

ΦΥΛΛΟ 4

1. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$, να βρείτε τα όρια :

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-3}{2f(x)+1} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)-1}{f^2(x)+1} \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x)-3f(x)+1}{f^2(x)+f(x)+1}$$

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ με $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0$. Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f^2(x) + g^2(x)}{f^4(x) + g^4(x)} = +\infty.$$

3. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{i) } \text{Αν } \lim_{x \rightarrow 0} [x^2 f(x)] = 13, \text{ να βρεθεί το } \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

$$\text{ii) } \text{Αν } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)-1}{f(x)} = +\infty, \text{ να αποδειχθεί ότι } \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0.$$

4. Αν για τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)(x^2-1)}{x-2} = -\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{g(x)(x-1)} = +\infty, \text{ να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

5. Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3} |x-3|g(x) = 2$. Να βρεθούν

$$\text{τα όρια : i) } \lim_{x \rightarrow 3} g(x) \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g^3(x) - 2g^2(x) + 4}{g^3(x) - 27}$$

6. Αν $f(x) = \frac{3x^2 - \alpha x + \beta}{x^2 - 1}$, να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

7. Να βρείτε τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε το όριο $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - \lambda x - \mu}{|x+2|}$ να είναι πραγματικός αριθμός.

8. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2 + \alpha x + 1} = +\infty$, να βρεθεί η τιμή του α .

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - \beta}{x-2}, & x < 2 \\ -x^2 + \alpha x + 6, & x \geq 2 \end{cases}$. Αν η συνάρτηση f έχει στο

σημείο $x_0 = 2$ όριο $l \in \mathbb{R}$, να βρείτε τους αριθμούς $\alpha, \beta, l \in \mathbb{R}$.

10. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - \lambda x + 1}{x-2} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x + \lambda}{x^2 - 2x - 3}$$

11. Για τις διάφορες τιμές της πραγματικής παραμέτρου λ , να βρείτε τα όρια :

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\lambda x^2 + \lambda^2 x - 3}{x + \sqrt{x} - x\sqrt{x} - 1} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\lambda^2 x - 4\lambda - 8}{x - 4\sqrt{x} + 4}$$

12. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε, εφόσον υπάρχουν, τα παρακάτω όρια :

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - \alpha x + \beta - 3}{x^2 - 4}$$

$$\text{v) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + \alpha}{|x - \beta|}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - \alpha x + 2\beta}{x^2 - 1}$$

$$\text{vi) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\alpha x^2 - 2x + \beta}$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{2x - 6 + \alpha}{|x - \alpha|}$$

$$\text{vii) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+2} + \alpha}{x^2 - \beta}$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sqrt{|x + \beta|}}{x^2 - 2\alpha x + \alpha^2}$$

$$\text{viii) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \alpha}{\sqrt{x+1} - \beta}, \quad \beta > 0$$

13. Αν $x^2 f(x) + 1 \leq 0$ για κάθε $x \neq 0$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.