

ΦΥΛΛΟ 10

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $8x^3 + 3\beta x^2 + 2\gamma x = \beta + \gamma + 2$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.
2. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f^2(x) - e^{f(x)} - f(x) + 2 = x^3 + e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία το πολύ ρίζα.
3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^{3x} + 3x^7$ και $g(x) = e^{-x} - 5x^3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο και αυτό βρίσκεται στον άξονα $y'y$.
4. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $2x^2 - 2x + \ln x = 0$	iii) $1 + xe^x = e^x$
ii) $e^x = x + 1$	iv) $2^x + 5^x = 2 + 5x$
5. Έστω μια συνάρτηση f , συνεχής στο $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με $2f(1) = f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
6. Έστω $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συνεχείς συναρτήσεις οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα $(0, 1)$ με $f(x)g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$ και $f(0) = g(1) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$, ώστε $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = 0$.
7. Έστω f, g δύο συναρτήσεις για τις οποίες ισχύουν τα επόμενα :
 - Είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$.
 - Είναι παραγωγίσιμες στο (α, β) .
 - $\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \frac{f(\beta)}{g(\beta)}$
 - $g'(x) \neq 0$ στο (α, β) και $g(x) \neq 0$ στο $[\alpha, \beta]$.
 Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$.
8. Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμες στο (α, β) με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) + f(x)g'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β) .

9. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε να ισχύει $f'(\xi) + f(\xi) = 0$.
10. Έστω f, g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $g(\alpha) = g(\beta) = 0$. Αν για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x)e^{-x} + g(x) = ce^{-x}$ όπου c σταθερά να αποδείξετε ότι :
- Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.
 - $g'(x_0) = -g(x_0)$
11. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) . Αν $f^2(\beta) - f^2(\alpha) = \beta^2 - \alpha^2$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)f(\xi) = \xi$.
12. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\alpha^{f(\alpha)} = \beta^{f(\beta)}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $x_0 f'(x_0) \ln x_0 + f(x_0) = 0$.
13. Έστω συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow (\alpha, \beta)$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(x) \neq 1$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$.
14. Η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο στο $[0, 1]$ με $f(1) - f(0) = \frac{1}{2}$ και $f'(0) = 2004$. Να αποδείξετε ότι :
- Υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f'(x_0) = x_0$.
 - Υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f'(\xi) = 2\xi$.
15. Έστω f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ για την οποία ισχύουν :
- $f'(\alpha) < c < f'(\beta)$
 - $f''(x) \neq 0$ στο (α, β)
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = c$.
16. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με f' γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$. Αν ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$, να αποδείξετε ότι $f'(\alpha) > 0 > f'(\beta)$.

17. Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 5]$ με $f(0)=0$, $f(5)=5$ και $f(6)=2$. Να αποδείξετε ότι :

- i) Η f δεν είναι αντιστρέψιμη.
- ii) Υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

18. Να αποδείξετε ότι :

- i) $2 - \frac{e}{\pi} < \ln \pi < \frac{\pi}{e}$
- ii) $2 - \frac{e}{3} < \ln 3 < \frac{3}{e}$
- iii) $\frac{1}{1+x} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}, x > 0$
- iv) $1+x < e^x < 1+xe^x, x > 0$
- v) $1 - \frac{1}{x} < \ln x < x-1, x > 1$

19. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 5]$ με $f(1)=-2$ και $|f'(x)| < 2$ για κάθε $x \in (1, 5)$, να αποδείξετε ότι $-10 < f(5) < 6$.

20. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[3, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(3, +\infty)$. Αν $f(3)=0$ και $0 < f'(x) < 1$ για κάθε $x > 3$, να αποδείξετε ότι $0 < f(x) < x-3$ για κάθε $x > 3$.

21. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[-\alpha, \alpha]$ και ισχύει $f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (-\alpha, \alpha)$. Αν $f(-\alpha)=-\alpha$ και $f(\alpha)=\alpha$, να δείξετε ότι $f(0)=0$.

22. Μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 1]$ με $f(0) > 0$ και $f(1)=f'(1)=0$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) > 0$.

23. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(2003)=0$ και f' γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι $f'(2004) < f(2004) < f'(2003)$.

24. Η συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με f' γνησίως αύξουσα. Αν είναι $f(0)=0$ και $f'(0)=2004$, να αποδειχθεί ότι : $2004x < f(x) < xf'(x)$ για κάθε $x > 0$.

25. Αν η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και έχει θετικές τιμές μόνο, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε $\frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = e^{(\beta-\alpha)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}$.

26. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ με $f(0)=0$ και $f(2)=2$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) \cdot f'(\xi)=1$.
27. Έστω μια συνάρτηση $f:[1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα. Αν η f έχει σύνολο τιμών το $[0, 2]$ και είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 3)$, να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = -2$.
28. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha)=\alpha$ και $f(\beta)=\beta$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια, ώστε: $2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) + 5f'(\xi_3) = 10$.
29. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 2004]$ με $f(0)=0$ και $f(2004)=2004$. Να αποδειχθεί ότι:
- Υπάρχει $x_0 \in (0, 2004)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) + x_0 = 2004$.
 - Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 2004)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1$.
30. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, 5]$ με $f(1) + f(5) = 2f(3)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 5)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.
31. Έστω μια συνάρτηση f που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\beta) = f(\alpha) + f'(\alpha)(\beta - \alpha)$. Να δείξετε ότι:
- Η f' δεν είναι «1-1».
 - Η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (α, β) .
32. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, 2)$, $f(1)=3$ και $f(2)=6$, να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
33. Η συνάρτηση $f:[0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο στο $[0, 2]$. Αν είναι $f(0)+2 < f(2) < f(1)+1$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ να είναι κάθετη στην ευθεία $\delta: x + y + 2004 = 0$.