

ΦΥΛΛΟ 2

1. Να μελετήσετε τη μονοτονία και να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f όταν :

$$\text{i)} \quad f(x) = \begin{cases} -x, & \text{αν } x < 0 \\ x^2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

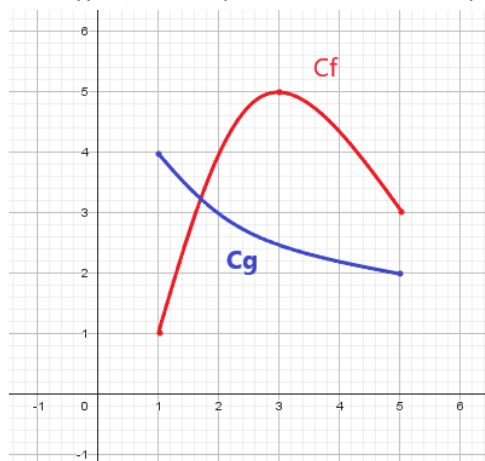
$$\text{ii)} \quad f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1, & \text{αν } 0 < x < 1 \\ 2x-1, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

2. α) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = -3\sqrt{x-1} + 2$.

- β) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = 5\sqrt{x-2} + 7$.

3. Να βρεθεί ο $\kappa \in \mathbb{R}^*$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \kappa x^2 - 3\kappa x - \frac{13}{2}$ να έχει μέγιστο τον κ .

4. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f, g .



- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων f, g .

- β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h = f - g$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, 3]$.

- γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $k = f + g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[3, 5]$.

- δ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g \circ f$.

- ε) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $g \circ f$ ως προς τη μονοτονία σε καθένα από τα διαστήματα $[1, 3]$ και $[3, 5]$.

- στ) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - f(x) = 6x - 14$.

5. Αν $f(x) = \frac{2\ln x - 3}{5}$ και $g(x) = 1 + \ln x$, να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την $F = f^{-1} \circ g$.

6. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $6f(x^2) - f^2(x) \geq 9$, να αποδείξετε ότι η f δεν αντιστρέφεται.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f: (-\infty, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - 8x + 10$.
- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.
 - Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .
8. Να ορίσετε την αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} \ln x - 2, & \text{αν } 0 < x < 1 \\ \sqrt{x-1}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$.
9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ \ln(x+1), & \text{αν } x > 0 \end{cases}$.
- Να ορίσετε την αντίστροφη της f .
 - Αν η εξίσωση $e^x = x + 1$ έχει μοναδική λύση, να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f^{-1} και της ευθείας με εξίσωση $y = x$.
 - Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} .
 - Να λύσετε την ανίσωση $\ln f(x) < 0$.
 - Αν η ευθεία με εξίσωση $y = -x + c$, $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ τέμνει τη C_f στο σημείο $A(\alpha, \beta)$, να αποδείξετε ότι τέμνει και τη $C_{f^{-1}}$ στο σημείο $B(\beta, \alpha)$.
10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{e}{x} + x$.
- Να αποδειχθεί ότι ορίζεται η f^{-1} .
 - Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.
11. Δίνεται f μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 5)$ και $B(-2, 7)$.
- Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .
 - Να λύσετε την ανίσωση $f(f(|x| - 4) - 6) - 5 < 0$.
 - Να λύσετε την ανίσωση $f(2x - 1) + f(x + 3) < f(5 - x) + f(7 - x)$.
12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \ln x$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
 - Να βρείτε για ποια x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 1$.
 - Να λύσετε την ανίσωση $(3|x| + 1)^2 - (2|x| + 3)^2 > \ln \frac{2|x| + 3}{3|x| + 1}$.
13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - \ln x$, $x > 0$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
 - Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ με $\alpha < \beta$ ισχύει $e^\beta - e^\alpha > e^{\alpha+\beta} \cdot \ln \frac{\alpha}{\beta}$.
 - Να λύσετε την ανίσωση $e^{-(x^2+1)} - e^{-(x^2+x+2)} < \ln(x^2+1) - \ln(x^2+x+2)$.
14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-\alpha} + x$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει την ευθεία $y = 1$ στο σημείο με τετμημένη 1.
- Να βρείτε τον αριθμό α και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

- β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- γ) Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο.
- δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x) + f(e^{3x}) = f(e^{2x}) + f(e^{4x})$.
- ε) Να λύσετε την εξίσωση $(1 - |x^2 - 1|)(\sqrt{x-1} - x) = x - 1 - x^2$.

15. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως φθίνουσα συνάρτηση. Θεωρούμε και τη συνάρτηση $g(x) = f(1 - x^3) - f(e^x + 3x)$.

- α) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.
- β) Να αποδείξετε ότι $xg(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $g(x) > 1 - e^x$.

16. Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $g(x) = |10k + 23|x - 3(2x + k + 1)|$, με $k \in \mathbb{Z}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ g)(x) = -27[(x-1)^3 + e^{3x}]$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι $k = -2$.
- β) Να βρείτε τον τύπο της f .
- γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- δ) Να λύσετε την εξίσωση $x^3 e^{x-3} = 27$.
- ε) Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{\pi}{e}\right)^3 > \frac{27}{e^\pi}$.

17. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x^2 - y^2)(f(x) - f(y)) > 0$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $x \neq y$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο στο 0.
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(\ln x) < f(\ln(1-x))$

18. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} - e^{x-4}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
- β) Αν γνωρίζετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > x + 3$.
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{|x|} + 2|x|) - f(|x| + 1) = \ln \frac{e^{|x|} + 2|x|}{|x| + 1}$.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - x$, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

- i) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως μονότονη.
- ii) Να εξεταστεί αν ορίζεται η f^{-1} .
- iii) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 1 - x$.
- iv) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x) \leq 1 - x$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) - f(x) = x^{2007}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:

- i) Η f αντιστρέφεται
- ii) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

21. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(g(x)) = 4x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i) Να δείξετε ότι η g είναι «1-1».
- ii) Να βρείτε τον τύπο της g^{-1} αν είναι γνωστός ο τύπος της f .

22. Αν f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού και τιμών το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(f(x)) + x = 2004$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:

- i) Η f είναι συνάρτηση «1-1».
- ii) $f^{-1}(x) = -f(x) + 2004$, $x \in \mathbb{R}$
- iii) Η f δεν είναι γνησίως μονότονη.
- iv) $f(0) + f(2004) = 2004$

23. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(1 + f(x)) = 2x - 6 + f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- i) Η f είναι συνάρτηση «1-1».
- ii) $f(3) = 2$.
- iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(1 + 2f(x^2 + x + 1)) = f(1 + f(5)) - 4$.

24. Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού και τιμών το $\mathbb{R}$ για τις οποίες υποθέτουμε ότι:

- $(f \circ f)(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$
- $g(x) = x + f(x)$, $x \in \mathbb{R}$
- η g είναι αντιστρέψιμη

Να αποδείξετε ότι:

- i) Η f είναι συνάρτηση «1-1».
- ii) $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

25. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{f(x)} + 2f^3(x) - x + 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

- i) Να δείξετε ότι η f είναι «1-1».
- ii) Να βρείτε την αντίστροφη της f .

26. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^3(x) + 2f(x) = 3 - x$, $x \in \mathbb{R}$

- i) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- ii) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 3$
- iii) Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$
- iv) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f .

- ν) Αν η f είναι γνησίως μονότονη,
- α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f
- β) Να λύσετε την ανίσωση $f(e^{x-1} + \ln x) > f(2-x)$