

ΦΥΛΛΟ 15

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\alpha+2)x^2 - 3\alpha x + 4}{2x-1}$ και η ευθεία $\varepsilon: y = 3x + \beta$. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ευθεία ε είναι ασύμπτωτη της C_f .
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\alpha+1)x^2 + (\beta-1)x + 2004}{2x+\gamma}$. Αν η ευθεία $\varepsilon: x = -2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f και η ευθεία $\delta: y = 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, να προσδιορίσετε τους α, β και γ .
3. Να βρείτε για ποιές τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η ευθεία με εξίσωση $\varepsilon: x = 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2 - 5x + \alpha + 2}{8x - \alpha^2}$.
4. Αν η ευθεία $\varepsilon: y = 2x + 7$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3xf(x) + x^2 - 1}{x^2 f(x) - 2x^3}$.
5. Αν η ευθεία $\varepsilon: y = x + 3$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στο $+\infty$ και ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4x+1)f(x) + 2\mu x^2 + 3}{x^2 f(x) - x^3 + x + 1} = 4$, να προσδιορίσετε το $\mu \in \mathbb{R}$.
6. Να προσδιορίσετε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - x + 1}{x-1} - \alpha x - \beta \right) = 0$.
7. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - 2\alpha x + \beta - 1 \right) = 3$.
8. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2xe^{\frac{1}{x}} - \alpha x + 2\beta \right) = 0$.
9. Έστω η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 3x + 3) = 3$. Να βρείτε την ασύμπτωτη στο $+\infty$ της συνάρτησης $g(x) = f(x) - 2x$.
10. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $(0, +\infty)$ για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύει $x+1 \leq f(x) \leq x+1 + \frac{e^{-x}}{x}$, $x > 0$. Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

11. Έστω f μία συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0) = f'(0) = 1$ και $f(x) > 0$ στο $\mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x))^{\frac{1}{\eta\mu x}}$.
12. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0) = -3$. Να υπολογίσετε το όριο $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x^2}{x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1}$.
13. Αν η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(3)}(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{(3)}(x)}{xf''(x)} = 1$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + f(x)}{xf'(x)} = 0$.
14. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, υπάρχει στο $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + f'(x)] = 2$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.
15. Αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} xe^x + \alpha, & x \leq 1 \\ \beta \ln x, & x > 1 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη, να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x+\alpha)e^x - (1+\alpha)x + \beta}{x^2}$. Αν είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = -2$.
17. Για ποιές τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu 3x}{x^3} + \frac{\alpha}{x^2} + \beta \right) = 2$.
18. Έστω f μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0) = 2004$.
- i) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$.
- ii) Να αποδείξετε ότι η g' είναι συνεχής στο $x = 0$.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{1-x}, & \text{αν } 0 < x \neq 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ -1, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$.

- i) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.
- ii) Να βρείτε την παράγωγο της f .
- iii) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ (1-e^{-x^2}) \ln x^2, & \text{αν } x \neq 0 \end{cases}$.

- i) Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \ln x^2)$.
- ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.
- iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $O(0, 0)$.