

ΦΥΛΛΟ 11

1. Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα: $f'(x) = 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(0) = 1$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι:
 - i) Η συνάρτηση $G(x) = \ln f(x) - 2x$ είναι σταθερή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$
 - ii) $f(x) = e^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
2. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = 2f(-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι
 - i) $f'(-x) = 2f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
 - ii) Η συνάρτηση $g(x) = f^2(x) + f^2(-x)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή
3. Αν $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:
 - i) Η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) + f'(x)}{e^x}$ είναι σταθερή και να βρεθεί η σταθερή τιμή της.
 - ii) Η συνάρτηση $h(x) = f(x)e^x$ είναι σταθερή.
 - iii) $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
4. Έστω f μια συνάρτηση που είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει: $2f(x) = x(1 + f'(x))$, $x \in \mathbb{R}$.
 - i) Να αποδειχθεί ότι η f'' είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
 - ii) Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(1) = 1$ και $f(2) = 2$.
5. Αν $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ -1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, να αποδείξετε ότι:
 - i) $f'(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - ii) Η συνάρτηση $h(x) = e^x f(x)$ είναι σταθερή.
 - iii) $f(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$
6. Να βρεθεί η συνάρτηση f στις παρακάτω περιπτώσεις:
 - i) $f'(x) = 6x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 2$
 - ii) $f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$ και $f(-1) = 1$
 - iii) $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ και $f(0) = 1$
 - iv) $f'(1-2x) = 7-12x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) = 2$

7. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x^2) = 6x - 2$ για κάθε $x > 0$ και $f(1) = 2$. Να βρείτε τον τύπο της f .
8. Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 2$ και $f'(x + e^x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή $f(1+e)$.
9. Για μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση $xf'(\ln x) = x^2 - 1$ για κάθε $x > 0$. Αν $f(0) = 2$ να βρείτε τον τύπο της f .
10. Να βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύουν $f(1) = 0$ και $f'(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x+1}, & x > 0 \end{cases}$.
11. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $(x-2)f'(x) = 2x^2 - 5x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(3) = 7$, να βρεθεί ο τύπος της f .
12. Έστω f συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\infty, 2)$ για την οποία ισχύουν : $f(1) = f'(1) = 1$ και $f''(x) = (f'(x))^2$, $x < 2$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $F(x) = f'(x)e^{-f(x)}$, $x < 2$ είναι σταθερή και έπειτα να βρείτε τον τύπο της f .
13. Έστω f, g δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες υποθέτουμε ότι ισχύουν :
- $f'(x)g(x) = 2004$ και $f(x)g'(x) = -2004$, $x \in \mathbb{R}$
 - $f(0) = g(0) = 1$
- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x)g(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
- ii) Να βρείτε τους τύπους των f, g .
14. Μια συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = e$ και $f'(1) = 0$ ικανοποιεί τη σχέση $x^3 f''(x) = e^{\frac{1}{x}}$ για κάθε $x > 0$.
- i) Να αποδειχθεί ότι $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.
- ii) Να βρεθεί η f' και το πρόσημό της.
15. Για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ υποθέτουμε ότι :
- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - $f'(0) = 1$
 - $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) \cdot f(\beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- i) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$.
- ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- iii) Να βρείτε τον τύπο της f .

16. Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στις παρακάτω περιπτώσεις :

i) $f(x) + xf'(x) = 3x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) $f'(x) = 2 - \frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x \neq 0$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $f'(x) + xf''(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 2010$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2010$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

18. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση $2f'(x) = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$.

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x) - f(-x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

19. Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = 1$ και $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ για κάθε $x, y > 0$. Να αποδείξετε ότι :

i) $f'(x) = 1 + \frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x > 0$.

ii) $f(x) = x \ln x$, $x > 0$.

20. Αν η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $2x(f'(x) + f(x)) = e^{-x}$ για κάθε $x > 0$ και $f(1) = \frac{1}{e}$, να βρείτε τη συνάρτηση f .

21. Έστω μια συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ και $xf'(x) = f(x) \cdot \ln f(x)$ για κάθε $x > 0$. Αν $f(1) = e^2$ να βρείτε τον τύπο της f .

22. Έστω $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(x) \ln x + \frac{f(x)}{x} = 1$ για κάθε $x > 1$. Αν στο σημείο $M(e, f(e))$ η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη, να βρείτε τον τύπο της f .

23. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία $f(1) = 4$ και $f(-1) = -2$ και $xf'(x) - 2f(x) = x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

24. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία $f(1) = 1$ και $f(-1) = -4$ και $x^3 f'(x) + x^2 f(x) = 1$ για κάθε $x \neq 0$. Να βρείτε τον τύπο της f .

- 25.** Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη με $(x-1)(f'(x)+1) = 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f''(1) = 2$, να αποδείξετε ότι:
- i) η συνάρτηση f'' είναι σταθερή.
 - ii) $f(x) = x^2 - x$, $x \in \mathbb{R}$.