

ΦΥΛΛΟ 12Α

1. Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = 3x^3 + 3\mu x^2 + (3\mu + 4)x + 3$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
2. Αν η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$, $\alpha \neq 0$ παρουσιάζει για $x=1$ τοπικό ακρότατο το 2 και η ευθεία $\varepsilon: y=x$ είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο $O(0, 0)$, να προσδιορίσετε τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
3. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $2(f(x))^3 + f(x) = e^x(x^2 - 2x + 3)$, να αποδείξετε ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.
4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = x + \frac{9}{x}$, $x \in (1, 3)$.
5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-1}$.
 - i) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.
 - ii) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .
6. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $xe^x = 1$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 1$.
 - i) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.
 - ii) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.
8. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $2\ln x + x^2 + 2004 = 4x$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$.
9. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x \ln x = \lambda$ έχει μοναδική ρίζα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2e^x - 2$ και $g(x) = 2\ln(x+1)$.
 - i) Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.
 - ii) Να αποδείξετε ότι στο κοινό τους σημείο έχουν κοινή εφαπτομένη.
 - iii) Να βρεθεί η κοινή τους εφαπτομένη.
11. Να λύσετε τις εξισώσεις:
 - i) $e^x - e^{-x} = 2xe^{-x}$
 - ii) $e^x = 1 + \ln(x+1)$
12. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^5 - 5x^4 + 3 = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.
13. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $e^{x-1} = 1 + \ln x$ έχει μοναδική ρίζα την $x=1$.

14. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $\frac{1}{x} - \ln x < 1$

iii) $e^x - 1 \leq x$

ii) $\ln \frac{2x-1}{x^2} < e^{x^2} - e^{2x-1}$

iv) $\eta\mu(e^x - 1) + 3(e^x - 1) \leq \eta\mu x + 3x$

15. α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$$f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{10}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

β) Να λύσετε την εξίσωση : $2^x + 3^x + 5^x = 10^x$.

16. Να αποδειχθούν οι ανισότητες :

i) $\ln(1+x) \leq x$ στο $(-1, +\infty)$

ii) $\sin x > 1-x$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

iii) $x \ln x \geq x-1$ για κάθε $x > 0$

iv) $e^x \geq x^e$ για κάθε $x > 0$

v) $x+2 > (2-x)e^x$ για κάθε $x > 0$

vi) $e^x \geq 1+x^2$ για κάθε $x \geq 0$

vii) $xy \leq e^{x-1} + y \ln y$ για κάθε $y > 0$ και $x \in \mathbb{R}$

viii) $\ln \alpha - \ln \beta > \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta}$ για κάθε $0 < \alpha < \beta$

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να αποδείξετε ότι $e^\pi > \pi^e$.

iii) Να αποδείξετε ότι $e^x \geq x^e$ για κάθε $x > 0$.

iv) Να αποδείξετε ότι $\alpha^{\alpha+1} > (\alpha+1)^\alpha$ για κάθε $\alpha \geq e$.

18. Έστω f, g δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν :

$f(\alpha) = g(\alpha)$ και $f'(x) > g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι $f(x) < g(x)$ στο $(-\infty, \alpha)$ και $f(x) > g(x)$ στο $(\alpha, +\infty)$.

19. Έστω μια συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\pi) = 0$. Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει

$xf'(x) < f(x) + x^2 \sin x$ να δείξετε ότι $f(x) < x \eta \mu x$ για κάθε $x > \pi$.

20. Η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) < 0$ στο $[\alpha, \beta]$.

Να αποδειχθεί ότι $f(x) \leq (x-\beta)f'(\alpha) + f(\beta)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

21. Έστω f μία συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν :

- $f(0) = f'(0) = 1$ και $f(x) > 0$ στο $[0, +\infty)$,
- $f''(x)f(x) < (f'(x))^2$ για κάθε $x > 0$

Να αποδειχθεί ότι :

- η συνάρτηση $h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$
- $f(x) \leq e^x$ για κάθε $x \geq 0$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x \ln x - x^2 + 1$.

- Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f , η $f'(x)$ και η $f''(x)$.
- Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το πρόσημο της f .
- Να λυθεί η εξίσωση $2 \ln x = \frac{x^2 - 1}{x}$.
- Αν $0 < x \neq 1$, να αποδειχθεί ότι $\frac{x \ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2 - (1-x)(\ln x - 2)$.

- Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 - 2 = (1-x)(\ln x - 2)$.
- Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .
- Να αποδειχθεί $(1-x)(\ln x - 2) \leq x^2 - 1$ για κάθε $x > 0$.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{\sqrt{x+1}}$.

- Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .
- Να βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης $g(x) = 2\sqrt{1+x} - x - 2$.
- Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.
- Να αποδειχθεί ότι $\ln(x+1) < \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ για κάθε $x > 0$.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1) \ln x + \frac{1}{x} + x - 2$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την εξίσωση $(x-x^2) \ln x + x^2 = 2x - 1$.
- Να βρείτε το πρόσημο της f .

26. Η συνάρτηση $f:[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $f(0) = f'(0) = 0$ και f' γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

είναι :

- i) Συνεχής στο διάστημα $[0, +\infty)$.
- ii) Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

27. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύουν $f(\alpha) = f(\beta) = 1$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, να αποδειχθεί :

- i) Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.
- ii) $f(x) < 1$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

28. Έστω f μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) + e^{f(x)} = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

- i) $f(0) = 0$
- ii) η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- iii) $\frac{x}{2} \geq f(x) \geq xf'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

29. Η συνάρτηση $f:[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με $f'(x) < \frac{1}{2}$ στο $(0, 1)$ και $f(0) = \frac{1}{4}$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = x_0$.

30. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\frac{1}{3}(f(x))^3 + f(x) = x \ln x - \frac{x^2}{2} + 2004$, $x \in \mathbb{R}$. Να εξετάσετε αν η f έχει τοπικά ακρότατα.

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x + \mu^2 e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$ και $\mu > 0$.

- i) Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f .
- ii) Αν x_0 είναι θέση τοπικού ακροτάτου της f , να αποδείξετε ότι το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ διατρέχει μια σταθερή ευθεία, όταν η παράμετρος μ διατρέχει το διάστημα $(0, +\infty)$.

32. Έστω f μία συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = f(\beta)$. Να αποδειχθεί ότι αν η f' είναι γνησίως αύξουσα τότε η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο (α, β) .

33. Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f(e^x) = 1 + 2x - 2e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι :

- i) $f(x) < 0$ για κάθε $x > 0$.
- ii) $(x - \alpha)f'(\alpha) > f(x) - f(\alpha)$ για κάθε $x > \alpha > 0$

34. Έστω f μια συνάρτηση που είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη και με παράγωγο γνησίως αύξουσα στο (α, β) . Να αποδειχθεί ότι :

$$f(x) \leq f(\alpha) + \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}(x - \alpha) \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

35. Έστω f, g συναρτήσεις δύο φορές παραγωγίσιμες στο διάστημα $[0, 2004]$ για τις οποίες ισχύουν :

- $f(0) = g(0) - 2004 = 0$ και $f(2004) = g(2004)$
- $f''(x) < 0$ και $g''(x) > 0$ στο $[0, 2004]$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = g(x) - f(x) + x - 2004$. Να αποδείξετε ότι :

- i) Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 2004)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_F στο σημείο της $A(x_0, F(x_0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- ii) $g(x) + x \leq f(x) + 2004$ για κάθε $x \in [0, 2004]$.

36. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν :

- $f(1) = 0$
- $x(f(x) + xf'(x)) = 1$ για κάθε $x > 0$.
- i) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$.
- ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- iv) Να αποδείξετε ότι $e^\pi > \pi^e$.
- v) Να λύσετε την εξίσωση $(\eta \mu x)^{\sigma \upsilon \nu x} = (\sigma \upsilon \nu x)^{\eta \mu x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \alpha x$, $x > 0$ με $\alpha > 0$.

- i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του α έτσι ώστε να είναι $\ln x \leq \alpha x$ για κάθε $x > 0$.
- iii) Για την τιμή του α που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να δείξετε ότι η ευθεία $y = \alpha x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \ln x$, $x > 0$.

38. Η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν : $f(\alpha) = 0$, $f(\beta) > 0$ και $f'(\beta) < 0$. Να αποδειχθεί ότι :
- Η f δεν παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x = \beta$ ή στο σημείο $x = \alpha$.
 - Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f'(x_0) = 0$.
39. Έστω f μία συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ και ισχύει $|f''(x)| \leq 2004$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Αν $x_0 \in (0, 1)$ είναι θέση τοπικού ακροτάτου της f , να αποδειχθεί ότι $|f'(0)| + |f'(1)| \leq 2004$.
40. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του α , ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $\frac{x + e^x}{e^x} \leq \alpha$.
41. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f(1) = 2004$ και $f(x) \leq x - \ln x + 2003$ για κάθε $x > 0$. Να αποδειχθεί ότι :
- $f'(1) = 0$
 - αν $f''(x) < 0$ στο $(0, +\infty)$, τότε $f(x) \leq 2004$, $x > 0$.
42. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα $\Delta = (0, +\infty)$ με $f(1) = 2$. Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) \leq 2 \ln x + x^2 + 1$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.
43. Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύουν :
- $f(0) = 2004$
 - $f(x) \geq 2004 + \eta \mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.
44. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύει $e^{2f(x)} + 1 \leq 2e^{f(x^2)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :
- $f(0) = f(1)$
 - υπάρχει εφαπτομένη της C_f παράλληλη στο άξονα $x'x$.
 - $f'(0) = f'(1)$
 - η f'' δεν είναι συνάρτηση «1 - 1».