

ΘΕΩΡΙΑ ΣΤΟ 3^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ (ΟΡΙΣΜΟΙ – ΣΧΟΛΙΑ -ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ – ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ)

1.Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ ;

Έστω f συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ . **Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα** της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και για την οποία ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

2.Θεώρημα

Έστω f συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ τότε :

1. Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ .
2. Κάθε άλλη παράγουσα της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

Εφόσον F είναι μια παράγουσα της f στο Δ τότε $F'(x) = f(x)$.

1. Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσα της f στο Δ αφού $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.
2. Έστω G μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε $G'(x) = f(x)$.
Οπότε $G'(x) = f(x)$ και $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$. Συνεπώς $G'(x) = F'(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.
Άρα υπάρχει σταθερά c ώστε $G(x) = F(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$.

3.Παράγουσες βασικών συναρτήσεων

- $f(x) = 0 \longrightarrow F(x) = c$
- $f(x) = 1 \longrightarrow F(x) = x$
- $f(x) = x^a \longrightarrow F(x) = \frac{x^{a+1}}{a+1}$, $a \neq -1$
- $f(x) = \frac{1}{x} \longrightarrow F(x) = \ln|x|$
- $f(x) = e^x \longrightarrow F(x) = e^x$
- $f(x) = a^x \longrightarrow F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$, $0 < a \neq 1$
- $f(x) = \sigma \upsilon \nu x \longrightarrow F(x) = \eta \mu x$
- $f(x) = \eta \mu x \longrightarrow F(x) = -\sigma \upsilon \nu x$
- $f(x) = \frac{1}{\sigma \upsilon \nu^2 x} \longrightarrow F(x) = \varepsilon \varphi x$
- $f(x) = \frac{1}{\eta \mu^2 x} \longrightarrow F(x) = -\sigma \varphi x$

4.Ιδιότητες Ορισμένου Ολοκληρώματος

Αν f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τότε ισχύουν :

- $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$
- $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$
- $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$
- $\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) + g(x)] dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$
- $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$
- $\int_{\alpha}^{\beta} c dx = c(\beta - \alpha), c \in \mathbb{R}$
- Αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

- Αν $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$.
- Έστω f συνάρτηση συνεχής σε διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$.
- Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η ισότητα $f(x) = g(x)$ δεν ισχύει για όλα τα $x \in [\alpha, \beta]$, τότε ισχύει : $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$.

5.Θεώρημα

Αν f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και α ένα σημείο του Δ . Τότε η συνάρτηση

$F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt, x \in \Delta$ είναι μια παράγουσα της f στο Δ . Δηλαδή ισχύει :

$$\left(\int_{\alpha}^x f(t) dt \right)' = f(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

6.Θεώρημα (Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού)

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$ τότε : $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$

Απόδειξη

Η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$.

Επειδή και η G είναι παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$ θα ισχύει : $G(x) = F(x) + c$ (1).

Από την (1) για $x = \alpha \rightarrow G(\alpha) = F(\alpha) + c \Leftrightarrow G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t) dt + c \Leftrightarrow G(\alpha) = c$. Δηλαδή $c = G(\alpha)$.

Άρα η σχέση (1) γίνεται : $G(x) = F(x) + G(\alpha)$. Για $x = \beta$ έχουμε :

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) \Leftrightarrow G(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt + G(\alpha) \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

7. Μέθοδοι Ολοκλήρωσης

- Τύπος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g'(x) dx = \left[f(x) \cdot g(x) \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) \cdot g(x) dx, \text{ όπου } f', g' \text{ συνεχείς στο } [\alpha, \beta]$$

- Τύπος ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u) du$$

όπου f, g' συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x) dx$, $u_1 = g(\alpha)$, $u_2 = g(\beta)$

8. Εμβαδό επίπεδου χωρίου

- Εμβαδόν επίπεδου χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$, όπου f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx$$

- Εμβαδόν επίπεδου χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$, όπου f, g συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx$$

