

ΦΥΛΛΟ 14

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3}{4}x^2$, $x > 0$
 - i) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
 - ii) Να μελετηθεί η f ως προς τα κοίλα.
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 - 21x^2 + 24x - 2 + 6x^2 \ln x$. Να βρεθούν :
 - i) Τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.
 - ii) Τα σημεία καμπής της C_f , αν υπάρχουν.
3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - x \ln x - 1$.
 - i) Να μελετηθεί η f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.
 - ii) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
 - iii) Να βρεθεί το πρόσημο της f .
 - iv) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^{x-1} = 1 + x \ln x$.
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln^2 x - 2 \ln x + 3$.
 - i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
 - ii) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.
5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln x$.
 - i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f , να μελετήσετε τη μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.
 - ii) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.
 - iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
6. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\ln x + 2x + 4) \ln x - 6x + 6$.
 - i) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $g(x) = \ln x - x + 1$.
 - ii) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.
 - iii) Να βρείτε τη μονοτονία και το πρόσημο της f και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - \mu x^3 + 6x^2 - (1 + \mu^2)$. Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η C_f στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$.
9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{\lambda x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν οι τιμές των $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι κυρτή.
10. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \lambda^2 x^3 + 3\lambda x^2 + 2x - 1$ να παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = 1$.
11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\alpha x^3 + 3\beta x^2 + (3\alpha + 2\beta)x + 18$. Αν το $A(-1, 3)$ είναι σημείο καμπής της C_f , να προσδιορίσετε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.
12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\alpha x \ln x$, $x > 0$. Αν η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής με οριζόντια εφαπτομένη, να προσδιορίσετε τον $\alpha \in \mathbb{R}$.
13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + 9\beta x^2 + 54x - 3\beta(1 + \mu^2)$ με $\alpha\beta \neq 0$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το $A(1, f(1))$ είναι σημείο καμπής της C_f και η εφαπτομένη της C_f στο A είναι κάθετη στην ευθεία $\delta: x + 45y + 2004 = 0$.
14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\ln x - \alpha)^2 - x$, $x > 0$. Να αποδειχθεί ότι:
 - i) Η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής $M(x_0, f(x_0))$ για κάθε τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - ii) Όταν το α διατρέχει το $\mathbb{R}$, τότε το M κινείται πάνω σε μια σταθερή ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
15. Να αποδειχθεί ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -2x^3 + 6\mu x^2 - 9\mu x + 10\mu^2 - 4\mu^3$ έχει για κάθε τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$ ακριβώς ένα σημείο καμπής $M(x_0, f(x_0))$. Στη συνέχεια να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του M όταν το μ διατρέχει το $\mathbb{R}$.
16. α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = (2x - \lambda)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$ για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.
 β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου καμπής της C_f όταν το λ διατρέχει το $\mathbb{R}$.
17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 - 2x \ln x$, $x > 0$ και $\alpha > 0$.

- i) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη καθώς και τα ενδεχόμενα σημεία καμπής.
- ii) Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής είναι οριζόντια, να προσδιορίσετε τον $\alpha > 0$.
- iii) Αν το α διατρέχει το διάστημα $(0, +\infty)$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου καμπής της C_f .
- 18.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) < 0$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln f(x)$ είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.
- 19.** Έστω f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, +\infty)$ για την οποία υποθέτουμε ότι $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(x) > f'(x)$ για κάθε $x \geq 0$. Να αποδειχθεί ότι:
- i) Οι συναρτήσεις $g(x) = f'(x) - f(x)$ και $\phi(x) = f(x)e^{-x}$ είναι γνησίως αύξουσες στο $[0, +\infty)$.
- ii) Η συνάρτηση $h(x) = (f(x))^2 + 2004x + 2005$ στρέφει τα κοίλα άνω στο $[0, +\infty)$.
- 20.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - x \ln x - 1$.
- i) Να μελετηθεί η f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.
- ii) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- iii) Να βρεθεί το πρόσημο της f .
- iv) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^{x-1} = 1 + x \ln x$.
- 21.** Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(0) = 0$. Αν η f' είναι κοίλη, να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής της C_f .
- 22.** Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f^3(x) + f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- i) Να βρείτε το πρόσημο της f και να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα.
- ii) Να δείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και να βρείτε τα διαστήματα που είναι κυρτή ή κοίλη και το σημείο καμπής της.
- 23.** Έστω f μία συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία υποθέτουμε ότι $f(x) - e^{-f(x)} = x^2 - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι:
- i) $x + 1 = e^{-x}$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.
- ii) Το $f(0)$ είναι το ελάχιστο της f το οποίο και να βρεθεί.
- iii) Η f στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$.

- 24.** Έστω f μία συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία υποθέτουμε ότι $(f'(x))^3 + f'(x) = e^x + x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η C_f δεν έχει σημείο καμπής.
- 25.** Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση $f(x) + e^{f(x)} = 1 + x - x^2 - e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:
- Η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής.
 - Η f έχει ακριβώς ένα σημείο που είναι θέση τοπικού ακροτάτου.
 - Η f είναι κοίλη.
- 26.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(\ln x)$.
- Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη.
 - Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = e$.
 - Να δείξετε ότι $\ln \ln x \leq \frac{x}{e} - 1$ για κάθε $x > 1$.
- 27.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x + 1)$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της
 - Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.
 - Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.
 - Να αποδείξετε ότι $\ln \frac{e^x + 1}{2} \geq \frac{1}{2}x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 28.** Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) = f(2-x)$, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f και τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων.
- 29.** Έστω μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) . Αν $f(\alpha) = f(\beta) = c$ και η f κυρτή στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(x) < c$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.
- 30.** Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Έστω ότι υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\gamma) > 0$. Να αποδείξετε ότι:
- Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) < 0$
 - Αν η f είναι κοίλη στο $[\alpha, \beta]$, τότε:
 - υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$,
 - είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

- 31.** Έστω f μία συνάρτηση που είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 4]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 4)$ με $f(1) = f(2) = 0$. Αν η f στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $[0, 4]$, να αποδειχθεί ότι $f(0)f(4) > 0$.
- 32.** Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = f(\beta)$. Αν η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι :
- $f'(\beta) < 0 < f'(\alpha)$
 - $f(x) \geq f(\alpha)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.
- 33.** Η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν : f'' γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) = f(\beta)$ και $f'(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.
- 34.** Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι κυρτή. Αν $f(1) = 2$, να δείξετε ότι $2f(4) + 3f(-1) > 10$.
- 35.** Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $e^{f(x)} + f(x) = x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
 - Να μελετηθεί η f ως προς τα κοίλα.
 - Αν $f(0) = 0$, να αποδειχθεί ότι $xf'(x) < f(x) < \frac{x}{2}$ για κάθε $x > 0$.