

Φύλλο 18

1. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ στις επόμενες περιπτώσεις.

α) $f(x) = \ln x$, $x = 1$, $x = e$

β) $f(x) = \ln \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = e$

γ) $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 1$

δ) $f(x) = x^3 - 1$, $x = -1$, $x = 2$

ε) $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$, $x = 1$, $x = 2$

στ) $f(x) = xe^{-x}$, $x = 0$, $x = 1$

ζ) $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$, $x = 1$, $x = e$

η) $f(x) = e^{-x} \sin x$, $x = 0$, $x = \pi$

θ) $f(x) = 2 \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x} \eta \mu x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$

ι) $f(x) = \frac{\sin x}{\eta \mu^2 x + 3 \eta \mu x + 2}$, $x = 0$, $x = \pi$

ια) $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$, $x = 0$, $x = 1$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \leq 0 \\ e^{-x} - 1, & x > 0 \end{cases}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = -2$, $x = 1$.

3. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha + \ln x, & 0 < x \leq 1 \\ 1 + \sqrt{x-1}, & x > 1 \end{cases}$.

α) Να βρείτε το α .

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + \alpha, & x < 0 \\ -2x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = -1$, $x = 2$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sin^2(\pi x), & x \leq 1 \\ 1 + \frac{\ln x}{x}, & x > 1 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η f να είναι συνεχής.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = 0$, $x = e$.

- ### Εμβαδόν που περικλείεται από δύο γραφικές παραστάσεις

- 2**

14. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x+1)$ και $g(x) = x - \frac{x^2}{2}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f και C_g και την ευθεία $x=1$.
15. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + x$ και $g(x) = 3 - x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται:
- Από τις C_f και C_g .
 - Από τις C_f και C_g και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$, $x=2$.
16. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g αν:
- $f(x) = e^{2x-1} - e^x + 2$ και $g(x) = 1 + e^{x-1}$
 - $f(x) = xe^x + 1$ και $g(x) = x + e^x$
 - $f(x) = \ln x$ και $g(x) = x + e^x$
17. Αφού κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g που δίνονται παρακάτω, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f και C_g :
- $f(x) = \eta \mu x$ και $g(x) = \frac{2}{\pi}x$
 - $f(x) = \sqrt{x+1}$ και $g(x) = x - 1$
18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3$.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, 1)$.
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και την εφαπτομένη.
19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(4, f(4))$.
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $y'g$ και την παραπάνω εφαπτομένη.
20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f , την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ και την ευθεία $x=2$.
21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $y'g$ και την παραπάνω εφαπτομένη.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$.

- α) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την παραπάνω εφαπτομένη και τον άξονα $x'x$.

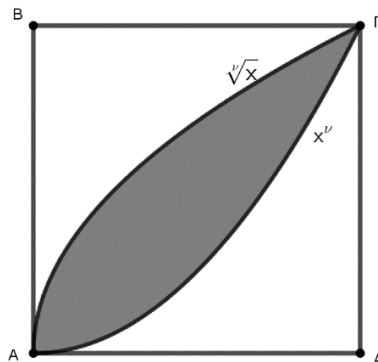
23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$. Να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από τη C_f , την πλάγια ασύμπτωτή της στο $+\infty$ και την ευθεία $x=2$.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 2 + \frac{e^x}{e^{2x} - 1}$.

- α) Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
- β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την παραπάνω ασύμπτωτη και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$.

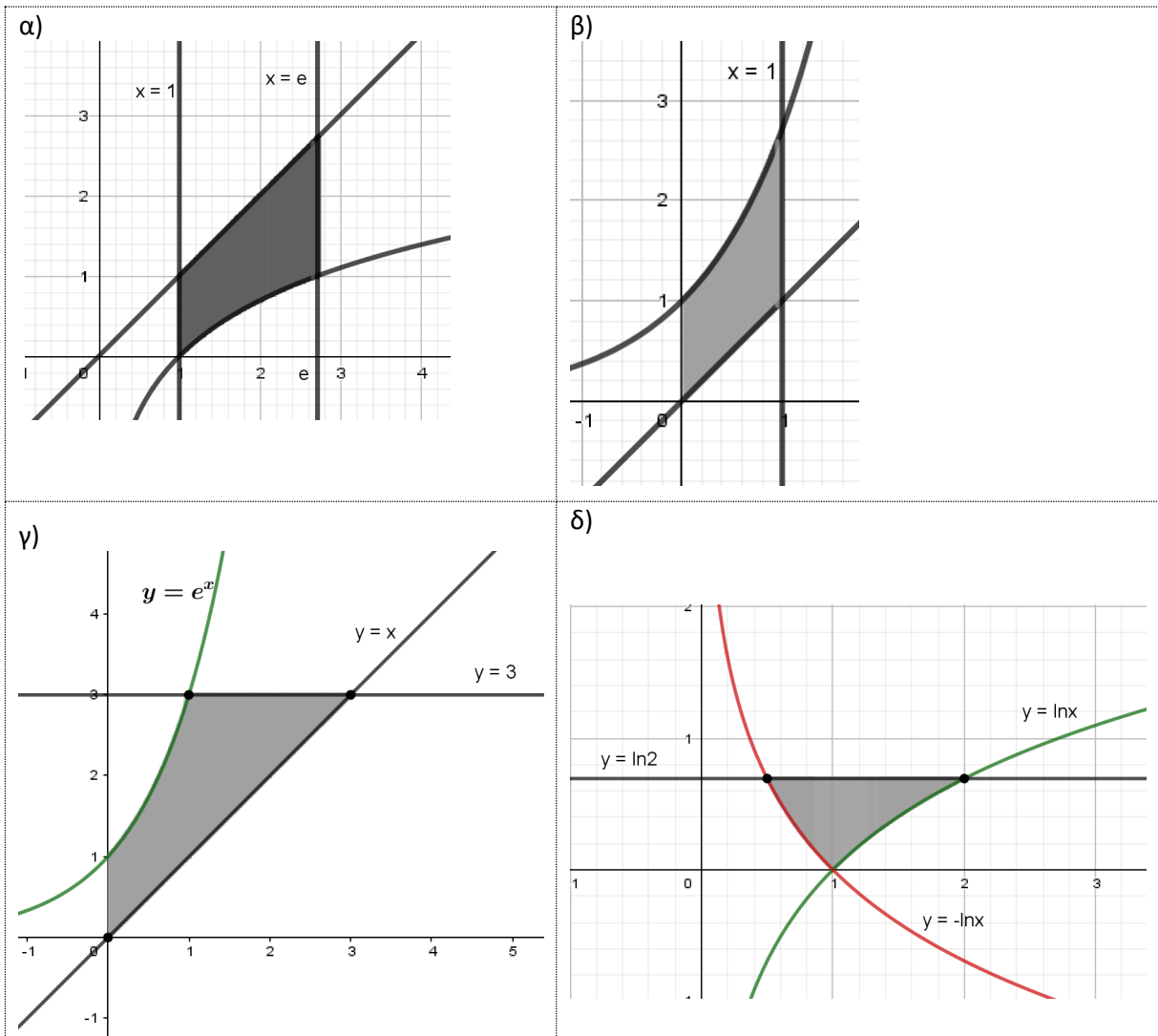
25. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^x$, την ευθεία $y = e^\alpha$, $\alpha > 0$ και τον άξονα $y'y$, είναι $e^2 + 1$. Να βρείτε την τιμή του α .

26. Μια εταιρεία κατασκευάζει πλακάκια δαπέδου όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρείτε την τιμή του $n \in \mathbb{N}^*$, για την οποία η λευκή επιφάνεια είναι ίση με την γκριζα.



Εμβαδόν που περικλείεται από τρεις γραφικές παραστάσεις

27. Να υπολογίσετε τα εμβαδά των γραμμοσκιασμένων χωρίων στις επόμενες περιπτώσεις:



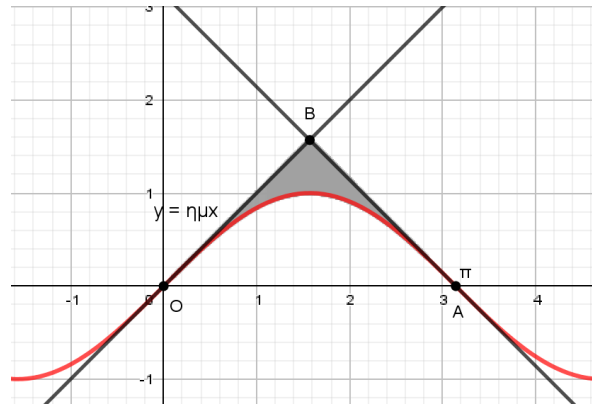
28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1}$.

- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(5, f(5))$.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα x' και την παραπάνω εφαπτομένη

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2$.

- Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 6x - 3$ εφάπτεται στη C_f .
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την παραπάνω εφαπτομένη ϵ και τον άξονα x' .

30. Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta \mu x$ και οι εφαπτομένες της στα σημεία $O(0, 0)$ και $A(\pi, 0)$, οι οποίες τέμνονται στο σημείο B.



- α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων αυτών.
 β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις εφαπτομένες της στα σημεία O και A .
31. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 4y$.
 α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 , οι οποίες άγονται από το σημείο $K(-2, -3)$.
 β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της παραβολής και των εφαπτομένων $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.
 γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή και τις ε_1 και ε_2 .
32. Από το σημείο $A(1, -8)$ φέρουμε τις εφαπτομένες ε_1 και ε_2 προς την παραβολή με εξίσωση $y = x^2 - 2x - 3$. Να βρείτε:
 α) Τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 .
 β) Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την παραβολή και τις ε_1 και ε_2 .
 γ) Το λόγο του εμβαδού του χωρίου Ω (ερώτημα β) προς το εμβαδού του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή και τον άξονα x' .
33. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4 - x^2$ και $g(x) = -x^2 + 8x - 20$. Να βρείτε:
 α) Την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης ε των C_f και C_g .
 β) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και ε .

Εμβαδόν μεταβλητού χωρίου

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2}$

- α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=\lambda$, $0 < \lambda \neq 1$.
- β) Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε $E(\lambda) = 3$.
- γ) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{\lambda \rightarrow 0} E(\lambda)$ και $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.

35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

- α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
- β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\lambda$, $-1 < \lambda \neq 0$.
- γ) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{\lambda \rightarrow -1} E(\lambda)$ και $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.

36. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e}{x}$ και $g(x) = \ln x$.

- α) Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν μοναδικό κοινό σημείο.
- β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g και την ευθεία $x=\lambda$, $\lambda > 0$.
- γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.

37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$ και οι ευθείες $y=1$ και $y=\alpha^2$ με $0 < \alpha < 1$. Η ευθεία $y=\alpha^2$ χωρίζει το χωρίο που δημιουργείται από τη C_f και την ευθεία $y=1$ σε δύο ισεμβαδικά χωρία. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

38. Έστω E το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{x^2}$, τις ευθείες $x=1$ και $x=3$ και τον άξονα x' . Να προσδιορίσετε την ευθεία $x=\alpha$ που χωρίζει το E σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

39. Δίνονται τα σημεία $M(\alpha, \alpha^3)$ και $M(\alpha, 0)$, $\alpha > 0$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$ χωρίζει την επιφάνεια του τριγώνου OMN σε δύο ισοδύναμα μέρη, όπου O η αρχή των αξόνων.

40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 2 - \frac{e^x}{1 + e^x}$.
- α) Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.
 - β) Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f , την προηγούμενη ασύμπτωτη, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = \lambda$, $\lambda < 0$.
 - γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E(\lambda)$.
 - δ) Αν το λ ελαττώνεται με ρυθμό 2 μον./sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(\lambda)$ τη χρονική στιγμή που είναι $\lambda = -\ln 2$.

Εμβαδόν και αντίστροφη συνάρτηση

41. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.
- α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πρόσημο της f^{-1} .
 - β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = e$.
42. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{x^2}$.
- α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 - β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = e$.
43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \varepsilon \varphi x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 - β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία $x = \frac{\pi^2}{16} + 1$.
44. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)^3$.
- α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 - β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$.
45. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$.
- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.
 - β) Να εξετάσετε αν η f αντιστρέφεται και αν ναι να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.
 - γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e + 1$ με δύο τρόπους.
46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 1 + \ln x$

- α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=e$.
- γ) Να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία $y=x$ και τον άξονα $x'x$.
- δ) Να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , την ευθεία $y=x$ και τον άξονα $y'y$.
- 47.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x) + f(x) = 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- β) Να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ και να βρείτε την αντίστροφη της f .
- γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f^{-1} και f .
- δ) Να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$.
- ε) Να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία $y=1$ και τον άξονα $y'y$.
- στ) Να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$.
- ζ) Να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} .