράμετρο  $\alpha \in R$ .

- α) Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\alpha$  να βρείτε το πλήθος των ριζών του τριωνύμου. (Μονάδες 7)
- β) Αν είναι  $\alpha > -2$ , τότε:
- i) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί  $-1$  και  $\alpha + 1$ . (Μονάδες 4)
- ii) Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$  για την οποία το μήκος του διαστήματος λύσεων της ανίσωσης  $x^2 - \alpha x - (\alpha + 1) \leq 0$  είναι ίσο με 2024. (Μονάδες 7)
- iii) Να βρείτε το πρόσημο του  $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ . (Μονάδες 7)

**ΘΕΜΑ 14615 (4°)**

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$ , με παράμετρο  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση έχει, για οποιαδήποτε τιμή του  $\lambda$ , πραγματικές και άνισες ρίζες. (Μονάδες 6)

β) Να λύσετε την εξίσωση. (Μονάδες 7)

Έστω  $\rho_1, \rho_2$  οι ρίζες της εξίσωσης με  $\rho_1 < \rho_2$ .

γ) Να βρείτε για ποιες της παραμέτρου  $\lambda$ , η απόσταση των αριθμών  $\rho_2$  και  $-\rho_1$  πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, είναι τουλάχιστον 8. (Μονάδες 6)

δ) Θεωρούμε έναν αριθμό  $k$  ώστε  $\rho_1 < k < \rho_2$ . Να βρείτε, με απόδειξη, το πρόσημο του αριθμού  $k^2 - 2\lambda k + \lambda^2 - 1$  (Μονάδες 6)

**ΘΕΜΑ 14652 (4°)**

α) Να λύσετε την ανίσωση:  $x^2 > x$  στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός  $\alpha$  με  $\alpha > 1$ .

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$  αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

ii) Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς:  $\alpha, \alpha^2, \frac{\alpha + \alpha^2}{2}$ . (Μονάδες 7)

**ΘΕΜΑ 14653 (4°)**

Δίνεται η ανίσωση  $|x - 1| \leq 3$ . (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση (1). (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1). (Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε μία ανίσωση 2ου βαθμού που να έχει τις ίδιες ακριβώς λύσεις με την (1). (Μονάδες 8)

δ) Να δείξετε ότι αν το τετράγωνο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 8 δεν ξεπερνάει το διπλάσιό του, τότε η απόσταση του από το 1 δεν ξεπερνάει το 3. (Μονάδες 7)

**ΘΕΜΑ 14654 (4°)**

α) Δίνεται το τριώνυμο  $x^2 - 3x + 2$ ,  $x \in \Gamma$ . Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta$  με  $\alpha < \beta$  για τους οποίους ισχύει

$$(\alpha^2 - 3\alpha + 2)(\beta^2 - 3\beta + 2) < 0.$$

i) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί  $\alpha - 1$  και  $\beta - 2$  είναι ομόσημοι. (Μονάδες 10)

ii) Να δείξετε ότι  $|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$ . (Μονάδες 5)

**ΘΕΜΑ 14924 (4°)**

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου  $x^2 - x - 12$  για τις διάφορες τιμές του  $x \in \Gamma$

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι  $\left(\frac{\pi+9}{3}\right)^2 - \left(\frac{\pi+9}{3}\right) - 12 > 0$ , όπου  $\pi = 3,1415\dots$  (Μονάδες

9)

γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό  $\alpha$  ισχύει ότι  $(|\alpha| + 3)^2 - (|\alpha| + 3) - 12 < 0$ , να δείξετε ότι  $\alpha \in (-1, 1)$ . (Μονάδες 8)

**ΘΕΜΑ 14963 (4°)**

Δίνεται η εξίσωση  $|x - 4| - |x - 2| = 2$ .

α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της παραπάνω εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γεωμετρικά ότι οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ανήκουν στο  $(-\infty, 2]$  και μόνο αυτοί. (Μονάδες 8)

γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό  $x$  ισχύει ότι  $|x - 4| - |x - 2| = 2$ , τότε να δείξετε ότι  $x^2 - 6x + 8 \geq 0$ . (Μονάδες 9)

**ΘΕΜΑ 32682 (4°)**

α) i) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου:  $x^2 + 9x + 18$  (Μονάδες 4)

ii) Να λύσετε την εξίσωση:  $|x + 3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$  (Μονάδες 7)

β) i) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου  $x^2 + 9x + 18$ , για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού  $x$ . (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες ισχύει:

$$|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18 \quad (\text{Μονάδες 7})$$

**ΘΕΜΑ 33582 (4°)**

Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο  $\Pi = 40\text{cm}$ . Αν  $x\text{cm}$  είναι το μήκος του ορθογωνίου, τότε να δείξετε ότι:

α)  $0 < x < 20$ . (Μονάδες 4)

β) Το εμβαδόν  $E(x)$  του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση  $E(x) = 20x - x^2$ . (Μονάδες 8)

γ) Για το εμβαδόν  $E(x)$  του ορθογωνίου ισχύει:  $E(x) \leq 100$ , για κάθε  $x \in (0, 20)$ . (Μονάδες 6)

δ) Από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο  $40\text{cm}$ , εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς  $10\text{cm}$ . (Μονάδες 7)

**ΘΕΜΑ 33587 (4°)**

Δίνεται το τριώνυμο  $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ ,  $x \in \Gamma$ .

α) Να βρείτε το πρόσημο του παραπάνω τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του  $x \in \Gamma$  (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου:

$$f(2,999) \cdot f(-1,002). \quad (\text{Μονάδες } 7)$$

γ) Αν  $-3 < \alpha < 3$ , να βρείτε το πρόσημο του αριθμού  $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$ . (Μονάδες 9)

**ΘΕΜΑ 33698 (4°)**

Δίνεται το τριώνυμο  $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$ , με  $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα  $\Delta$  του τριωνύμου. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 7)

γ) Αν  $3 < \lambda < 12$ , τότε:

(i) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες. (Μονάδες 6)

(ii) Αν  $x_1, x_2$  με  $x_1 < x_2$  είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και  $\kappa, \mu$  είναι δύο αριθμοί με  $\kappa < 0$  και  $x_1 < \mu < x_2$ , να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου  $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

**ΘΕΜΑ 33711 (4°)**

Δίνεται το τριώνυμο:  $x^2 - 2x - 8$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού  $x$   
(Μονάδες 10)

β) Αν  $\kappa = -\frac{8889}{4444}$ , είναι η τιμή της παράστασης:  $\kappa^2 - 2\kappa - 8$  μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.  
(Μονάδες 8)

γ) Αν ισχύει  $-4 < \mu < 4$ , τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο της τιμής της παράστασης:

$$\mu^2 - 2|\mu| - 8;$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.  
(Μονάδες 7)

**ΘΕΜΑ 33712 (4°)**

Δίνεται το τριώνυμο:  $x^2 + \beta x + \beta^2$ , όπου  $\beta \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα  $\Delta$  του τριωνύμου.  
(Μονάδες 4)

β) i) Αν  $\beta \neq 0$  τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου;  
(Μονάδες 7)

ii) Πώς αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν  $\beta = 0$   
(Μονάδες 6)

γ) Με τη βοήθεια της απάντησής στο ερώτημα (β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$$

για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \beta$  που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.

(Μονάδες 8)

**ΘΕΜΑ 33855 (4°)**

α) Θεωρούμε την εξίσωση  $x^2 + 2x + 3 = \alpha$ , με παράμετρο  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\alpha$  η εξίσωση  $x^2 + 2x + 3 = \alpha$  έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.  
(Μονάδες 6)

ii) Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$  ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε.  
(Μονάδες 6)

β) Δίνεται το τριώνυμο  $f(x) = x^2 + 2x + 3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

i) Να αποδείξετε ότι  $f(x) \geq 2$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$   
(Μονάδες 7)

ii) Να λύσετε την ανίσωση  $\sqrt{f(x)} - 2 \leq 2$   
(Μονάδες 6)

**ΘΕΜΑ 33890 (4°)**

α) Να λύσετε την ανίσωση:  $x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x$  (1) (Μονάδες 10)

β) Δίνονται δύο αριθμοί  $\kappa, \lambda$  οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση:  $(\lambda - 1)/(\kappa - 1) < 0$ .

i) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των  $\kappa, \lambda$ . (Μονάδες 8)

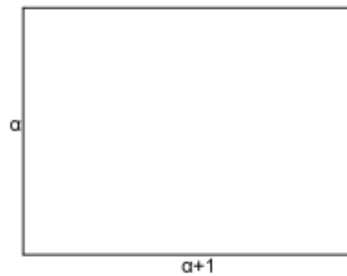
ii) Να δείξετε ότι:  $|\kappa - \lambda| \geq \frac{3}{2}$  (Μονάδες 7)

**ΘΕΜΑ 33892 (4°)**

α) Να λύσετε την ανίσωση:  $x^2 + x - 6 < 0$  (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση:  $|x - \frac{1}{2}| > 1$  (Μονάδες 5)

γ) Δίνεται το παρακάτω ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές  $\alpha$  και  $\alpha + 1$



όπου ο αριθμός  $\alpha$  ικανοποιεί τη σχέση  $|\alpha - \frac{1}{2}| > 1$ . Αν για το εμβαδόν  $E$  του ορθογωνίου ισχύει  $E < 6$ , τότε:

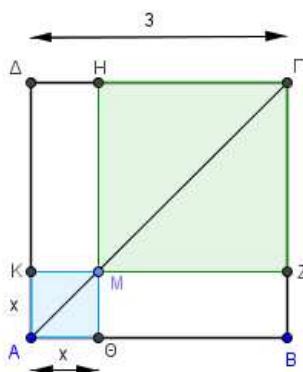
i) Να δείξετε ότι:  $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ . (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου.

(Μονάδες 5)

**ΘΕΜΑ 34182 (4°)**

Στο επόμενο σχήμα το  $ABΓΔ$  είναι τετράγωνο πλευράς  $AB=3$  και το  $M$  είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου  $ΑΓ$ . Έστω  $E$  το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος.



- α) Να αποδείξετε ότι  $E = 2x^2 - 6x + 9$ ,  $x \in (0, 3)$ . (Μονάδες 9)
- β) Να αποδείξετε ότι  $E \geq \frac{9}{2}$ , για κάθε  $x \in (0, 3)$ . (Μονάδες 8)
- γ) Για ποια θέση του  $M$  πάνω στην  $ΑΓ$  το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με  $\frac{9}{2}$ ;  
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

**ΘΕΜΑ 34185 (4°)**

- α) Να λύσετε την ανίσωση:  $x^2 - 5x - 6 < 0$ . (Μονάδες 10)
- β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού  $K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5\frac{46}{47} - 6$  και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 7)
- γ) Αν  $\alpha \in (-6, 6)$ , να βρείτε το πρόσημο της παράστασης  $\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6$ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

**ΘΕΜΑ 34186 (4°)**

Οι πλευρές  $x_1, x_2$  ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 2x + \lambda(2 - \lambda) = 0 \quad \text{με } \lambda \in (0, 2)$$

- α) Να βρείτε:  
i) την περίμετρο  $\Pi$  του ορθογωνίου. (Μονάδες 6)  
ii) το εμβαδόν  $E$  του ορθογωνίου συναρτήσει του  $\lambda$ . (Μονάδες 6)
- β) Να αποδείξετε ότι  $E \leq 1$ , για κάθε  $\lambda \in (0, 2)$  (Μονάδες 7)
- γ) Για ποια τιμή του  $\lambda$  το εμβαδόν  $E$  του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (Μονάδες 6)

**ΘΕΜΑ 34319 (4°)**

Θεωρούμε το τριώνυμο  $f(x) = 3x^2 + κx - 4$ , με παράμετρο  $κ \in \mathbb{R}$ .

- α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του  $κ$ , το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)
- β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)
- γ) Αν  $x_1$  και  $x_2$  είναι οι ρίζες του τριωνύμου και  $α, β$  είναι δύο πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε να ισχύει:  $α < x_1 < x_2 < β$ , να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου  $α \cdot f(α) \cdot β \cdot f(β)$ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

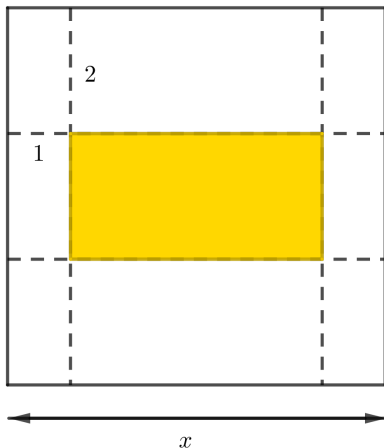
**ΘΕΜΑ 34323 (4°)**

Δίνεται το τριώνυμο  $f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- α) Να βρείτε τη διακρίνουσα  $\Delta$  του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ . (Μονάδες 10)
- β) Για ποια τιμή του  $\lambda$  το τριώνυμο έχει δύο ίσες ρίζες; (Μονάδες 6)
- γ) Αν  $\lambda \neq \frac{1}{2}$  και  $x_1, x_2$  οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με  $x_1 < x_2$ , τότε:
- να αποδείξετε ότι  $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$ , (Μονάδες 4)
  - να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου και να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:  $f(x_2), f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), f(x_2 + 1)$ . (Μονάδες 5)

**ΘΕΜΑ 35724 (4°)**

Για μια επαγγελματική κάρτα επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς  $x \text{ cm}$  ( $5 \leq x \leq 10$ ) στο οποίο η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων (με κίτρινο χρώμα στο παρακάτω σχήμα) περιβάλλεται από περιθώρια  $2 \text{ cm}$  στο πάνω και στο κάτω μέρος της και  $1 \text{ cm}$  δεξιά και αριστερά



- α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν  $E$  της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x) = (x-2)(x-4), \quad 5 \leq x \leq 10. \quad (\text{Μονάδες } 8)$$

- β) Να βρείτε την τιμή του  $x$ , ώστε το εμβαδόν  $E$  της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι  $35 \text{ cm}^2$ . (Μονάδες 7)

- γ) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά  $x$  του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον  $24 \text{ cm}^2$ . (Μονάδες 10)

#### ΘΕΜΑ 36658 (4°)

Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος  $y$  (σε cm) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή  $t$  (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση:  $y = 60t - 5t^2$ .

- α) Μετά πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος; (Μονάδες 8)
- β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί σε ύψος  $y = 175\text{m}$ ; (Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100m. (Μονάδες 9)

#### ΘΕΜΑ 36669 (4°)

Δίνονται οι ανισώσεις:  $2 \leq |x| \leq 3$  και  $x^2 - 4x < 0$ .

- α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 10)
- β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για  $x \in [2, 3]$ . (Μονάδες 5)
- γ) Αν οι αριθμοί  $\rho_1$  και  $\rho_2$  ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός  $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$  είναι κοινή τους λύση.

(Μονάδες 10)

#### ΘΕΜΑ 36670 (4°)

Δίνονται οι ανισώσεις  $|x+1| \leq 2$  και  $x^2 - x - 2 > 0$ .

- α) Να λύσετε τις ανισώσεις. (Μονάδες 10)
- β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για  $x \in [-3, -1)$ . (Μονάδες 5)
- γ) Αν οι αριθμοί  $\rho_1$  και  $\rho_2$  ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι:  $\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$ . (Μονάδες 10)

**ΘΕΜΑ 36678 (4<sup>ο</sup>)**

α) Να λύσετε την ανίσωση  $x^2 < x$  στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός  $\alpha$  με  $0 < \alpha < 1$ .

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, τους αριθμούς:

$$0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

(Μονάδες 10)

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα  $\sqrt{1+\alpha} < 1 + \sqrt{\alpha}$ .

(Μονάδες 7)