

Φύλλο 17

Βασικά ολοκληρώματα

1. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^1 x^3 dx$

β) $\int_0^1 (3x-2)^4 dx$

γ) $\int_0^1 \frac{dt}{e^{3t}}$

δ) $\int_1^2 \frac{1}{x^3} dx$

ε) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

στ) $\int_1^2 \frac{x^2-3x+1}{x^2} dx$

ζ) $\int_1^4 \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx$

η) $\int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$

θ) $\int_0^\pi \eta \mu x \cdot \sigma \upsilon \nu x dx$

ι) $\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \left(2\sigma \upsilon \nu x + \frac{1}{x} \right) dx$

ια) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$

ιβ) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

ιγ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\eta \mu x + e^x) dx$

ιδ) $\int_0^{\alpha^2} \frac{dx}{x \ln x}$

ιε) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma \phi x dx$

ιστ) $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{\eta \mu^2 x} \right) dx$

ιζ) $\int_0^\pi \frac{\eta \mu x}{2 + \sigma \upsilon \nu x} dx$

ιη) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \epsilon \phi x dx$

ιθ) $\int_1^2 \left(2^x + \frac{1}{x^2} \right) dx$

κ) $\int_1^4 \frac{2x-3}{\sqrt{x}} dx$

κα) $\int_0^1 (2x+1)^3 dx$

κβ) $\int_0^\pi \sigma \upsilon \nu 5x dx$

2. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+5} dx$

β) $\int_2^3 \frac{1}{x^2-1} dx$

γ) $\int_0^1 \frac{x^2+x+1}{x+1} dx$

δ) $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$

ε) $\int_0^{-1} \frac{2x-3}{x^2-4x+3} dx$

στ) $\int_2^3 \frac{x^2+1}{x^2-x} dx$

ζ) $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$

η) $\int_0^1 \frac{1}{x^2-3} dx$

θ) $\int_0^1 \frac{6x^2-20x+5}{3x^2-x+1} dx$

ι) $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1} dx$

ια) $\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx$

ιβ) $\int_2^3 \frac{x^3}{x^2-4} dx$

ιγ) $\int_0^{-1} \frac{x+5}{x^2+x-2} dx$

ιδ) $\int_0^1 \frac{3x+2}{2x+1} dx$

3. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^1 x e^x dx$

β) $\int_1^2 \ln(x+1) dx$

γ) $\int_0^\pi e^x \eta \mu x dx$

δ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \eta \mu x dx$

ε) $\int_1^\alpha x^2 \ln x dx$

στ) $\int_0^\pi e^{2x} \eta \mu 3x dx$

ζ) $\int_0^\pi x^2 \sigma \upsilon \nu x dx$

η) $\int_0^1 x^2 \ln(x+1) dx$

θ) $\int_0^\pi \frac{\sigma \upsilon \nu x}{e^x} dx$

$$\begin{array}{lll}
 \text{ι)} \int_1^2 x \ln x^2 dx & \text{ια)} \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx & \text{ιβ)} \int_0^\pi (3x^2 - 4x + 5) \sin \frac{x}{2} dx \\
 \text{ιγ)} \int_1^2 \ln x dx & \text{ιδ)} \int_1^t \ln^2 x dx & \text{ιε)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\sin^2 x} dx \\
 \text{ιστ)} \int_1^3 2x \ln x dx & \text{ιζ)} \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx & \text{ιη)} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\eta\mu^2 x} dx \\
 \text{ιθ)} \int_1^2 (4x^3 + 1) \ln x dx & \text{κ)} \int_0^\pi e^x \sin x dx &
 \end{array}$$

4. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll}
 \alpha) \int_1^2 (x-1)^3 dx & \beta) \int_0^1 x^2 \sqrt{x+1} dx & \gamma) \int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \\
 \delta) \int_0^1 \frac{dx}{(3x+1)^2} & \epsilon) \int_{\ln 3}^{3 \ln 2} \sqrt{e^x + 1} dx & \sigma\tau) \int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx \\
 \zeta) \int_{-1}^0 x^2 (x-1)^4 dx & \eta) \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}} & \theta) \int_0^{\ln 2} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx \\
 \iota) \int_0^1 (x-1)^3 (2x-1) dx & \text{ια)} \int_0^1 x e^{x^2+1} dx & \text{ιβ)} \int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x} - 2}{e^x + 1} dx \\
 \text{ιγ)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} & \text{ιδ)} \int_0^1 e^x \ln(1+e^x) dx & \text{ιε)} \int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^{2x} - e^x - 2} dx \\
 \text{ιστ)} \int_0^3 x \sqrt{x+1} dx & \text{ιζ)} \int_0^1 x \ln(1+x^2) dx & \text{ιη)} \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx
 \end{array}$$

5. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{ll}
 \alpha) \int_0^1 \ln(4-x^2) dx & \beta) \int_0^1 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx \\
 \gamma) \int_0^1 e^x \ln(e^{-x} + 1) dx &
 \end{array}$$

6. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\begin{array}{lll}
 \alpha) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 x dx & \beta) \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x dx & \gamma) \int_0^\pi \eta\mu^3 x \cdot \sin^2 x dx \\
 \delta) \int_0^\pi \eta\mu^5 x dx & \epsilon) \int_0^\pi \eta\mu x \cdot \sin^2 x dx & \sigma\tau) \int_0^\pi \eta\mu^2 x \cdot \sin^3 x dx \\
 \zeta) \int_0^\pi \eta\mu^2 x dx & \eta) \int_0^\pi \eta\mu^2 x \cdot \sin x dx & \theta) \int_0^\pi \eta\mu^3 x \cdot \sin^4 x dx
 \end{array}$$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ e^x - 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.

β) Να βρείτε το $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 1 \\ 2x - 1, & x \leq 1 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.

β) Να βρείτε το $\int_{-1}^2 f(x) dx$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x < 0 \\ \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^2 f(x) dx$.

10. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\int_{-1}^1 |e^x - 1| dx$$

$$\int_0^2 (|x-1| + x) dx$$

$$\int_1^{e^2} |\ln x - 1| dx$$

11. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(\lambda) = \int_1^\lambda \frac{\ln t}{t^2} dt$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda)$.

12. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(x) = \int_1^x t^2 e^t dt$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} I(x)$.

13. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^\alpha te^t dt$.

14. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) = 2x + \int_0^2 f(x) dx$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την f .

15. Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ όταν $f(x) = 3x + \int_0^1 xf(x) dx$.

Ολοκλήρωμα αντίστροφης συνάρτησης

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.

α) Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να υπολογίσετε το $\int_0^e f^{-1}(x)dx$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x$.

α) Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να υπολογίσετε το $\int_1^{e+1} f^{-1}(x)dx$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - x - e^x$, $x > 1$.

α) Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να υπολογίσετε το $\int_{f(2)}^{f(e)} f^{-1}(x)dx$.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\ln x}$, $x > 1$.

α) Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να την βρείτε.

β) Να υπολογίσετε το $I = \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln x} dx + \int_1^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{x}} dx$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 f^{-1}(x)dx$.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 + 5x}{x^2 + 1}$. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το

ολοκλήρωμα $\int_0^3 f^{-1}(x)dx$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx + 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x f^{-1}(x)dx = \pi$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 0 \\ e^x + 1, & x > 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

β) Να υπολογίσετε το $\int_1^3 f^{-1}(x)dx$.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \ln x, & 0 < x < 1 \\ \sqrt{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

β) Να υπολογίσετε το $\int_{-1}^1 f^{-1}(x)dx$.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, & x \leq 1 \\ 3 - 2x, & x > 1 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

β) Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f^{-1}(x)dx$.

26. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x) + f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

β) Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x)dx$.

27. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση $f^5(x) + f(x) + 1 = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

β) Να υπολογίσετε το $\int_0^3 f(x)dx$.