

Ερωτήσεις θεωρίας στο 2^ο κεφάλαιο

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.» Με ποια από τις παρακάτω προτάσεις πρέπει να συμπληρωθούν οι προϋποθέσεις του ισχυρισμού αυτού ώστε να προκύψει αληθής πρόταση.
Α. Για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) > f(x_2)$.
Β. Για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $f(x_1) = f(x_2)$, ισχύει ότι $x_1 = x_2$.
Γ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ , με $f'(x) > 0$.
Δ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ και η f' είναι γνησίως αύξουσα.
2. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $x_0 \in \Delta$. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι λανθασμένη;
Α. Το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ είναι πραγματικός αριθμός.
Β. Η f είναι συνεχής στο x_0 .
Γ. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$.
Δ. Ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(x_0, f(x_0))$ η οποία έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
Ε. Αν το $f(x_0)$ είναι τοπικό ακρότατο της f , τότε $f'(x_0) = 0$.
3. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις συμπληρώνει τις προϋποθέσεις που καθιστούν αληθή τον παρακάτω ισχυρισμό.
«Αν η f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .»
Α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .
Β. Η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ .
Γ. Η f' είναι θετική στο εσωτερικό του Δ .
Δ. Ισχύει $f'(x_0) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο $x_0 \in \Delta$.
4. Από τις παρακάτω προτάσεις μόνο μία είναι ψευδής. Ποια είναι η πρόταση αυτή;
Α. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος Δ και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.
Β. Αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος Δ , τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της f .
Γ. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης f είναι μέγιστο της συνάρτησης αυτής.
Δ. Τα άκρα του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ στο οποίο ορίζεται μια συνάρτηση f δεν είναι πάντα θέσεις τοπικών ακροτάτων της f .

5. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς.
- A. Η συνάρτηση $f(x) = x^v$, $v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- B. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.
- Γ. Οι συναρτήσεις $f(x) = \eta \mu x$ και $f(x) = \sigma \upsilon \nu x$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$.
- Δ. Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon \phi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- E. Η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- ΣΤ. Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x) = \frac{1}{|x|}$.
- Z. Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{1}{x}$.
6. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) . Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι λανθασμένη.
- A. Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.
- B. Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.
- Γ. Η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.
- Δ. $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$.
- E. Αν ακόμα $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.
7. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα Δ . Ποια από τις παρακάτω προτάσεις δεν ισχύει πάντα;
- A. Η f είναι συνεχής στο Δ .
- B. Για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ είναι πραγματικός αριθμός.
- Γ. Αν α είναι εσωτερικό σημείο του Δ , τότε στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ ορίζεται εφαπτομένη της C_f .
- Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.
- E. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in \Delta$, τότε $f'(x_0) = 0$.
8. Στις παρακάτω προτάσεις υπάρχει μόνο μία που είναι σωστή. Να εντοπίσετε την πρόταση αυτή.
- A. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο A . Αν η f είναι συνεχής στο A και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η f είναι σταθερή στο A .
- B. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος Δ και $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 .
- Γ. Έστω μια συνεχής συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .

- Δ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και $f'(x) < 0$ στο εσωτερικό του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .
- Ε. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

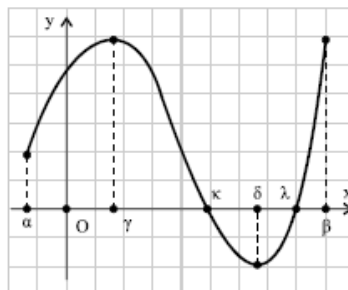
Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους

Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή ή Λανθασμένη καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις.

9. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $x_0 \in A$ και το $f(x_0)$ είναι τοπικό ακρότατο της f , τότε $f'(x_0) = 0$. **Αιτιολόγηση**
10. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $x_0 \in A$. Τότε ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(x_0, f(x_0))$ η οποία έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
11. Αν η f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x_0) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο $x_0 \in \Delta$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .
12. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος Δ και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.
13. Αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη σ' ένα εσωτερικό σημείο x_0 του διαστήματος Δ , τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της f .
14. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης f είναι μέγιστο της συνάρτησης αυτής. **Αιτιολόγηση**
15. Τα άκρα του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ στο οποίο ορίζεται μια συνάρτηση f δεν είναι πάντα θέσεις τοπικών ακροτάτων της f . **Αιτιολόγηση**
16. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .
17. Η συνάρτηση $f(x) = x^v$, $v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
18. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.

19. Οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$ και $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$.
20. Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
21. Η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
22. Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x) = \frac{1}{|x|}$.
23. Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{1}{x}$.
24. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) .
Τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.
25. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) .
Τότε $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$.
26. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in \Delta$ τότε $f'(x_0) = 0$. **Αιτιολόγηση**
27. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα Δ . Τότε Για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ είναι πραγματικός αριθμός.
28. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και $f'(x) < 0$ στο εσωτερικό του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .
29. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .
30. Έστω μια συνεχής συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ . **Αιτιολόγηση**
31. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο A . Αν η f είναι συνεχής στο A και $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η f είναι σταθερή στο A . **Αιτιολόγηση**

32. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα.
33. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τη γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$.



Να χαρακτηρίσετε ως Σωστές ή Λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις.

- α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\delta, \beta]$.
- β) Το $f(\kappa)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .
- γ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\kappa, \lambda]$.

Ερωτήσεις Συμπλήρωσης κενού

34. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες σε ένα σημείο x_0 , τότε:

$$(f \cdot g)'(x_0) = \dots\dots\dots$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \dots\dots\dots \text{ με } \dots\dots\dots \neq 0$$

35. Αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 και μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\dots\dots\dots$, τότε η σύνθεση $\dots\dots\dots \circ \dots\dots\dots$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με

$$(\dots\dots\dots \circ \dots\dots\dots)'(x_0) = \dots\dots\dots$$

36. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) . Αν στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, τότε $\dots\dots\dots$

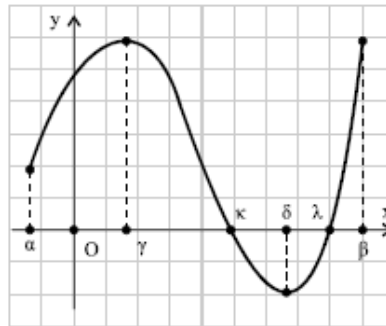
37. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) . Τότε υπάρχει

$$x_0 \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο, ώστε } \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \dots\dots\dots$$

38. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ αν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον

39. Έστω $x = S(t)$ η συνάρτηση θέσης ενός κινητού. Για τη στιγμιαία ταχύτητα $v(t_0)$ τη χρονική στιγμή t_0 , ισχύει $v(t_0) = \dots\dots\dots$

40. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τη γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$.



Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα

Στο διάστημα $[\alpha, \gamma]$ η f είναι

Το $f(\lambda)$ είναι για την f .