

ΟΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ

Κεφάλαιο 1°

1. Θεώρημα (όριο πολυωνυμικής συνάρτησης)

Το όριο μιας πολυωνυμικής συνάρτησης είναι: $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.

Απόδειξη

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_n x^n) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_{n-1} x^{n-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 \\ &= \alpha_n \lim_{x \rightarrow x_0} x^n + \alpha_{n-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 = \alpha_n x_0^n + \alpha_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + \alpha_0 = P(x_0) \end{aligned}$$

2. Θεώρημα (όριο ρητής συνάρτησης)

Το όριο μιας ρητής συνάρτησης είναι: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, όπου $Q(x_0) \neq 0$

Απόδειξη

Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$

$$\text{Τότε: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

3. Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

Έστω f συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και για την οποία ισχύουν :

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$,
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

Τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \eta$.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$ και έστω η τέτοιος ώστε $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$. Παρατηρούμε ότι :

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
- $\left. \begin{aligned} g(\alpha) &= f(\alpha) - \eta < 0 \\ g(\beta) &= f(\beta) - \eta > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(\alpha) \cdot g(\beta) < 0$

Άρα για τη συνάρτηση g ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - \eta = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \eta$.

Κεφάλαιο 2°

4. Θεώρημα (Παράγωγος και συνέχεια)

Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε θα είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Απόδειξη

Για $x \neq x_0$: $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$, οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = f'(x_0) \cdot 0, \text{ αφού η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \text{ άρα η } f \text{ είναι συνεχής στο } x_0$$

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

5. Θεώρημα (Παράγωγος αθροίσματος συναρτήσεων)

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα σημείο x_0 , τότε και η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Απόδειξη

Για $x \neq x_0$, ισχύει :

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$\text{Δηλαδή } (f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

6. Θεώρημα (Παράγωγος σταθερής συνάρτησης)

Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 0$, δηλαδή $(c)' = 0$.

Απόδειξη (με ορισμό παραγώγου)

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τυχαίο. Τότε για $x \neq x_0$ ισχύει $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$.

Άρα $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$. Άρα $(c)' = 0$.

7. Θεώρημα (Παράγωγος ταυτοτικής συνάρτησης)

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1$, δηλαδή $(x)' = 1$.

Απόδειξη (με ορισμό παραγώγου)

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τυχαίο. Τότε για $x \neq x_0$ ισχύει $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$.

Άρα $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$. Άρα $(x)' = 1$.

8. Θεώρημα

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^v$, $v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = vx^{v-1}$, δηλαδή $(x^v)' = vx^{v-1}$.

Απόδειξη (με ορισμό παραγώγου)

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τυχαίο. Τότε για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^v - x_0^v}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1})}{x - x_0} = x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}$$

Άρα

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}) = x_0^{v-1} + x_0^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1} = vx_0^{v-1}.$$

Άρα $(x^v)' = vx^{v-1}$.

9. Θεώρημα

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή $(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$.

Απόδειξη (με παράγωγο πηλίκου)

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R}^* \text{ έχουμε: } (x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^{\nu}} \right)' = \frac{(1)' x^{\nu} - 1(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}.$$

10. Θεώρημα

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Απόδειξη (με παράγωγο σύνθεσης)

Ισχύει ότι $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ και θέτουμε $u = \alpha \ln x$.
Τότε χρησιμοποιώντας τον κανόνα παραγωγίσης για τη σύνθεση συναρτήσεων θα έχουμε:
 $(x^{\alpha})' = (e^{\alpha \ln x})' = (e^u)' = e^u u' = e^{\alpha \ln x} \cdot (\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$

11. Θεώρημα

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ δηλαδή $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Απόδειξη (με ορισμό παραγώγου)

Έστω $x_0 \in (0, +\infty)$ τυχαίο. Τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}. \text{ Άρα } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Παρατήρηση: Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$ αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

12. Θεώρημα

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ δηλαδή $(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

Απόδειξη (με παράγωγο πηλίκου)

Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ έχουμε :

$$\begin{aligned} (\varepsilon\phi x)' &= \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \right)' = \frac{(\eta\mu x)' \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\ &= \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \end{aligned}$$

13. Θεώρημα

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$ δηλαδή $(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha$.

Απόδειξη (με παράγωγο σύνθεσης)

Ισχύει ότι $\alpha^x = e^{x \ln \alpha}$ και θέτουμε $u = x \ln \alpha$. Τότε χρησιμοποιώντας τον κανόνα παραγωγίσιμης για τη σύνθεση συναρτήσεων θα έχουμε :

$$(\alpha^x)' = (e^{x \ln \alpha})' = (e^u)' = e^u u' = e^{x \ln \alpha} \cdot (x \ln \alpha)' = e^{x \ln \alpha} \cdot \ln \alpha = \alpha^x \cdot \ln \alpha.$$

14. Θεώρημα

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{x}$ δηλαδή $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

Απόδειξη (με παράγωγο σύνθεσης)

- Αν $x > 0$, τότε $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$
- Αν $x < 0$, τότε $\ln|x| = \ln(-x)$. Αν θέσουμε $u = -x$ έχουμε :
$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

15. Θεώρημα (Συνέπεια του Θ.Μ.Τ.)

Έστω συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ για την οποία ισχύουν :

- η f είναι συνεχής στο Δ και
 - $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,
- τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

- Αν $x_1 = x_2$ τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

Άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2) : f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (1). Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο

του Δ από την υπόθεση ισχύει ότι $f'(\xi) = 0$ και άρα από την (1) προκύπτει ότι :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_2) = f(x_1)$$

- Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$ με Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[x_2, x_1]$.

Σε όλες λοιπόν τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$

16. Θεώρημα (Συνέπεια του Θ.Μ.Τ.)

Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σ' ένα διάστημα Δ για τις οποίες ισχύουν :

- οι f, g συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει $f(x) = g(x) + c$.

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \Delta$. Η h είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$. Άρα από το προηγούμενο θεώρημα υπάρχει σταθερός αριθμός c ώστε $h(x) = c$ για κάθε $x \in \Delta$.

Άρα $h(x) = f(x) - g(x) = c \Leftrightarrow f(x) = g(x) + c$.

17. Θεώρημα (Μονοτονία συνάρτησης)

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ .

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

Απόδειξη

Έστω $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα αποδείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

Στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$ έχουμε ότι $f(x_2) - f(x_1) > 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Όμοια αν $f'(x) < 0$.

18. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα Fermat

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό τότε : $f'(x_0) = 0$.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in \Delta$ τοπικό μέγιστο.

Αφού το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$ (1) για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ ισχύει $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (2)

- Αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ τότε από την (1) : $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ οπότε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (3).$$

- Αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ τότε από την (1) : $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ οπότε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad (4).$$

Από τις σχέσεις (2), (3), (4) έπεται ότι $f'(x_0) = 0$.

19. Θεώρημα (Κριτήριο 1^{ης} παραγώγου)

Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

- i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .
- ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .
- iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

Απόδειξη

- i) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$ (1).

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in [x_0, \beta)$ (2).

Επομένως λόγω των (1) και (2) ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

- ii) Εργαζόμαστε με όμοιο τρόπο.

- iii) Έστω $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 , θα είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f .

Τώρα θα αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) . Έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$

- Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$
- Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$
- Αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .

Ομοίως αν $f'(x) < 0$.

20. Θεώρημα

Έστω f συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ τότε :

1. Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ .
2. Κάθε άλλη παράγουσα της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

Εφόσον F είναι μια παράγουσα της f στο Δ τότε $F'(x) = f(x)$.

1. Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσα της f στο Δ αφού

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

2. Έστω G μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε $G'(x) = f(x)$.

Οπότε $G'(x) = f(x)$ και $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$. Συνεπώς $G'(x) = F'(x)$ για κάθε $x \in \Delta$. Άρα υπάρχει σταθερά c ώστε $G(x) = F(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$.

21. Θεώρημα (Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού)

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$ τότε : $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$

Απόδειξη

Η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$.

Επειδή και η G είναι παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$ θα ισχύει : $G(x) = F(x) + c$ (1).

Από την (1) για $x = \alpha \rightarrow G(\alpha) = F(\alpha) + c \Leftrightarrow G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t) dt + c \Leftrightarrow G(\alpha) = c$. Δηλαδή $c = G(\alpha)$.

Άρα η σχέση (1) γίνεται : $G(x) = F(x) + G(\alpha)$. Για $x = \beta$ έχουμε :

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) \Leftrightarrow G(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt + G(\alpha) \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$$