

ΤΑ ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

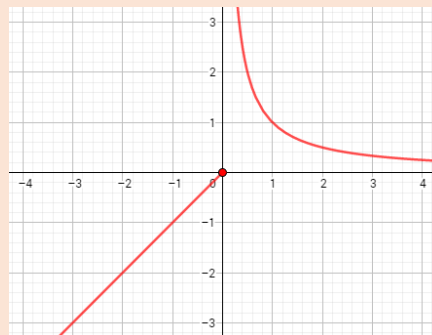
1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1. Αν μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι και «1 – 1». Το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλαδή αν μια συνάρτηση είναι 1 – 1, τότε δεν είναι υποχρεωτικά και γνησίως μονότονη.

Αντιπαράδειγμα

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

Η g είναι 1 – 1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη αφού είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.



2. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, τότε δεν είναι κατ' ανάγκη $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = 0$

Αντιπαράδειγμα

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = -\frac{1}{x^2} + 1$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Τότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} + 1 \right) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right) = +\infty$$

Όμως $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} + 1 + \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ και όχι 0.

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

3. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 , τότε δεν είναι κατ' ανάγκη παραγωγίσιμη.

Αντιπαράδειγμα

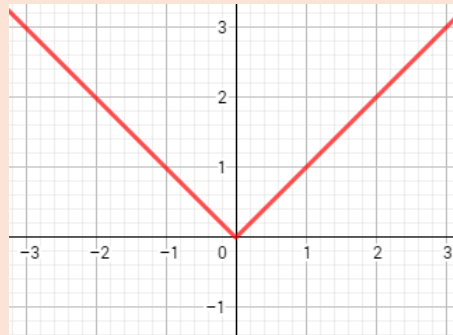
Έστω η συνάρτηση $f(x) = |x|$.

Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$,

αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό,

αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$, ενώ

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$



4. Αν f συνάρτηση παραγωγίσιμη στην ένωση διαστημάτων $A = \Delta_1 \cup \Delta_2$ με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η f δεν είναι κατ' ανάγκη σταθερή.

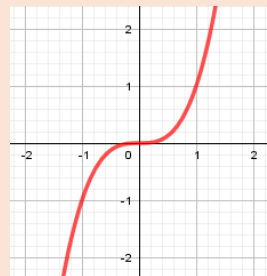
Αντιπαράδειγμα

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$. Για την f ισχύει ότι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ενώ η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

5. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα (αντίστοιχα γνησίως φθίνουσα) στο Δ , τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική (αντίστοιχα αρνητική) στο εσωτερικό του Δ .

Αντιπαράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Η παράγωγός της είναι $f'(x) = 3x^2$ αλλά δεν ισχύει ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού $f'(0) = 0$. Για την παράγωγο ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.



6. Το αντίστροφο του θεωρήματος Fermat δεν ισχύει.

Δηλαδή, αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ για το οποίο ισχύει $f'(x_0) = 0$, τότε το x_0 δεν είναι υποχρεωτικά θέση τοπικού ακροτάτου.

Αντιπαράδειγμα

Εστω η συνάρτηση $f(x) = x^3$.

Το $x_0 = 0$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$ στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη και $f'(0) = 0$. Όμως η f στο $x_0 = 0$ δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.

