

ΦΥΛΛΟ 6

- Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (x-\kappa)(x+\kappa), & \text{αν } x \leq 2 \\ \kappa x + 5, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$.
 - Να αποδείξετε ότι $\kappa = -1$.
 - Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{5|x-2| - 3x + 6}$.
 - Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .
 - Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \alpha$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu(x^2 + 3x - 4)}{x - 1}, & \text{αν } x < 1 \\ \sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{\alpha x^2 + 5}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$.
 - Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$.
 - Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x)$, όπου λ ο πραγματικός αριθμός που βρήκατε στο ερώτημα (iii).
- Αν γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$ και ότι $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5x}{x^2 - 4} = 3$, να βρείτε την τιμή της f για $x = 2$.
- Δίνονται συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x)}{x - 6} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 6} [g(x)(\sqrt{x-2} - 2)] = 2$ και η f είναι συνεχής στο 6.
 - Να υπολογίσετε την τιμή $f(6)$.
 - Να εξετάσετε αν η g είναι συνεχής στο 6.
 - Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} f(x)g(x), & \text{αν } x \neq 6 \\ 8, & \text{αν } x = 6 \end{cases}$ είναι συνεχής στο 6.
- Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) \sin \frac{\pi x}{4} = x^2 - 4$ για κάθε $x \in [0, 4]$. Να βρείτε τον τύπο της f .
- Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $xf(x) \leq f(x) + 2\eta\mu(x-1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ να δείξετε ότι $f(1) = 2$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) \leq 2xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι: i) η f είναι συνεχής στο 0 ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$

8. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) \leq x\sqrt{x^2+3} - 10 + \sqrt{25x^2+75} - 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δίνεται επίσης συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x^2-x} = 3$ και $g(f(0)) = 2023$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα.

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-3}{g(x)}$.

iii) Να βρείτε τον $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)}, & \text{αν } x \neq 1 \\ \alpha, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$ να είναι συνεχής.

9. Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$ με $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-5}{x-1} = 10$.

i) Να βρείτε την τιμή $f(1)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_1 = -1$.

iii) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)+5}{x+1}$.

10. Έστω $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $x_0 = 0$, ώστε για κάθε $x \in (0, +\infty)$

να ισχύει $|f(x) - x| \leq xe^{\frac{1}{x^2}}$. Να βρείτε:

i) Την τιμή $f(0)$.

ii) Το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

11. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο $x_0 = 1$, για την οποία ισχύει

$f(4-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-4}{x-1} = 5$.

i) Να βρεθεί το $f(1)$.

ii) Να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής στο $x_1 = 3$.

12. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $(f(x))^2 + (g(x))^2 = x^4 - 2x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι οι f και g είναι συνεχείς στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = -1$.

13. Για τη συνάρτηση f ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- Αν η f είναι συνεχής στο 0, τότε η f θα είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.
- Αν η f είναι συνεχής σε ένα σημείο $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε η f θα είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $f(xy) = f(x) + f(y) + (x^2 - x)(y^2 - y)$ (1) για κάθε $x, y > 0$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 4$

Να αποδειχθεί ότι

- η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$
- η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{4}{x_0} + x_0 - 1, x_0 > 0$

15. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, $f(\alpha) > g(\alpha)$ και $f(\beta) < g(\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

16. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f: [-1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα
- Η C_f έχει κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$ του οποίου η τετμημένη ανήκει στο διάστημα $(1, 3)$
- $1 < g(x) < 3$ για κάθε $x \in [1, 3]$

Να αποδείξετε ότι καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(1, 3)$.

- $(x-1)f(x-2) = (x-3)f(x+2)$
- $(f \circ g)(x) + x = f(x) + g(x)$

17. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha^2 x^4 + \beta^2 x - \beta^2 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[0, 1]$.

18. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει (τουλάχιστον ένα) $x_0 \in \left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{\beta-\alpha}{2}\right)$.

19. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $0 \leq f(x) \leq 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) - 6f(x) + 9x = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $[0, 1]$.

20. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία υποθέτουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2004}{x - 1} = \alpha \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 2004$.
- Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και το $f(1)$.
 - Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιος, ώστε η γραφική παράσταση της f να τέμνει την ευθεία $\varepsilon: y = x + 2000$ στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.
21. Αν η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι $0 < f(x) < 1$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f^2(x_0) + f(x_0) = x_0^2 + x_0$.
22. Έστω οι συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και τέτοιες ώστε: $f(x) < 1$ και $g(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ με $\alpha < \beta$ και $f(\alpha) = \alpha$, $g(\beta) = \beta$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ έτσι, ώστε: $f(\xi) \cdot g(\xi) = \xi$.
23. Οι συναρτήσεις $f, g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς, έχουν σύνολο τιμών το διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(\alpha) = \alpha$, $f(\beta) = \beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει (τουλάχιστον ένα) $\xi \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $2f(\xi) = g(f(\xi)) + g(\xi)$.
24. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\varepsilon\phi x = \frac{\pi}{2} - x$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο διάστημα $(0, \pi)$.
25. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x\eta\mu x + 5x = 4\eta\mu x + x^2 + 6$ έχει ακριβώς δύο λύσεις στο διάστημα $[2, 4)$.
26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^3 - 1, & \text{αν } x < 0 \\ e^x - 2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \sin x$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
27. Έστω f και g δύο συναρτήσεις για τις οποίες υποθέτουμε ότι:
- f, g είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$
 - $f(x) < 0 < g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - $f(-1) + 1 > 0$ και $g(1) < 1$
 - f, g είναι γνησίως φθίνουσες στο $\mathbb{R}$
- Να αποδείξετε ότι:
- Η συνάρτηση $h(x) = f(x) + g(x) - x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
 - Υπάρχει μοναδικός $x_0 \in (-1, 1)$ τέτοιος, ώστε να ισχύει: $f(x_0) + g(x_0) = x_0$.

28. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 1$ και $8\eta\mu(x-4) \geq (x-4)f(x) \geq x^2 - 16$ για κάθε $x \in (0, 4]$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την παραβολή $y = -x^2 + 7x - 6$ σ' ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $(2, 4)$.
29. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:
- $|xf(x) - 2\eta\mu x| \leq x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - $f(x) + f(x+2) = x^2 - 2006$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Να αποδειχθεί ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{x}{2} - 1$ σε τουλάχιστον ένα σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 2)$.
30. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:
- $$f(x) + e^{f(x)} = 5 - 4x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(1) = 0.$$
- Να αποδειχθεί ότι:
- Η f αντιστρέφεται.
 - Η εξίσωση $(f \circ f)(x) - f(5 - 10x^3) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$.
31. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^8 - 16x - 5 = 0$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.
32. α) Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\lambda < \mu < \nu$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\alpha}{x-\lambda} + \frac{\beta}{x-\mu} + \frac{\gamma}{x-\nu} = 0$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες.
- β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{42}{x-5} + \frac{35}{x-6} + \frac{30}{x-7} = 0$ δεν έχει ακέραια ρίζα.
33. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $\ln(e - e^x) = x$ έχει ακριβώς μία λύση.
34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 7 - 3\ln x - x^2$.
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 - Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο, του οποίου η τετμημένη ανήκει στο διάστημα $(1, e)$.
 - Αν x_0 είναι η τετμημένη του σημείου τομής της με τον άξονα $x'x$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{f(x)}$.
35. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 3)$ και $A(5, 1)$.
- Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y = -2x + 6$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.
 - Έστω γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το μέσο M του AB . Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

iii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = -\frac{\ln(x-1)}{2023}$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και h έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

36. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x^2 - 4x + 2)f(x) \leq f(0) + f(4)$. Να αποδείξετε ότι:

- i) $f(0) = f(4)$
- ii) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [0, 2]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi^2) = \xi \cdot f(2\xi)$
- iii) Υπάρχουν $x_1, x_2 \in [0, 4]$, με $x_2 - x_1 = 2$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$.

37. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, με $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(5) = -2$. Να

υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[f(3) - 4]x^5 + 3x + 5}{x^3 + 6x^2 + 2}$.

38. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-1, 1]$ για την οποία ισχύει

$$4x^2 + f^2(x) = 4 \text{ για κάθε } x \in [-1, 1].$$

- i) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- ii) Να δείξετε ότι η f διατηρεί το πρόσημό της στο $(-1, 1)$.
- iii) Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της f ;
- iv) Αν $f(0) = 2$ να βρείτε την f .

39. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $f^2(x) = 1 + 2xf(x)$, $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$

Να βρείτε τον τύπο της f .

40. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $f^2(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$
- $f(-1) = -1$ και $f(1) = 1$

- α) Να βρείτε τον τύπο της f .
- β) Να ορίσετε την αντίστροφη της f .
- γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} .
- δ) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των f και της f^{-1}

41. Έστω $f: [1, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με:

- $\frac{6x^2 - 6x}{x^2 - 1} \leq f(x) \leq \frac{6\sqrt{x} - 6}{x - 1}$
- $f(1) \cdot f(8) = 27$

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 7$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(1, 8)$.

42. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με: $f(4)=2$ και $f(x) \cdot f(f(x))=12$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι $f(2)=6$.
- Αν η f είναι γνησίως μονότονη, να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2, 4)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=3$.
- Να υπολογίσετε το $f(3)$.

43. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(10)=9$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \cdot f(f(x))=1$, να βρείτε το $f(5)$.

44. Έστω η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1, 3)$ τέτοιος ώστε $6f(x_0)=2f(-1)+f(0)+3f(3)$.

45. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f: [2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [2, 4]$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x_0) = \frac{f(2)+2f(3)+3f(4)}{6}$.

46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^x - 1$.

- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να δείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε $\ln x_0 + e^{x_0} = 1$.

47. Δύο συναρτήσεις f και g είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f([\alpha, \beta]) = g([\alpha, \beta]) = [\alpha, \beta]$ και έστω f γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και η g γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

48. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: (0, 3) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3)$. Αν $f(1)=2$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$ και $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -2$, να βρείτε:

- Το σύνολο τιμών της f .
- Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$, στο $(0, 3)$.

49. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ με $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \gamma \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \delta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο αριθμός $x_0 > 0$ τέτοιος ώστε να ισχύει: $f(x_0) + e^{x_0+1} + \ln x_0 = 1$.

50. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $\Delta = [0, 2004]$ για την οποία ισχύουν:

- Η f είναι συνάρτηση «1-1»
- $f(2004) > f(0) > 0$

Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

51. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Αν ισχύουν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $f(1) = -2$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
52. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x^2 - 6x|$ με πεδίο ορισμού το $A = [0, 8]$.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
 - Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \eta$ για τις διάφορες τιμές του $\eta \in \mathbb{R}$.
53. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως μονότονη, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)f(x) - \eta\mu(\pi x)}{x^2 - 4} = -\frac{\pi}{4}$.
- Να υπολογίσετε την τιμή $f(2)$.
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x-5)f(x) = (x-1)f(x-2)$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(1, 5)$.
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^3(e^{-x} \ln x) - f^3(2e^{-x} - x) = f(2e^{-x} - x) - f(e^{-x} \ln x)$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $(0, +\infty)$.
54. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow -2} (f^2(x) - 4f(x)) = -4$.
- Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$.
 - Επιπλέον η f είναι συνεχής και ισχύει $xf(x) \geq \eta\mu 6x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - Να υπολογίσετε την τιμή $f(0)$.
 - Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\phi(x) = f^2(x) - 20e^x f(x) + 100e^{2x} + 10$ έχει ολικό ελάχιστο, το οποίο και να βρείτε.
 - Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \left(-\frac{3\pi}{12}, 0\right)$, ώστε $f(\xi) = 0$.
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)(x-1) = -5$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο $(-2, 0)$.
55. Δίνονται συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε η συνάρτηση $g \circ f$ να είναι $1 - 1$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι $1 - 1$.
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right) - f\left(\frac{2x^3 + x - 1}{x^3 + 2x^2 + 2}\right) = 0$ έχει μια τουλάχιστον θετική ρίζα.
 - Αν επιπλέον η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x^3 - x^2) = g(3x^2 - e^x)$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο $(-2, 1)$.

56. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \eta\mu x + \chi\sigma\upsilon\nu x$

i) Να υπολογίσετε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x - 1}$ β) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f(\pi - x)}{\pi - 2x}$

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

57. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \frac{2}{x}$, για κάθε $x \neq 0$.

i) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

ii) Να ορίσετε τη συνάρτηση $g(x) = f^2(x)$ και να μελετήσετε τη μονοτονία της.

iii) Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x)\eta\mu x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} (g(x)\eta\mu x)$

iv) Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = \ln x$ έχει μοναδική λύση x_0 και μάλιστα $x_0 \in (1, e)$.

58. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} \alpha e^x + \beta, & x \leq 0 \\ x^3 + x - 1, & x > 0 \end{cases}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και

$g(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, \pi]$. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\left(\ln \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

i) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = -2$

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f και να δείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει μόνο ένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$, το οποίο έχει θετική τετμημένη.

iv) Να ορίσετε τη σύνθεση της συνάρτησης g με τη συνάρτηση f .

v) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{(f \circ g)(x) + 1}{1 - \eta\mu x}$

vi) Να λύσετε στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ την ανίσωση $\sigma\upsilon\nu^3 x + \sigma\upsilon\nu x - \frac{5}{8} < 0$.

59. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = -5$, για την οποία ισχύει

$$f^2(x) + 4x^2 = 25 \text{ για κάθε } x \in \left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right].$$

i) Να δείξετε ότι $f(x) = -\sqrt{25 - 4x^2}$, $x \in \left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, να βρείτε το σύνολο τιμών της και τα ολικά ακρότατα.

iii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει με την ευθεία $y = -2x - 1$ τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.

iv) Να υπολογίσετε όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x}{f(x) + 5}$.

60.