

ΦΥΛΛΟ 3

1. Να υπολογίσετε τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 27}{2x - 6}$

ii) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{2x^2 + 7x + 3}$

iii) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 8}{x^3 + 1}$

iv) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{2x^2 - 18}$

v) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x-20}{x^2-16} + \frac{2}{x-4} \right)$

vi) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+2} + x}{x+1}$

vii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{x} - 4x^2 + 3}{x-1}$

viii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-1} + \sqrt{x+8} - 5\sqrt{2x-1}}{x-1}$

2. Να υπολογίσετε εφόσον υπάρχουν τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-3| + 2|x^2-1| - 7}{x-2}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2|x-3| + 5|1-x| - 10}{x^2 - 9}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3|x-2| + |2x-x^2|}{3x^2 - 12}$

iv) $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{|x^2-9| + 2x+6}{x+3}$

3. Να υπολογίσετε εφόσον υπάρχουν τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta\mu x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4 - 3\eta\mu^4 x}{8x^2 \eta\mu^2 x}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{1+x\eta\mu x}}{x^2}$

4. Αν $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 4$ και $f(x) \neq 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow -2} (3f(x) + x - 1)$

ii) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2f^2(x) - 7f(x) - 4}{f^2(x) - 16}$

iii) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{f(x)} - 2}{3f(x) - 12}$

iv) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|f(x)| - 4}{f^2(x) - 16}$

5. Αν $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2x}{x^2 - 9} = 5$, να βρείτε τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, ii) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - x - 3}{x^2 - 9}$

6. Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x) - x}{x^2 - 1} \right] = 3$, να βρείτε τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(x) - 1}{x^2 + x - 2}$

7. Αν $f(x) = \frac{x^2 - \alpha x + \beta}{x - 3}$, $x \neq 3$ να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$.

8. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + \alpha x + \beta}{x + 1} = 4$.

9. Αν $f(x) = \frac{\alpha x^2 + x + 2}{x - 1} + \beta x + 3$ και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6$, να προσδιορίσετε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

10. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχει το όριο της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x^2 - x}, & \text{αν } x < 0 \\ \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x}, & \text{αν } x > 0 \end{cases} \quad \text{στο σημείο } x_0 = 0.$$

11. Να υπολογίσετε εφόσον υπάρχουν τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{\sqrt{3x + 4} - 2}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\eta\mu(x - 3)}{\sqrt{2x + 3} - 3}$

12. Να υπολογίσετε τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt[3]{1 + x^2}}{\sqrt[3]{1 + x^2} - 1}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}$

13. Αν η συνάρτηση f είναι περιττή και $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - 3 + x^2) = 5$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

14. Αν η συνάρτηση f είναι άρτια και ισχύει $\lim_{x \rightarrow -3} (f(x) + 2x - 5) = 4$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

15. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) = f(x - 1)$ και $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

16. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x + y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2005$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ και

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

i) $f(1) = 0$ ii) $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$, με $\alpha \neq 0$

18. Αν ισχύει $2\sqrt{3x} \leq f(x) \leq x+3$, $x \geq 0$ να υπολογίσετε τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

iii) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2x}{x - 3}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 6}{x - 3}$

iv) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - x^2 + 3}{x^2 - 9}$

19. Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ και $f(x) \eta \mu 2x \leq x^3 \sigma \nu \nu \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

i) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \sigma \nu \nu \frac{1}{x} \right) = 0$.

ii) Να αποδείξετε ότι $l = 0$.

iii) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f^2(x) + \eta \mu 2x}{\eta \mu x + x^2}$.

20. Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $(f(x))^2 + x^2 + \sigma \nu \nu^2 x \leq 1 + 2x f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

21. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta \mu \frac{5}{x} \right)$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sigma \nu \nu^2 \frac{1}{x}}{1 + \sigma \nu \nu^2 \frac{1}{x}}$

22. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ και $f(x+3) = f(x) + 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$

23. Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 10$ και

$f(xy) = f(x) + f(y) - 2(x+y-xy)$ για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$.

i) Να υπολογίσετε την τιμή $f(1)$.

ii) Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x + \frac{2}{x}$ για κάθε $x > 0$

β) $f(x^2) = 2f(x) - 4x + 2x^2$ για κάθε $x > 0$

iii) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

iv) Αν γνωρίζετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό ℓ .

24. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) \neq 0$ κοντά στο 0 και ισχύει $f^2(x) - 2xf(x) \leq \eta\mu^2 x - 2\eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)f(5x)}{x^2}$ iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(f(x))}{x}$ iv) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(\eta\mu x)}{\pi - x}$

25. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x) + g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν: α) $f(x)g(x) \leq 1$ β) $f^2(x) + g^2(x) \geq 2$

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{f^2(x) + g^2(x)}$.

26. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x)g(x) \neq 0$ για κάθε $x \neq 0$ και

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{\eta\mu^2 x} = 0$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu f(x) \cdot \eta\mu g(x)}{x^2}$.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.

ii) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

iii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{f^{-1}(x)}{\sqrt{4x+6}-2}$.

28. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x)(f(x) - 4x) = x^2(6x - 7f(x))$ για κάθε

$x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$.

i) Να υπολογίσετε τον αριθμό λ .

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x^2 - 6x}{\sqrt{x+4} - 2}$.

iii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x + \eta\mu x)}{2x - \eta\mu x}$.

29. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ και $h(x) = (\alpha - 2)x^2 + (\gamma - 2)x + 2\beta + 2$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$, $\beta = -4$ και $\gamma = 6$.

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 3}{x - 3} = \kappa \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$.

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ για τους οποίους ισχύει

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^3(x) + \lambda f(x) + \mu}{x - 3} = 40$.

γ) Να αποδείξετε ότι το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|f(x) - 3|}{\eta\mu(x - 3)}$ δεν υπάρχει.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 2\eta\mu x}{\sqrt{x+1} - 1} = 6$.

i) Να υπολογίσετε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \eta\mu^2 x}{\sqrt{x^2 + 4} - 2}$

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{|f(x)|}$.

iii) Αν επιπλέον ισχύει ότι $f(3x) \leq f(\alpha x) + f(\beta x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

α) $\alpha + \beta = 3$

β) Να υπολογίσετε συναρτήσει του α , το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + (\alpha - 2)x + \beta}{x^2 - 1}$

31. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + 2f(x) = 6x - 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι $1 - 1$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f^3(x^2 - 5) + 2f(x + 1) = 6x$.

iii) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.

iv) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1}$.

v) Αν επιπλέον ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ .

32. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
- $g(\mathbb{R}) = [\alpha, \beta]$ με $|\alpha| < \beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)
- Η συνάρτηση g δεν έχει όριο στο 0

i) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)g(x)}{f(x)}$

ii) Αν είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{f(x)+1} - 1}{f(x)} = \sqrt{2} - 1$, να υπολογίσετε:

α) Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

β) Τους αριθμούς $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση να έχει όριο στο 0, για το οποίο ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0)$

iii) Αν $f(0) = 1$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$t(x) = \ln \left(\frac{\sqrt{f(x)} - 1 + f(x) - f(x)\sqrt{f(x)}}{x} \right).$$

33. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|f(x) - x^2| \leq x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Να υπολογίσετε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu x^2}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 4} - 2}$

ii) Αν για τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $|g(x)| \leq |\eta \mu x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) \cdot g\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(g(\sqrt{x}) \cdot \frac{x^3 + x^2}{\sqrt{x+1} - 1} \right)$

β) Αν επιπλέον ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\eta \mu x} = \alpha \in \mathbb{R}$, να σχεδιάσετε το γράφημα της συνάρτησης

$$f(\alpha) = \sqrt{|\alpha|}.$$