

ΦΥΛΛΟ 6

1. Να υπολογίσετε τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu \frac{2x-1}{x^2+1}$ [0]

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-1}{2x^2+5} \cdot \eta\mu \frac{3x+1}{x^2+1}$ [0]

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^5 \eta\mu \frac{1}{x^2} \right)$ [+∞]

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \eta\mu \frac{1}{x} + 3x^2}{5x^2+x}$ $\left[\frac{3}{5} \right]$

v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 \eta\mu \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}+1}$ [2]

vi) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x \eta\mu x + 1}{x^2 + \eta\mu x + 3}$ [1]

vii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x + \sigma\upsilon\nu x}{x^2 + x + \sigma\upsilon\nu x}$ [2]

viii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \eta\mu x}{x^2+1}$ [0]

ix) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1) \eta\mu 2x}{x^4 + 3x^2 + 2}$ [0]

x) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\sqrt{x^2+1} - x \right) \eta\mu 3x \right]$ [0]

2. Να υπολογίσετε τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+2} + e^x - 2}{e^x + e^{x+1} + 1}$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+2} - 2^{x+1} + 3}{e^x + 2^{x+2}}$

iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{x+1} + 5e^x}{2 \cdot 3^x - e^x}$

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}$ 1

v) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{2x^2-1}{x^2+1}}$

vi) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3x - 5 + e^{\frac{2-x^3}{x^2+1}} \right)$

vii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{1-x} \eta\mu x)$

3. Να υπολογίσετε τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{x^2+1}{2-x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+2}{x^2+1}$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x - 2 \ln(x-1)]$ -∞

iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [2 \ln(3x) - \ln(x^2+1)]$ 2ln3

v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x + \eta\mu x) - 2 \ln x]$ -∞

vi) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(2 + e^{x+3})]$

vii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{3x} \right)^x$

4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων :

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\alpha^2 - 4)x^4 + \beta x^3 + x + 2]$

- +∞, αν (α>2 ή α<-2) ή αν (α=2 ή -2 και β<0)
- -∞, αν (-2<α<2) ή αν (α=2 ή -2 και β≥0)

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\lambda-1)x^2 + \lambda x + 3}{\lambda x + 2}$

- -∞, αν λ≤0 ή λ>1
- +∞, αν 0<λ<1
- 1, αν λ=1

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(x^2+x) - (2x^2+1)}{\lambda^2 x^2 - 4x(x+2) + 1}$

- 1/λ+2 αν λ≠±2
- -1/4 αν λ=2
- +∞ αν λ=-2

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{x + 3} - \lambda x + 2 \right)$$

- $-\infty$, αν $\lambda > 2$
- $+\infty$, αν $\lambda < 2$
- -4 , αν $\lambda = 2$

$$\text{v) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 2x} - (\lambda + 2)x \right]$$

- $-\infty$, αν $\lambda > -1$
- $+\infty$, αν $\lambda < -1$
- 1 , αν $\lambda = -1$

$$\text{vi) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 - x} - \alpha x + \beta \right]$$

- $+\infty$, αν $\alpha < 1$
- $-\infty$, αν $\alpha > 1$
- $-1/2$, αν $\alpha = 1$ και $\beta = -1/2$

5. Αν $f(x) = \frac{(\alpha + 1)x^3 - \beta x^2 + 4x + \alpha}{x^2 - 5x + 1}$, να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.

$\alpha = -1, \beta = -3$

6. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 2} - \alpha x + \beta \right) = 1$. $\alpha = 1, \beta = 3$

7. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 5} + \alpha x - \beta \right) = 4$. $\alpha = 1, \beta = -9/2$

8. Αν είναι $f(x) = \sqrt{4x^4 + 3x^2 + 2} - \kappa x^2 + \lambda x - \mu$ τότε να προσδιορίσετε τους $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{11}{4}$. $\kappa = 2, \lambda = 0, \mu = -2$

9. Έστω μια συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 f(x) - 2x^2 + 1}{x^2 + 2} = 3$.

Να βρείτε τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 5

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3xf(x) + 1}{2x + 1}$ $15/2$

10. Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 3x) = 1$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + x + 1}{xf(x) + 3x^2 + 2}$. 3

11. Αν για τη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $|(1 + x^3)f(x) - 3x^2| \leq x, x > 0$, να βρείτε τα παρακάτω όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 0

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + x + 1}{xf(x) + 3x + 2}$ $1/3$

12. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε για κάθε $x > 0$ να ισχύει

$$\frac{x^3 + x^2 + x}{x^2 + 1} \leq f(x) \leq \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 + 1}. \text{ Να υπολογίσετε τα όρια:}$$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ 1

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \eta \mu \frac{2}{x}$ 2

13. Αν $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $f(x) > \ln x$, $x > 0$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ $+\infty$

14. Αν $f(x) + x^2 - e^x < 0$, $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. $-\infty$