

ΦΥΛΛΟ 1

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :

$$\text{i)} \quad f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-9}$$

$$\text{vii)} \quad f(x) = \log_{(x-1)}(3-x)$$

$$\text{ii)} \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x-15}}{x^2-16}$$

$$\text{viii)} \quad f(x) = \log(2 - \log x)$$

$$\text{iii)} \quad f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - x}}$$

$$\text{ix)} \quad f(x) = e^{\phi \frac{x}{4}}$$

$$\text{iv)} \quad f(x) = \frac{x-6}{\log(x-4)}$$

$$\text{x)} \quad f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{2\eta\mu x - 1}$$

$$\text{v)} \quad f(x) = \ln(e^x - 1)$$

$$\text{xi)} \quad f(x) = \sqrt{\ln(x-3)}$$

$$\text{vi)} \quad f(x) = \log_x(2-x)$$

$$\text{xii)} \quad f(x) = \sqrt{1-|x-2|}$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{|x+5|-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$.

γ) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2-x^2, & \text{αν } x \leq 1 \\ 1-x, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(f(4))$.

γ) Να βρείτε τα $\alpha \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $f(\sin \alpha) = \frac{7}{4}$.

δ) Να βρείτε τα $\lambda \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $f(\lambda^2 - 4\lambda + 6) = -10$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{αν } x < 2\lambda^2 - 4\lambda + 3 \\ 2x + 2, & \text{αν } x \geq \lambda \end{cases}$ και $\lambda \in \mathbb{Z}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

β) Να προσδιορίσετε τον $\alpha \in (0, 1)$, ώστε να ισχύει

$$(f(\alpha) + f(\alpha+1)) \left(\alpha f\left(\frac{1}{\alpha}\right) + f\left(\frac{1}{\alpha+1}\right) \right) = 1.$$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f .
- γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{|x| - x}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq \frac{7}{2}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f .
- γ) Να βρείτε για ποια τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x) = \frac{3}{2}(x+3) + \mu$ έχει ακριβώς μια λύση.

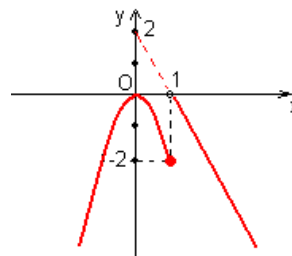
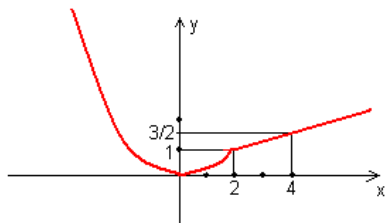
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln^2(x^2) - \ln(x^4)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 8$.
- γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f .

8. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f όταν $f(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{αν } x > e \\ -x, & \text{αν } x \leq e \end{cases}$.

9. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$.

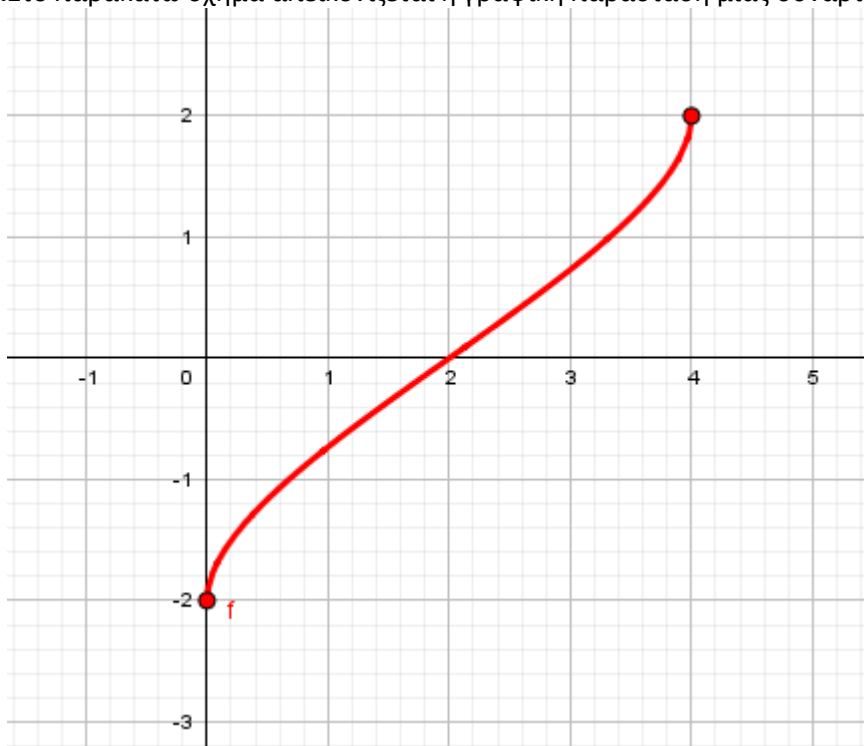
10. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο επόμενο σχήμα.



11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } -2 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$.

- α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
- β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- γ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = a$ για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$

12. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .
 β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
 γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \sqrt{2}$.
 δ) Ποιος από τους παρακάτω τύπους μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης f ;

(i) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$

(ii) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{4-x}}$

(iii) $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{4-x}$

(iv) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{4-x}}$

13. Αν $f(x) = (\alpha^2 - 5)x^2 + 2x + 3$ και $g(x) = x^2 + \beta x + 1$, να προσδιορίσετε τις τιμές των α και β , ώστε οι f και g να έχουν κοινά σημεία πάνω στην ευθεία με εξίσωση $x = -1$ καθώς και στην ευθεία με εξίσωση $x = 1$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha + \beta x^2, & \text{αν } x < 2 \\ \beta x^2 + (\alpha - 3)x, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και η γραφική της

παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-4, -7)$ και $B(3, 9)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 9$ και $\beta = -1$.

γ) Να υπολογίσετε την τιμή $f(f(7))$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 5$.

ε) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

15. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2^x \ln x + 24 \ln \alpha$ και $g(x) = 8 \ln x + 2^x \ln(\alpha + 6)$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = 3$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g .

16. Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) = x^2 - 2x$ για κάθε $x \geq 0$.

α) Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

γ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \alpha$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$

17. α) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{x^2 + 1} + x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x + \alpha}{\sqrt{x^2 + 1} + x - \alpha}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται

από το σημείο $M\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

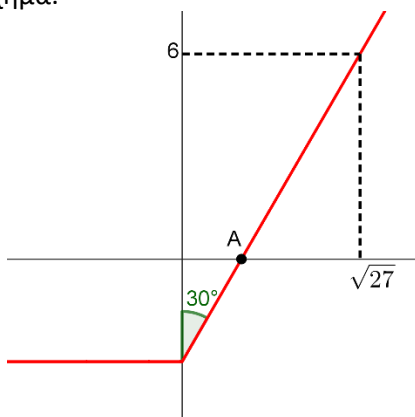
i) Να βρείτε τον αριθμό α .

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

iii) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

iv) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

18. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

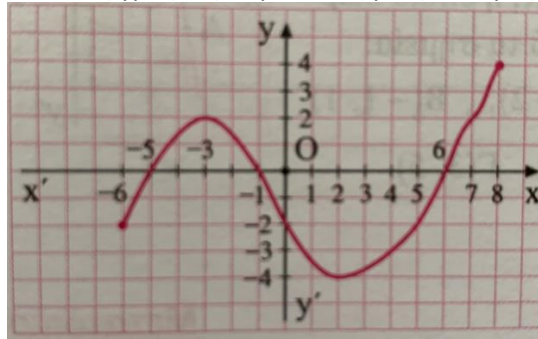


α) Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

19. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.



- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .
- β) Να βρείτε τις τιμές $f(7)$, $f(f(4))$ και $f(f(6))$.
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2$.
- δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$.
- ε) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f^2(x) + 2f(x) - 3 = 0$.
- στ) Να βρείτε τα x για τα οποία ισχύει $f^2(x) \leq 2f(x)$.
- ζ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \alpha$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |\eta\mu x| - \eta\mu x$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f έχει περίοδο 2π .
- β) Για τις διάφορες τιμές του $x \in [0, 2\pi]$ να γράψετε τον τύπο της f , χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.
- γ) Να σχεδιάσετε τη C_f στο διάστημα $[-2\pi, 4\pi]$.
- δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- ε) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $g(x) = x + \frac{1}{x}$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2f(x) - f(-x) = e^x + e^{-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i) Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $M(0, 2)$.
- ii) Να προσδιορίσετε τον τύπο της f και να αποδείξετε ότι είναι άρτια συνάρτηση.

22. Μια συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα: $f\left(\frac{x}{e}\right) \leq \ln x \leq f(x) - 1$ για κάθε $x > 0$. Να προσδιοριστεί ο τύπος της.

23. Να βρείτε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν ισχύει ότι $2f(x) + f(2-x) = 3x + 12$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

24. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια μη σταθερή συνάρτηση με τις ιδιότητες $f(xy) = f(x)f(y)$ και $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι :

- i) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ και $f(-1) = 1$.
- ii) Η συνάρτηση f είναι άρτια.
- iii) Ο τύπος της f είναι $f(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

25. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x)f(1-x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

26. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $(f^2 + g^2)(x) \leq 2(f + g)(x) - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι $f = g$.

27. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f + g$, fg , $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$ όταν :

- i) $f(x) = \frac{x-4}{2-x}$ και $g(x) = \frac{x^2-3x}{x-2}$
- ii) $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ και $g(x) = \frac{x^3-x}{x-2}$
- iii) $f(x) = \frac{|x|}{3+|x|}$ και $g(x) = \frac{6-2|x|}{x^2-9}$

28. Αν $f(x) = 2x-1$ και $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, να ορίσετε τις συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$.

29. Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \sqrt{x-1}$, να βρεθούν οι συναρτήσεις :

- i) $g \circ f$ ii) $f \circ g$ iii) $f \circ f$

30. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x}{x-2}$ και $g(x) = \sqrt{x-1}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις :

- α) $g \circ f$, β) $f \circ g$, γ) $f \circ \frac{1}{f}$.

31. Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A = (-1, 2]$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης α) $f(2x-1)$, β) $f(x^2)$.

32. Να βρεθεί συνάρτηση f τέτοια, ώστε να ισχύει :

- i) $f(g(x)) = 12x^2 - 14x + 4$, αν $g(x) = 1 - 2x$.
- ii) $f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$, αν $g(x) = -(x-1)^2$.
- iii) $g(x) = 2x-1$ και $(f \circ g)(x) = x^2 + 4$

iv) $g(x) = 1 + \ln x$ και $(f \circ g)(x) = 2 + x$

33. Να βρεθεί συνάρτηση f τέτοια, ώστε να ισχύει :

i) $(g \circ f)(x) = |\eta \mu x|$, αν $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ και $f(x) \geq 0$.

ii) $(g \circ f)(x) = 1 - \sigma \upsilon \nu x$, αν $g(x) = (x-1)^2$ και $f(x) \leq 1$

34. Αν $g(x) = 1 + \ln x$ και $(g \circ f)(x) = \frac{1-x}{1+x}$, να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f .

35. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = 3x - 2$ και $f(x) = \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να προσδιορίσετε τους α, β , ώστε να ισχύει $g \circ g = f$.

36. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f \circ f)(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι περιττή συνάρτηση.

37. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f \circ g)(x) = x^2 - 3x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $(g \circ f)(2) = 2$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

38. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $(f \circ f)(x) = 2 - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:

i) $f(1) = 1$ και $f(2-x) = 2 - f(x)$

ii) $f(0) + f(2) = 2$

39. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ και $g(x) = \frac{x+\alpha}{\sqrt{x-4}}$. Η C_g διέρχεται από το σημείο

$M(29, 5)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -4$.

β) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g και $h(x) = g(6 - \ln x)$.

γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

δ) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $\phi(x) = \frac{\sqrt{-x^2 + 17x - 52}}{\sqrt{x-4}}$ και $f \circ g$ είναι ίσες.

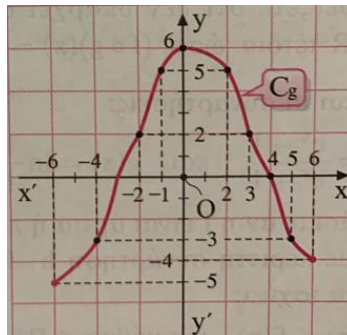
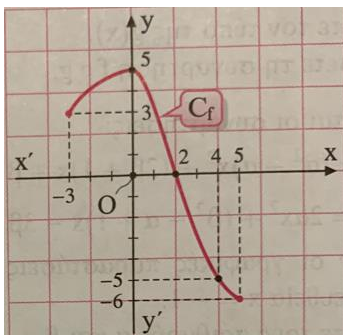
40. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{αν } x \leq 0 \\ x+2, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{αν } x < 1 \\ 2-x, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$.

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f \circ g$.

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f \circ g$, να βρείτε το σύνολο τιμών της.

41. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ και συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ να είναι ίσες. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g και $h(x) = x$ διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο και να βρείτε.
42. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $3f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}f(x) = -8$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.
- Να βρείτε τον τύπο της f .
 - Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
 - Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
43. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, όπου η g είναι άρτια και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $2f(x) - 3f(-x) = x^5 g(x)$.
- Να υπολογίσετε την τιμή $f(0)$.
 - Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.
 - Να αποδείξετε ότι η $f \cdot g$ είναι περιττή.
 - Αν επιπλέον είναι $g(x) = 5x^2 + \alpha x + 10 - \alpha$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της f .
44. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x+y) - g(x-y) = 4y(x+1)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες.
 - Αν επιπλέον ισχύει ότι $f(2) = 8$, τότε:
 - Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.
 - Να βρείτε τον τύπο της f .
45. Δίνεται μη σταθερή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(xy) = f(x)f(y)$ και $f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
- Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(1)$ και $f(2)$.
 - Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.
 - Να βρείτε τον τύπο της f .
46. Στα σχήματα που ακολουθούν φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f, g .



- Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των f, g .
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f \circ g$ και $g \circ f$.
- Να λύσετε την εξίσωση $(f \circ g)(x) = 0$.

δ) Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = g(|x + 2| - 7)$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της h .

ii) Να λύσετε την ανίσωση $h(x) > 2$.