

Επισημάνσεις στην εύρεση εφαπτομένων μιας καμπύλης

I. Εξίσωση εφαπτομένης σε ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ (Δίνεται σημείο επαφής)

- Βρίσκουμε την παράγωγο της $f : f'(x)$
- Συντελεστής διεύθυνσης: $\lambda = f'(x_0)$
- Εξίσωση εφαπτομένης: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

II. Εξίσωση εφαπτομένης όταν δίνεται ο συντελεστής διεύθυνσης αυτής, δηλαδή το λ . (Δεν δίνεται το σημείο επαφής $A(x_0, f(x_0))$)

- Βρίσκουμε την παράγωγο της $f : f'(x)$
- Από το συντελεστή διεύθυνσης, βρίσκουμε το σημείο επαφής λύνοντας την εξίσωση $f'(x_0) = \lambda$ ως προς x_0 .
 $f'(x_0) = \lambda \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_0 = \dots$
Βρίσκουμε και το $f(x_0)$.
- Εξίσωση εφαπτομένης: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Παρατήρηση:

Μπορεί ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης να δίνεται με έμμεσο τρόπο.

- Δίνεται η κλίση της εφαπτομένης της $C_f \rightarrow \lambda = \text{κλίση}$.
- Η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x \rightarrow \lambda = 0$.
- Η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon : y = \alpha x + \beta \rightarrow \lambda = \alpha$.
- Η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon : y = \alpha x + \beta \rightarrow \lambda = -\frac{1}{\alpha}$.
- Η εφαπτομένη σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega \rightarrow \lambda = \tan \omega$.

III. Εξίσωση εφαπτομένης η οποία διέρχεται από σημείο $B(x_1, y_1)$ **(Δεν δίνεται το σημείο επαφής $A(x_0, f(x_0))$)**

- Βρίσκουμε την παράγωγο της $f : f'(x)$
- Γράφουμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (1) \quad (\text{Στην εξίσωση (1) το } x_0 \text{ είναι άγνωστο})$$
- Επειδή το $B(x_1, y_1)$ είναι σημείο αυτής της εφαπτομένης, άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την (1).
Θέτουμε λοιπόν στην (1) $x = x_1$ και $y = y_1$.
Προκύπτει εξίσωση με άγνωστο το x_0 , την οποία λύνουμε ως προς x_0 .

$$y_1 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x_0 = \dots$$
Βρίσκουμε και το $f(x_0)$.
- Εξίσωση εφαπτομένης: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

IV. Δίνεται παραμετρική συνάρτηση. Μας δίνεται ο συντελεστής διεύθυνσης λ και το σημείο επαφής $A(x_0, y_0)$. Ζητούνται οι παράμετροι α, β .

- Βρίσκουμε την παράγωγο της $f : f'(x)$
- $f'(x_0) = \lambda$: Εξίσωση με αγνώστους τις παραμέτρους α, β .
- $f(x_0) = y_0$: Εξίσωση με αγνώστους τις παραμέτρους α, β .
- Λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων για να βρούμε τα α, β .

V. Η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

- Βρίσκουμε την παράγωγο της $f : f'(x)$
- $f'(x_0) = \alpha$ (Δίνεται η εξίσωση της εφαπτομένης, άρα η κλίση της είναι το α)
- $f(x_0) = \alpha x_0 + \beta$ (Το σημείο επαφής $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο της εφαπτομένης, άρα επαληθεύει την εξίσωσή της $y = \alpha x + \beta$)

VI. Κοινή εφαπτομένη δύο γραφικών παραστάσεων C_f και C_g σε ένα κοινό τους σημείο $A(x_0, \dots)$.

- Βρίσκουμε τις παραγώγους των $f, g : f'(x)$ και $g'(x)$
- $f(x_0) = g(x_0)$
- $f'(x_0) = g'(x_0)$

VII. Κοινή εφαπτομένη δύο γραφικών παραστάσεων C_f και C_g , όχι σε κοινό τους σημείο

- Βρίσκουμε τις παραγώγους των $f, g : f'(x)$ και $g'(x)$
- Γράφουμε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f σε ένα σημείο $A(x_1, f(x_1))$ και την φέρνουμε στη μορφή $y = \alpha x + \beta$ (x_1 : άγνωστο)
 $\varepsilon_1 : y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow y = f'(x_1)x - f'(x_1)x_1 + f(x_1)$
- Γράφουμε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g σε ένα σημείο $B(x_2, g(x_2))$ και την φέρνουμε στη μορφή $y = \alpha x + \beta$ (x_2 : άγνωστο)
 $\varepsilon_2 : y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow y = g'(x_2)x - g'(x_2)x_2 + g(x_2)$
- Για να είναι οι ε_1 και ε_2 η ίδια ευθεία πρέπει:
$$\begin{cases} f'(x_1) = g'(x_2) \\ \text{και} \\ -f'(x_1)x_1 + f(x_1) = -g'(x_2)x_2 + g(x_2) \end{cases}$$
- Λύνω το παραπάνω σύστημα με αγνώστους τα x_1, x_2
- Εξίσωση κοινής εφαπτομένης των C_f και C_g :

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \quad \text{ή} \quad y - g(x_2) = g'(x_2)(x - x_2)$$