

ΦΥΛΛΟ 9

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$\alpha) \frac{x^2}{2} - 3x + 4 \quad \beta) x^2 - (2 - \sqrt{2})x - \sqrt{8} \quad \gamma) 9x^2 - 9\sqrt{3}x + 6$$

$$\delta) x^4 - 5x^2 + 4 \quad \epsilon) -x^2 + 3|x| + 4$$

2. Να απλοποιήσετε τις επόμενες παραστάσεις :

$$\alpha) \frac{2\alpha^2 + 3\alpha\beta + \beta^2}{2\alpha^2 + \alpha\beta - \beta^2} \quad \beta) \frac{3\alpha^2 - 5\alpha\beta - 2\beta^2}{-2\beta^2 + \alpha^2 - \alpha\beta}$$

3. Δίνονται τα τριώνυμα $A(x) = x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 + 5\lambda + 10$ και $B(x) = x^2 + 4x + 4\lambda + 16$. Το τριώνυμο $A(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 2 και το τριώνυμο $B(x)$ αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

α) Να βρείτε τον αριθμό λ .

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση $\frac{A(x)}{B(x)}$ και στη συνέχεια να την απλοποιήσετε.

4. Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$\alpha) x^2 - 3x - 10 \leq 0$$

$$\eta) -x^2 + 2x - 3 \geq 0$$

$$\iota\gamma) x^2 < 25$$

$$\beta) -3x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

$$\theta) x^2 - 5x < 0$$

$$\iota\delta) \frac{x^2}{2} \geq 18$$

$$\gamma) 2x^2 - 4x + 2 < 0$$

$$\iota) -x^2 - 6x \geq 0$$

$$\iota\epsilon) (x+3)^2 > 4(2x+3)$$

$$\delta) -x^2 + 8x - 16 \geq 0$$

$$\iota\alpha) -x > \frac{x^2}{4}$$

$$\iota\sigma\tau) 2x(x-2) - (x-1)^2 < -4$$

$$\epsilon) -x^2 + 6x - 9 < 0$$

$$\sigma\tau) -3x^2 + 3x - 1 \leq 0$$

$$\iota\beta) x^2 - 9 \leq 0$$

$$\zeta) 3x^2 - 6x + 3 < 0$$

5. Να βρείτε για ποιες τιμές του x συναληθεύουν οι ανισώσεις :

$$\alpha) x^2 - 2x - 3 < 0 \text{ και } -x^2 + x + 2 \geq 0 \quad \beta) -2x^2 - 2x + 12 < 0 \text{ και } -3x + 12 \geq 0$$

$$\gamma) x^2 + x - 6 \leq 0 \text{ και } x^2 - 2x + 1 > 0 \quad \delta) x^2 + 4x - 5 > 0 \text{ και } x^2 - 4 \leq 0$$

$$\epsilon) 3 \leq x^2 - 2x \leq 8$$

6. Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$\alpha) x^4 - 10x^2 + 9 \geq 0 \quad \beta) x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0 \quad \gamma) x^2 - 6|x| + 8 > 0 \quad \delta) x^2 - 7|x| + 6 < 0$$

7. Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$\alpha) |x^2 + 3x - 1| < 3 \quad \beta) |x^2 - 2x - 9| > 6$$

8. Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$\alpha) |x - 3| \geq 2|x + 1| \quad \beta) 2|x + 2| < |x + 4|$$

9. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

$$\alpha) A = \sqrt{x^2 - 4x + 3} \quad \beta) B = \sqrt{5x - 4 - x^2} + \frac{1}{x^2 - 4} \quad \gamma) \Gamma = \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{x - 1}{\sqrt{x - x^2}}$$

10. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $(\lambda - 3)x^2 - 2(\lambda - 1)x + 2\lambda - 5 = 0$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

11. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \neq 2$, ώστε η εξίσωση $(\lambda - 2)x^2 + 4x + \lambda + 1 = 0$ να έχει πραγματικές ρίζες.

12. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $-x^2 + (\lambda + 5)x - 3\lambda - 7 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

13. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(\lambda^2 + 1)x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$ είναι αδύνατη για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

14. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 1)x + \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

15. Δίνεται η εξίσωση $4(\lambda - 2)x^2 - 4(2 - \lambda)x - \lambda = 0$. Να βρείτε τις τιμές των $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση :

α) να έχει δύο ρίζες άνισες β) να είναι αδύνατη γ) να έχει μία διπλή ρίζα

16. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $(\lambda - 1)x^2 + 4x + \lambda + 2$, $\lambda \neq 1$ είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

17. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $\lambda x^2 + (\lambda - 3)x + \lambda$, $\lambda \neq 0$ είναι αρνητικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

18. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ η ανίσωση $4x^2 + 4(2\mu - 1)x + 4 - 3\mu \geq 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

19. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η ανίσωση $-x^2 + (\lambda - 5)x + \lambda - 8 \leq 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

20. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η ανίσωση $(\lambda - 6)x^2 + (\lambda - 3)x - 1 < 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

21. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ η ανίσωση $(\mu - 2)x^2 - 2\mu x + 2\mu - 3 > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

22. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 2\lambda^2 - 4\lambda = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

β) Αν x_1, x_2 είναι οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι : $x_1 \cdot x_2 > 2x_1 + 2x_2 - 6$.