

Φύλλο 8

1. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = x^2 + \sqrt{x^3}$

ii) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} - x, & -1 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{1-x^2} + x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$

iii) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

iv) $f(x) = \ln x^2$

v) $f(x) = x^2 + \sqrt{(x-2)^2}$

2. Έστω μια συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ τέτοια, ώστε $f^2(x) + f(x^2) = 2x$, για κάθε $x > 0$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.

3. Έστω συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g(0) \neq 0$ και συνάρτηση h , με $h(x) = g(x)e^x + g(0)$, $x \in \mathbb{R}$.

- i) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες ευθείες των γραφικών παραστάσεων των g και h στο $x_0 = 0$, τέμνονται επί της ευθείας $x = -1$.
- ii) Αν $g(0) = 1$ και $h'(0) = -h(0)$, να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο σημείο $A(0, g(0))$.

4. Αν δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 5$ και ότι $\lim_{u \rightarrow 1} \frac{f(5u)}{1-u} = 11$, να βρείτε :

- i) Την εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο $A(5, f(5))$ και να αποδείξετε ότι αυτή διέρχεται από το σημείο $B(0, 11)$.
- ii) Το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ε με τους άξονες.

5. Αν $f(x) = 3x - \sqrt{x}$, $x > 0$, να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που είναι :

- i) Παράλληλες προς την ευθεία $\varepsilon_1 : 5x - 2y = 6$
- ii) Κάθετες στην ευθεία $\varepsilon_2 : 4x + 11y = 9$
- iii) Παράλληλες στο άξονα $x'x$

6. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ω όταν $f(x) = 2\sqrt{x-1}$ και $\omega = \frac{\pi}{6}$.
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x - \alpha x$ με $x > 0$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε τα σημεία M της C_f στα οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.
 - Να αποδείξετε ότι τα παραπάνω σημεία M κινούνται πάνω σε μια σταθερή ευθεία όταν το α διαγράφει το $\mathbb{R}$.
8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: x+2y-1=0$.
9. Αν $f(x) = 4x^2 - 7x + \sqrt{x}$, $x > 0$, να βρείτε εφόσον υπάρχουν, τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που διέρχονται από το σημείο $A\left(0, -\frac{7}{2}\right)$.
10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \ln x$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
11. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{2x^2 - 2\alpha x - \beta}{x^2 - 3x - 2}$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$ και η εφαπτομένη της στο σημείο $M(1, f(1))$ να είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $3x + 3y - 4 = 0$.
12. Αν $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta, & x < 1 \\ \frac{\gamma}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$, να βρείτε τις τιμές των α, β, γ για τις οποίες η γραφική της παράσταση έχει στο σημείο $A(1, f(1))$ εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: 4x - y - 2 = 0$.
13. Αν είναι $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})^2$ και $g(x) = 4\sin^2 \frac{x}{2} - x^2 - 2$ τότε:
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$.
 - Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε εφάπτεται της C_g .

14. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x) = f\left(-\frac{1}{x}\right) + xf(-x)$. Αν η ευθεία $\varepsilon: y = 2x + 1$ εφάπτεται στη C_f στο $x_1 = 1$, να βρείτε την εφαπτομένη στη C_g στο $x_2 = -1$.
15. Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f'(1) = 1$. Αν $g(x) = f(x^2 + x + \sin x) - \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ εφάπτεται της C_g στο σημείο $B(0, g(0))$.
16. Αν $0 < \alpha \neq 1$, να βρείτε την τιμή του α για την οποία η ευθεία $\varepsilon: y = x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha^x$.
17. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 3 \ln x - 2x$ στο σημείο $(1, -2)$ να εφάπτεται της C_g στο σημείο με $x_0 = 2$, όπου $g(x) = \alpha x^2 + \beta x$.
18. Αν $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 1}$ και $g(x) = x^2 - 2x + 1$, να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία και ότι μόνο στο ένα από αυτά έχουν κοινή εφαπτομένη.
19. Αν δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x^2 - \beta x + 9$ και $g(x) = \frac{1}{x - 1}$, να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε οι C_f και C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη 2.
20. Έστω $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x - 1}$ και $g(x) = \beta \sqrt{x} + 1$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε οι C_f και C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0 = 4$.
21. Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2$ και $g(x) = -\frac{1}{x}$.

22. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2\eta\mu x$ και $g(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 1$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδική κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g , η οποία και να προσδιοριστεί.
23. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = -x^2 + \lambda x$ και $g(x) = x^2 + \lambda - 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου λ , ώστε οι C_f , C_g να δέχονται κοινή εφαπτομένη. Να βρεθεί και η εφαπτομένη αυτή.
24. α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4e^{-x} = (x-1)^2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 3)$.
 β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$ και $g(x) = -\frac{1}{x}$ έχουν κοινή εφαπτομένη.
25. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g(x) = f(e^{\alpha x}) - 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
 - Στο σημείο $A(1, f(1))$ η C_f έχει εφαπτομένη την ευθεία (ε) με εξίσωση $y = x + 1$
 - Η καμπύλη της g στη θέση $x_0 = 0$ έχει εφαπτομένη που σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$.
- i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$
 ii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) είναι κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g
 iii) Έστω ότι $f(x) = \beta x^2 + \gamma$ ($\beta, \gamma \in \mathbb{R}$). Να αποδείξετε ότι:
- a) $\beta = \frac{1}{2}$ και $\gamma = \frac{3}{2}$
 b) Οι C_f και C_g τέμνονται μόνο στο πρώτο τεταρτημόριο
26. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x - 1$.
- i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f που διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$.
- ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και ότι οι καμπύλες των f και f^{-1} έχουν κοινή εφαπτομένη, την ευθεία (ε) $y = x$.
- iii) Να παραστήσετε γραφικά τις καμπύλες των f και f^{-1} , αλλά και της ευθείας (ε) .

27. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

i) α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση f' .

γ) Να βρείτε την εξίσωση της οριζόντιας εφαπτομένης της C_f

ii) Αν η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in (0, 1] \\ \alpha x^2 + \beta, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο

$x_0 = 1$, να ορίσετε τη συνάρτηση g'