

## Φύλλο 19

1. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{array}{lll} \alpha) \int_0^1 \eta \mu x^2 dx < \frac{1}{3} & \beta) \int_0^1 \eta \mu x^3 dx < \frac{1}{4} & \delta) \int_2^3 \frac{1}{\ln x} dx > \ln 2 \\ \gamma) & & \epsilon) \\ \sigma\tau) \int_0^1 \frac{2\eta \mu x}{x^2 + 1} dx < \ln 2 & \zeta) \int_0^1 \frac{2x\eta \mu x}{x^2 + 3} dx < \ln \frac{4}{3} & \eta) \int_0^1 e^{x^2} dx > \frac{4}{3} \\ \theta) \int_0^1 \ln(1+x^2) dx < \frac{1}{3} & \iota) \int_0^1 \ln(e^x - x) dx < e - \frac{5}{2} & \kappa) \int_0^1 e^{-x^2} dx > \frac{2}{3} \end{array}$$

2. Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και δεν είναι σταθερή. Να δείξετε ότι  $\int_0^1 f^2(x) dx + 1 > 2 \int_0^1 f(x) dx$ .

3. Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής. Αν  $\int_0^1 f^2(x) dx = 1$ , να δείξετε ότι  $2 + 3 \int_0^1 x f(x) dx \geq 0$ .

4. Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής. Αν  $\int_0^1 f^2(x) dx = 1$ , να δείξετε ότι  $5 \int_0^1 x^2 f(x) dx \leq 3$ .

5. α) Να δείξετε ότι  $t^2 \int_1^2 e^{2x} dx - 2t \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx + \int_1^2 \frac{dx}{x^2} \geq 0$ , για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ .

β) Να δείξετε ότι  $\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx \leq \frac{e\sqrt{e^2 - 1}}{2}$ .

6. Να δείξετε ότι:

$$\begin{array}{ll} \alpha) 1 < \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx < \sqrt{2} & \beta) \frac{1}{e} < \int_0^1 e^{t^2} dt \cdot \int_0^1 e^{-t^2} dt < e \\ \gamma) 1 < \int_0^1 e^{t^2} dt < e & \delta) 48 < \int_0^8 \sqrt{x^2 + 36} dx < 80 \end{array}$$

7. Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Να αποδείξετε ότι  $f(2) < 2 \int_{-1}^{\sqrt{2}} x f(x^2 + 1) dx < f(3)$ .

8. Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και θετική. Να δείξετε ότι  $\int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right) dx > \int_1^2 xf(x) dx$ .

9. Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα. Να αποδείξετε ότι  $f(1) < 2 \int_{-1}^{\sqrt{2}} xf(x^2 - 1) dx < f(0)$ .

10. Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και θετική. Να δείξετε ότι:

$$\alpha) \int_3^9 f\left(\frac{x}{3}\right) dx > \int_3^9 xf(x) dx \quad \beta) \int_{\frac{1}{2}}^1 f(2x) dx > \frac{1}{4} \int_1^2 xf(x) dx$$

11. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ .

α) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να δείξετε ότι  $\int_1^2 x^x dx > e - 1$ .

12. Έστω  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής με ελάχιστη τιμή 1 και μέγιστη τιμή 3.

Να δείξετε ότι  $\frac{4}{3} < \int_0^2 f(x) dx \cdot \int_0^2 \frac{1}{f(x)} dx < 12$ .

13. α) Να δείξετε ότι  $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}$ , για κάθε  $x > 0$ .

β)  $\int_1^{17} x^e dx < \int_1^{17} e^x dx$

14. Να δείξετε ότι:

$$\alpha) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \eta \mu x dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sigma \upsilon \nu x) dx \quad \beta) \int_1^e 2 \ln x dx < \int_1^e (x^2 - 1) dx$$

$$\gamma) \int_0^2 \ln \left( \frac{1 + e^x}{2} \right) dx < 2 \ln \left( \frac{1 + e^2}{2} \right) \quad \delta) \int_0^{\pi} 2 \sigma \upsilon \nu x dx > \int_0^{\pi} (2 - x^2) dx$$

$$\epsilon) \int_0^{e^2} \ln x^2 dx > \int_0^{e^2} \ln^2 x dx \quad \sigma\tau) \int_{\alpha}^{\beta} (x^2 \eta \mu x + 2x \sigma \upsilon \nu x - 2 \eta \mu x) dx > 0, \quad 0 \leq \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\zeta) \int_{\frac{1}{e}}^e x^{\ln x} dx \leq e^2 - 1 \quad \eta) \int_{\alpha}^{\beta} x^x dx > \int_{\alpha}^{\beta} e^{x-1} dx, \quad \alpha < \beta$$

$$\theta) \int_0^2 (2e^x - 2) dx > \int_0^2 (x^2 + 2x) dx$$

15. Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση με  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ , η οποία είναι κυρτή. Να αποδείξετε ότι  $\int_0^1 f(x) dx > \frac{1}{2}$ .

16. Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση με  $f(1) = 0$ ,  $f'(1) = 2$ , η οποία είναι κοίλη. Να αποδείξετε ότι  $\int_1^2 f(x) dx < 1$ .

17. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln \frac{1+e^x}{2}$ . Να δείξετε ότι:

α) Η  $f$  είναι κυρτή

β)  $4 \int_0^1 f(x) dx > 1$

18. Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση με  $f(0) = 0$ , η οποία είναι κυρτή. Να δείξετε ότι:

α)  $f(x) \leq xf'(x)$  για κάθε  $x \geq 0$

β)  $\int_0^1 f(x) dx < \frac{f(1)}{2}$

19. Έστω μια συνάρτηση με  $f(0) = 1$ , η οποία είναι κοίλη. Να δείξετε ότι:

α)  $f(x) \geq xf'(x) + 1$  για κάθε  $x \geq 0$

β)  $\int_0^1 f(x) dx > \frac{1+f(1)}{2}$

20. Έστω η κυρτή συνάρτηση  $f: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$  με συνεχή παράγωγο τέτοια, ώστε  $f(x) \leq x$  για κάθε  $x \in [0, 1]$ . Να αποδείξετε ότι  $\int_0^1 \frac{f'(x)}{x+1} dx \leq \ln 2$ .

21. Έστω η κυρτή συνάρτηση  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι  $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx \leq f(-1) + f'(1)$ .