

ΤΕΛΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ
ΟΜΑΔΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

Ονοματεπώνυμο:

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$. **Μονάδες 6**
- A2.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών. **Μονάδες 5**
- A3.** Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$; **Μονάδες 4**
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- i) Ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$, όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$ και $u_1 = g(\alpha)$, $u_2 = g(\beta)$.
- ii) Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$ δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.
- iii) Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A είναι $1-1$, τότε είναι γνησίως μονότονη.
- iv) Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $1-1$, τότε $f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε $x \in A$.
- v) Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x ενός διαστήματος Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .

Μονάδες 10

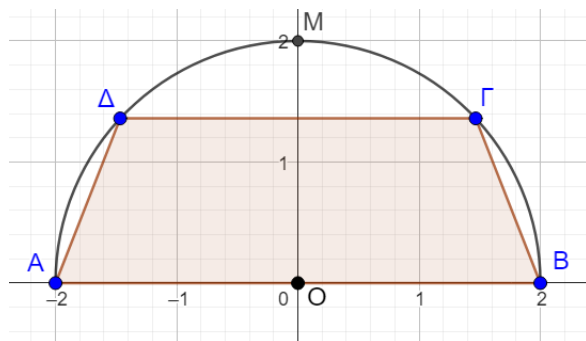
ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 1}$, $x \neq \pm 1$

- B1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της. **Μονάδες 6**
- B2.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f . **Μονάδες 6**
- B3.** i) Να βρείτε τις σχετικές θέσεις της γραφικής παράστασης της συνάρτησης της f και της ευθείας $y = x$ για τις διάφορες τιμές του $x \neq \pm 1$. **Μονάδες 2**
- ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της, να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση. **Μονάδες 7**
- B4.** Έστω $\alpha \in (0, 1)$. Να υπολογίσετε το εμβαδό $E(\alpha)$ του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία $y = x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = -\alpha$. **Μονάδες 4**

ΘΕΜΑ Γ

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ και το ισοσκελές τραπέζιο ABΓΔ με $A'(-2, 0)$ και $B(2, 0)$.



- Γ1.** Αν x είναι η τετμημένη του σημείου Γ και $-x$ η τετμημένη του σημείου Δ , να βρείτε το εμβαδό του τραpezίου ABΓΔ ως συνάρτηση του x . **Μονάδες 5**
- Γ2.** Αν το εμβαδό του τραpezίου ABΓΔ δίνεται από τη συνάρτηση $E(x) = (x+2)\sqrt{4-x^2}$, $x \in (0, 2)$,
- i) Να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου Γ για την οποία το εμβαδό του τραpezίου γίνεται μέγιστο. **Μονάδες 8**
 - ii) Υπάρχουν θέσεις του σημείου Γ για τις οποίες το εμβαδό του τραpezίου είναι ίσο με 5 τ. μονάδες; Αν ναι, πόσες; **Μονάδες 4**
- Γ3.** Αν η τετμημένη του σημείου Γ , καθώς το Γ κινείται από το σημείο M στο σημείο B , αυξάνεται με σταθερό ρυθμό $\frac{1}{2}$ μονάδες/sec για $t \in [0, 4)$, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τραpezίου τη χρονική στιγμή $t_0 = 1$ sec. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, για την οποία ισχύουν $f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right)$ και

$$\frac{f(x)}{x} = f'(x) - e \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι $f(x) = ex \ln x$, $x \in (0, +\infty)$ **Μονάδες 5**
- Δ2.** Να μελετήσετε τη μονοτονία και την κυρτότητα της συνάρτησης f . **Μονάδες 4**
- Δ3.** i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει ότι $\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x - 1} < e$. **Μονάδες 4**
- ii) Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\eta\mu x) dx > \frac{(3\sqrt{3} - 3 - \pi)e}{6}$ **Μονάδες 3**
- Δ4.** Έστω συνάρτηση g με $g(x) = \frac{\ln(x+6)}{\ln x}$ για $x \in (1, +\infty)$, η οποία είναι κυρτή στο $(1, +\infty)$.
- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$. **Μονάδες 4**
 - ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\phi(x) = \frac{\ln(f(x)+10)}{\ln(f(x)+4)} - \frac{\ln(f(x)+9)}{\ln(f(x)+3)} + 1$ και στη συνέχεια να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα x' . **Μονάδες 5**