

ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΟ 1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ (ΟΡΙΣΜΟΙ – ΣΧΟΛΙΑ -ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ – ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ)

1. Τι ονομάζεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A .

Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$. Συμβολίζουμε: $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

2. Τι λέμε σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο A .

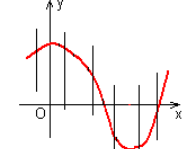
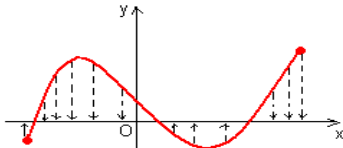
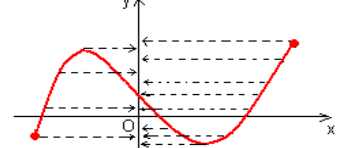
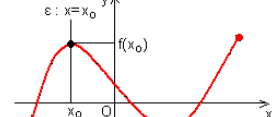
Σύνολο τιμών της συνάρτησης f λέγεται το σύνολο που έχει για στοιχεία τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$. Συμβολίζεται με $f(A)$.

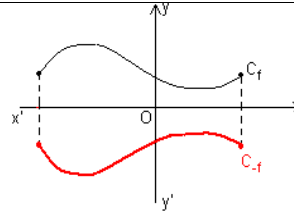
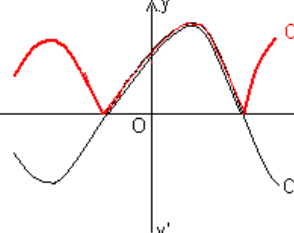
$$\text{Δηλαδή } f(A) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}.$$

3. Τι λέμε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο A .

Έστω η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$ λέγεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται με C_f .

Σχόλια στη γραφική παράσταση συνάρτησης

α) Δεν υπάρχουν σημεία της C_f με την ίδια τετμημένη. Άρα κάθε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $y'y$ τέμνει τη C_f το πολύ σε ένα σημείο.	
β) Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων της C_f . Δηλαδή είναι η προβολή της C_f στον άξονα $x'x$.	
γ) Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο των τεταγμένων $f(A)$ της C_f . Δηλαδή είναι η προβολή της C_f στον άξονα $y'y$.	
δ) Η τιμή της f στο $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της C_f με την ευθεία $\varepsilon: x = x_0$.	

ε) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ Όταν δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$ της C_f διότι αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x, f(x))$ ως προς τον άξονα $x'x$.	 The diagram shows a Cartesian coordinate system with x and y axes. A curve C_f is plotted in the upper half-plane. A second curve, C_{-f}, is plotted in the lower half-plane, such that it is a mirror image of C_f across the x-axis. The origin is labeled O.
στ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f Όταν δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f αποτελείται από τα τμήματα της C_f που είναι πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά ως προς τον $x'x$ των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.	 The diagram shows a Cartesian coordinate system with x and y axes. A curve C_f is plotted, crossing the x-axis at two points. The portion of C_f that is above the x-axis is shown in red. The portion of C_f that is below the x-axis is shown in black. A new curve, $C_{ f }$, is shown in red, which consists of the upper portion of C_f and the reflection of the lower portion across the x-axis. The origin is labeled O.

4. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες και γράφουμε $f = g$ όταν :

- Έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- Για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$

5. Πως ορίζουμε το άθροισμα, τη διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο δύο συναρτήσεων;

Έστω οι συναρτήσεις $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{R}$. Ορίζουμε :

- **Άθροισμα των f, g :** $f + g : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- **Διαφορά των f, g :** $f - g : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- **Γινόμενο των f, g :** $f \cdot g : A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- **Πηλίκο των f, g :** $\frac{f}{g} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ με $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ όπου $\Gamma = \{x \mid x \in A \text{ και } x \in B, \text{ με } g(x) \neq 0\}$

6. Τι λέμε σύνθεση μιας συνάρτησης f με μια συνάρτηση g ;

Έστω δύο συναρτήσεις f και g με πεδίο ορισμού A και B αντίστοιχα. Ονομάζουμε σύνθεση της f με την g και τη συμβολίζουμε $g \circ f$ τη συνάρτηση με :

- Πεδίο ορισμού το σύνολο $A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$ και
- Τύπο $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Σχόλια στη σύνθεση συναρτήσεων

α) Πότε ορίζεται η σύνθεση μιας συνάρτησης f με μια συνάρτηση g ;

Αν f και g με πεδίο ορισμού A και B αντίστοιχα, τότε η σύνθεση της f με την g , δηλαδή η $g \circ f$ ορίζεται όταν το σύνολο $A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\} \neq \emptyset$, δηλαδή όταν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

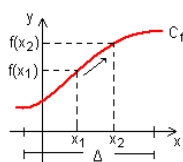
β) Είναι ίσες οι συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$;

Οι συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$, αν ορίζονται, δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

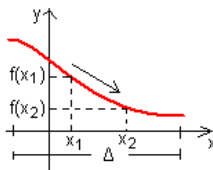
γ) Ισχύει ότι $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

7. Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα, πότε γνησίως φθίνουσα και πότε γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.



Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.



Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως μονότονη** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι είτε γνησίως αύξουσα στο Δ είτε γνησίως φθίνουσα στο Δ .

8. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο και πότε ολικό ελάχιστο;

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό μέγιστο**, το $f(x_0)$ όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$. Το $x_0 \in A$ λέγεται θέση ή σημείο μεγίστου της f .

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό ελάχιστο**, το $f(x_0)$ όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$. Το $x_0 \in A$ λέγεται θέση ή σημείο ελαχίστου της f .

9. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται 1 – 1;

Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται «1 – 1» όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 \neq x_2, \text{ τότε } f(x_1) \neq f(x_2)$$

Σχόλια στην 1 – 1 συνάρτηση

α) Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1 – 1 αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:
αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$.

β) Αν μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1 – 1, τότε ισχύει και η ισοδυναμία $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι «1 – 1», τότε η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών.

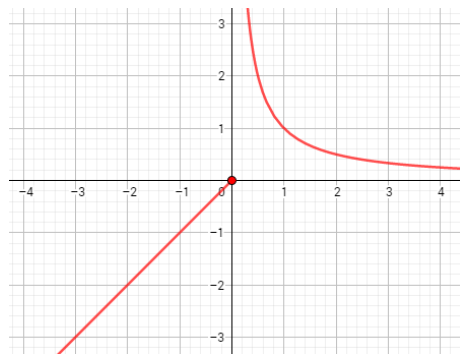
δ) Αν μια συνάρτηση f είναι «1 – 1», τότε δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση σε ένα το πολύ σημείο.

ε) Αν μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι και «1 – 1». Το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλαδή αν μια συνάρτηση είναι 1 – 1, τότε δεν είναι υποχρεωτικά και γνησίως μονότονη.

Αντιπαράδειγμα

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

Η g είναι 1 – 1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη αφού είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.



10. Πότε μια συνάρτηση αντιστρέφεται;

Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστρέφεται αν και μόνο αν είναι 1-1.

11. Αν μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστρέφεται να ορίσετε την αντίστροφή της f^{-1} .

Αν η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε η αντίστροφή της f^{-1} είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$, για το οποίο $f(x) = y$.

Δηλαδή η αντίστροφή της f είναι η συνάρτηση:

$$f^{-1} : f(A) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f^{-1}(y) = x \text{ αν και μόνο αν } f(x) = y$$

Σχόλια στην αντίστροφή συνάρτηση

- α) Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f .
- β) Το σύνολο τιμών της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού της f .
- γ) Ισχύουν οι ισότητες: $f^{-1}(f(x)) = x$, για κάθε $x \in A$
 $f(f^{-1}(x)) = x$, για κάθε $x \in f(A)$
- δ) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

12. Πότε λέμε ότι το όριο μιας συνάρτησης $f(x)$ στο x_0 είναι ℓ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Ο αριθμός ℓ λέγεται όριο της f στο x_0 όταν οι τιμές της f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον αριθμό ℓ καθώς το x προσεγγίζει με οποιοδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 , Συμβολίζουμε: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$

13. Πότε λέμε ότι το αριστερό πλευρικό όριο μιας συνάρτησης $f(x)$ στο x_0 είναι ℓ .

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη τουλάχιστον σε ένα σύνολο της μορφής (α, x_0) . Ο αριθμός ℓ λέγεται αριστερό πλευρικό όριο της f στο x_0 όταν οι τιμές της f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον αριθμό ℓ καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μικρότερες τιμές ($x < x_0$). Συμβολίζουμε: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$

14. Πότε λέμε ότι το δεξί πλευρικό όριο μιας συνάρτησης $f(x)$ στο x_0 είναι ℓ .

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη τουλάχιστον σε ένα σύνολο της μορφής (x_0, β) . Ο αριθμός ℓ λέγεται δεξί πλευρικό όριο της f στο x_0 όταν οι τιμές της f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον αριθμό ℓ καθώς το x προσεγγίζει το x_0 από μεγαλύτερες τιμές ($x > x_0$). Συμβολίζουμε: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$

15. Ιδιότητες ορίων στο x_0

α) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - l) = 0$

β) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = l$

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε ισχύει η ισοδυναμία

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$$

δ) Θεώρημα

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

ε) Θεώρημα

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 τότε :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

στ) Κριτήριο παρεμβολής :

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h για τις οποίες ισχύουν τα εξής :

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0

- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$.

Τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

ζ) Όρια και πράξεις

1. Όριο της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c : \lim_{x \rightarrow x_0} c = c$

2. Όριο της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x : \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$

3. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f, g στο x_0 τότε :

i) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} (\kappa f(x)) = \kappa \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$

iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

iv) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$, όπου $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$

v) $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$

$$\text{vi) } \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} \text{ όπου } f(x) \geq 0 \text{ κοντά στο } x_0$$

$$\text{vii) } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^\nu = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^\nu, \quad \nu \in \mathbb{N}^*$$

$$4. \lim_{x \rightarrow x_0} x^\nu = x_0^\nu$$

η) Όριο πολυωνυμικής συνάρτησης : $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.

Απόδειξη

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_\nu x^\nu) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_{\nu-1} x^{\nu-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 \\ &= \alpha_\nu \lim_{x \rightarrow x_0} x^\nu + \alpha_{\nu-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{\nu-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 \\ &= \alpha_\nu x_0^\nu + \alpha_{\nu-1} x_0^{\nu-1} + \dots + \alpha_0 \\ &= P(x_0) \end{aligned}$$

θ) Όριο ρητής συνάρτησης : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, όπου $Q(x_0) \neq 0$

Απόδειξη

Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$

$$\text{Τότε: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

ι) Τριγωνομετρικά όρια

$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$
Χρήσιμες ιδιότητες για τον υπολογισμό τριγωνομετρικών ορίων :	
$ \eta\mu x \leq x $ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $ \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \eta\mu x \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$	

ια) Όριο σύνθετης συνάρτησης: Υπολογισμός του ορίου $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$:

1. Θέτουμε $u = g(x)$.
 2. Υπολογίζουμε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} u = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$.
 3. Υπολογίζουμε το όριο $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = l$.
- Τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = l$

16. Πότε λέμε ότι το όριο μιας συνάρτησης f στο x_0 είναι $+\infty$ και πότε $-\infty$;

- Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο το $+\infty$, όταν καθώς το x παίρνει τιμές που προσεγγίζουν με οποιοδήποτε τρόπο το x_0 οι αντίστοιχες τιμές της f αυξάνονται απεριόριστα και γίνονται μεγαλύτερες από οποιοδήποτε θετικό αριθμό M .
Γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.
- Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο το $-\infty$, όταν καθώς το x παίρνει τιμές που προσεγγίζουν με οποιοδήποτε τρόπο το x_0 οι αντίστοιχες τιμές της f μειώνονται απεριόριστα και γίνονται μικρότερες από οποιοδήποτε αρνητικό αριθμό $-M$.
Γράφουμε : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

17. Βασικές ιδιότητες μη πεπερασμένων ορίων

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

- α)** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$
- β)** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .
Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .
- γ)** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty$
Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$.
- δ)** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.
- ε)** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.
- στ)** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$.

ζ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$.

η) Βασικά όρια : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2\nu}} = +\infty$, $\nu \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty, \quad \nu \in \mathbb{N}^*, \text{ άρα δεν υπάρχει το όριο } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2\nu+1}}, \quad \nu \in \mathbb{N}.$$

18.Ορισμοί για το όριο συνάρτησης στο $+\infty$

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, +\infty)$.

- Η συνάρτηση f έχει στο $+\infty$ όριο το l : όταν καθώς το x αυξάνει απεριόριστα ($x \rightarrow +\infty$), οι αντίστοιχες τιμές της f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό l . Γράφουμε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.
- Η συνάρτηση f έχει στο $+\infty$ όριο το $+\infty$: όταν καθώς το x αυξάνει απεριόριστα ($x \rightarrow +\infty$), οι αντίστοιχες τιμές της f αυξάνονται απεριόριστα. Γράφουμε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- Η συνάρτηση f έχει στο $+\infty$ όριο το $-\infty$: όταν καθώς το x αυξάνει απεριόριστα ($x \rightarrow +\infty$), οι αντίστοιχες τιμές της f μειώνονται απεριόριστα. Γράφουμε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

19.Ορισμοί για το όριο συνάρτησης στο $-\infty$

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(-\infty, \beta)$.

- Η συνάρτηση f έχει στο $-\infty$ όριο το l : όταν καθώς το x μειώνει απεριόριστα ($x \rightarrow -\infty$), οι αντίστοιχες τιμές της f προσεγγίζουν όσο θέλουμε τον πραγματικό αριθμό l . Γράφουμε: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$.
- Η συνάρτηση f έχει στο $-\infty$ όριο το $+\infty$: όταν καθώς το x μειώνει απεριόριστα ($x \rightarrow -\infty$), οι αντίστοιχες τιμές της f αυξάνονται απεριόριστα. Γράφουμε : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
- Η συνάρτηση f έχει στο $-\infty$ όριο το $-\infty$: όταν καθώς το x μειώνει απεριόριστα ($x \rightarrow -\infty$), οι αντίστοιχες τιμές της f μειώνονται απεριόριστα. Γράφουμε : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

20. Όρια βασικών συναρτήσεων στο $\pm\infty$

- Πολυωνυμική συνάρτηση

Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $\alpha_n \neq 0$ ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha_n x^n) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha_n x^n)$$

- Ρητή συνάρτηση

Για τη ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_k x^k + \beta_{k-1} x^{k-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}$, $\alpha_n \neq 0$, $\beta_k \neq 0$ ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n x^n}{\beta_k x^k} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\alpha_n x^n}{\beta_k x^k}.$$

- Εκθετική συνάρτηση

$$\text{Αν } \alpha > 1: \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0.$$

$$\text{Αν } 0 < \alpha < 1: \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty.$$

- Λογαριθμική συνάρτηση

$$\alpha > 1: \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_\alpha x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_\alpha x = -\infty$$

$$0 < \alpha < 1: \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_\alpha x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_\alpha x = +\infty$$

21. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Έστω f μια συνάρτηση και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Η f είναι συνεχής στο x_0 όταν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

22. Πότε μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν:

- Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 .
- ή
- Υπάρχει το όριό της στο x_0 , αλλά $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

23. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής συνάρτηση;

Μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής συνάρτηση, όταν είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της.

24. Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα ανοικτό διάστημα (α, β) ;

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα ανοικτό διάστημα (α, β) όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) .

25. Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$.

26. Συνέχεια και πράξεις συναρτήσεων

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους, τότε συνεχείς στο x_0 θα είναι και οι συναρτήσεις:

$$\bullet f + g, \quad \bullet c \cdot f, c \in \mathbb{R}, \quad \bullet f \cdot g, \quad \bullet \frac{f}{g}, \quad \bullet |f|, \quad \bullet \sqrt{f}$$

με την προϋπόθεση ότι οι παραπάνω συναρτήσεις ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το x_0 .

27. Συνέχεια και σύνθεση συναρτήσεων

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 , και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

28. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano

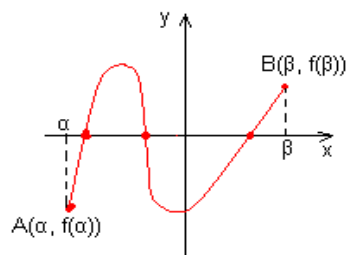
Έστω f συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και για την οποία ισχύουν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$,
- $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$

Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

29. Να γράψετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Bolzano.

Αν η γραφική παράσταση C_f μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha, \beta]$ διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ τα οποία βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, τότε η C_f τέμνει τον $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο $\Xi(\xi, 0)$ με $\xi \in (\alpha, \beta)$.



30. Οι συνέπειες του θεωρήματος Bolzano ως προς το πρόσημο συνάρτησης

- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δεν έχει ρίζα σ' αυτό (δηλαδή $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$), τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ (δηλαδή είτε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ είτε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$).
- Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

31. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών (ΘΕΤ)

Έστω f συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και για την οποία ισχύουν :

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$,
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

Τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$ και έστω η τέτοιος ώστε $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$. Παρατηρούμε ότι :

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
- $$\left. \begin{array}{l} g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0 \\ g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(\alpha) \cdot g(\beta) < 0$$

Άρα για τη συνάρτηση g ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - \eta = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \eta$.

32. Βασική συνέπεια του ΘΕΤ

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

33. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέγιστης – Ελάχιστης Τιμής

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m . Δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια ώστε $f(x_1) = m$ και $f(x_2) = M$ για τα οποία ισχύει $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

34. Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f

	$\Delta = [\alpha, \beta]$	$\Delta = (\alpha, \beta)$	$\Delta = [\alpha, \beta)$	$\Delta = (\alpha, \beta]$
$f \uparrow$	$f(\Delta) = [f(\alpha), f(\beta)]$	$f(\Delta) = (A, B)$	$f(\Delta) = [f(\alpha), B)$	$f(\Delta) = (A, f(\beta)]$
$f \downarrow$	$f(\Delta) = [f(\beta), f(\alpha)]$	$f(\Delta) = (B, A)$	$f(\Delta) = (B, f(\alpha)]$	$f(\Delta) = [f(\beta), A)$

Όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$