

ΦΥΛΛΟ 7

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 4x^2 - \alpha^2 x, & \text{αν } x \leq 1 \\ 7x - \alpha - 3, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$. Να προσδιορίσετε τις τιμές του α για τις οποίες η f είναι :
- συνεχής στο 1,
 - παραγωγίσιμη στο 1
2. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$ η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x, & \text{αν } x \geq 3 \\ 2\alpha x + \beta + 5, & \text{αν } x < 3 \end{cases}$
3. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$ με $f(1) = f'(1) = 1$. Να υπολογίσετε τα όρια : i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - 1}{x^2 - 1}$ ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x)| - x}{\sqrt{x} - 1}$
4. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και ισχύει $f^3(x) + f(x) + 1 = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι $f'(1) = 2$
 - Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$.
5. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 2, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (\sqrt{x^2 + 5} - 3)f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 2.
6. Αν $f(x) - f(x-1) = 2x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sqrt[3]{x+1}}{x} = -\frac{1}{3}$ και η f είναι συνεχής στο 0, να υπολογίσετε : i) την $f'(0)$, ii) την $f'(1)$
7. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 3$ και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 6x}{x^2 - 9} = 10$.
- Να βρείτε την τιμή $f(3)$.
 - Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 3$.
 - Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2x^2}{4x^2 - 12x}$.
 - Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 3$.

8. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(x+y) = f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Αν $f(0) \neq 0$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο 0, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f'(x_0) = f'(0)f(x_0)$.

9. Έστω η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία υποθέτουμε ότι:

- $f(\alpha\beta) = f(\alpha) + f(\beta)$ για κάθε $\alpha > 0$ και $\beta > 0$.
- η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\xi > 0$.

Να αποδειχθεί ότι:

i) $f(1) = 0$

ii) $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ για κάθε $x > 0$

iii) $f'(x_0) = \frac{\xi}{x_0} f'(\xi)$ για κάθε $x_0 > 0$.

10. Αν είναι $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $g(2) = 4$, $g'(2) = 10$ και για κάθε $x \geq 1$ ισχύει

$$4\sqrt{g(x)} + 2 \leq f(x) + 3 \leq g(x) + 6, \text{ να αποδείξετε ότι η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } 2.$$

11. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 5h) - f(x_0)}{h}$

ii) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0 + 5h)}{h}$

iii) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(x_0 - 2h) - f^2(x_0 + 5h)}{h}$

iv) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) + f(x_0 + 5h) - 2f(x_0)}{h}$