

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΤΡΟΠΟΙ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗΣ

ΟΡΙΑ

1. Απλά όρια

- Όρια στο x_0 (Απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$)

α) Παραγοντοποιούμε αριθμητή και παρονομαστή και διαγράφουμε τους κοινούς παράγοντες.
 β) Αν υπάρχουν ρίζες, πολ/με αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή του παρονομαστή.

- Όρια στο ∞

α) Όριο πολυωνυμικής: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\alpha_v x^v)$ (Βρίσκουμε το όριο του μεγιστοβάθμιου)

β) Όριο ρητής: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_k x^k + \beta_{k-1} x^{k-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\alpha_v x^v}{\beta_k x^k} \right)$ (Βρίσκουμε το όριο των μεγιστοβάθμιων)

γ) Όριο άρρητης: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{P(x)} + Q(x))$ (Βγάζουμε κοινό παράγοντα τη μεγαλύτερη δύναμη του x .
 Αν προκύψει απροσδιοριστία $\infty - \infty$, τότε πολ/με αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή)

2. Όρια και απόλυτα

Βρίσκουμε το όριο της παράστασης μέσα σε κάθε απόλυτο.

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , οπότε $|f(x)| = f(x)$ κοντά στο x_0 .
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , οπότε $|f(x)| = -f(x)$ κοντά στο x_0 .

(Το x_0 μπορεί να είναι αριθμός, $+\infty$ ή $-\infty$)

3. Όρια και ανισότητες

- Όρια και Κριτήριο Παρεμβολής

Αν $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$

Χρήσιμες ιδιότητες

$$|\eta\mu x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \eta\mu x \leq 1, \quad |\sigma\upsilon\nu x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1, \quad |\eta\mu x| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq \eta\mu x \leq |x|$$

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (Από $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ και Κριτήριο Παρεμβολής)

Άπειρα όρια και ανισότητες

Αν $g(x) \leq f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

Αν $f(x) \leq g(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

4. Όρια και αλλαγή μεταβλητής

Όταν θέλω να βρω το όριο μιας σύνθεσης π.χ. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$.

Θέτω: $u = g(x)$	Χαρακτηριστικά όρια με αλλαγή μεταβλητής
Βρίσκω το $\lim_{x \rightarrow x_0} u = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\alpha x)}{\alpha x} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha x) - 1}{\alpha x} = 0$
Οπότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$

5. Κάποια χαρακτηριστικά όρια

• Τριγωνομετρικά

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\alpha x)}{\alpha x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha x) - 1}{\alpha x} = 0$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 1$, με αλλαγή μεταβλητής $(\text{Θέτω } u = \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x \eta\mu \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1)$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x^v \eta\mu \frac{1}{x} \right) = \pm\infty$, διότι $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x^v \eta\mu \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x^{v-1} \cdot x \eta\mu \frac{1}{x} \right) = \pm\infty \cdot 1 = \pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^v \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$, με Κ.Π, διότι $-x^v \leq x^v \eta\mu \frac{1}{x} \leq x^v$ και $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^v) = \lim_{x \rightarrow 0} x^v = 0$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$, με κριτήριο παρεμβολής, διότι $-\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\eta\mu x}{x^v} = 0$, κριτήριο παρεμβολής, διότι $-\frac{1}{x^v} \leq \frac{\eta\mu x}{x^v} \leq \frac{1}{x^v}$ και $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{x^v} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^v} = 0$

• Εκθετικά όρια χωρίς Κανόνα de l' Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ διότι: αν } f(x) = e^x, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1, \text{ αφού } f'(x) = e^x$$

• Λογαριθμικό όριο χωρίς Κανόνα de l' Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x - 1} = 1 \text{ διότι: αν } f(x) = \ln x, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 1, \text{ αφού } f'(x) = \frac{1}{x}$$

6. Δίνεται το όριο συνάρτησης που ο τύπος της περιέχει την $f(x)$ και ζητείται το όριο της $f(x)$

- ✓ Θέτουμε $g(x)$ τη συνάρτηση της οποίας το όριο δίνεται. Δηλαδή θέτω $g(x) = \dots f(x) \dots$ (1)
- ✓ Λύνουμε τη σχέση (1) ως προς $f(x)$ και βρίσκουμε το όριο της $f(x)$.

7. Όρια και συναρτησιακές σχέσεις

α) Δίνεται το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και f περιττή ή άρτια και ζητείται ένα όριο $x \rightarrow -x_0$

Με αλλαγή μεταβλητής:

Θέτω $u = -x$ και λύνω ως προς x .

$$\lim_{x \rightarrow -x_0} u = \lim_{x \rightarrow -x_0} (-x) = x_0 \quad (\text{όταν } x \rightarrow -x_0, u \rightarrow x_0)$$

$\lim_{x \rightarrow -x_0} (\dots) = \lim_{u \rightarrow x_0} (\dots) = \dots$ για τον υπολογισμό αυτού του ορίου χρησιμοποιούμε το όριο που δίνεται

$(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))$ και την ιδιότητα των άρτιων συναρτήσεων ή των περιττών.

β) Δίνεται ένα όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και μια συναρτησιακή σχέση της μορφής $f(x+y) = \dots$. Ζητείται

ένα όριο $x \rightarrow x_1$.

Με αλλαγή μεταβλητής:

Θέτω $u = x - x_1 + x_0$ και λύνω ως προς x .

$$\lim_{x \rightarrow x_1} u = \lim_{x \rightarrow x_1} (x - x_1 + x_0) = x_0 \quad (\text{όταν } x \rightarrow x_1, u \rightarrow x_0)$$

$\lim_{x \rightarrow x_1} (\dots) = \lim_{u \rightarrow x_0} (\dots) = \dots$ για τον υπολογισμό αυτού του ορίου χρησιμοποιούμε το όριο που δίνεται

$(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))$ και την συναρτησιακή σχέση που δίνεται

γ) Δίνεται ένα όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και μια συναρτησιακή σχέση της μορφής $f(xy) = \dots$. Ζητείται ένα

όριο $x \rightarrow x_1$.

Με αλλαγή μεταβλητής:

Θέτω $u = \frac{x \cdot x_0}{x_1}$ και λύνω ως προς x .

$$\lim_{x \rightarrow x_1} u = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{x \cdot x_0}{x_1} = x_0 \quad (\text{όταν } x \rightarrow x_1, u \rightarrow x_0)$$

$\lim_{x \rightarrow x_1} (\dots) = \lim_{u \rightarrow x_0} (\dots) = \dots$ για τον υπολογισμό αυτού του ορίου χρησιμοποιούμε το όριο που δίνεται

$(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))$ και την συναρτησιακή σχέση που δίνεται

ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

- **Εύρεση της $f \circ g$, όταν δίνονται οι f, g .**

- ✓ Βρίσκουμε τα πεδία ορισμού των f, g

- ✓ Πεδίο ορισμού της $f \circ g$

$$\left. \begin{array}{l} x \in D_g \Leftrightarrow \dots\dots\dots \\ g(x) \in D_f \Leftrightarrow \dots\dots\dots \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \dots\dots\dots$$

- ✓ Τύπος της $f \circ g: (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \dots\dots$ (στον τύπο της f βάζουμε όπου x το $g(x)$)

- **Δίνεται η $f \circ g$ και η f . Ζητείται η g**

- ✓ Βρίσκουμε τα πεδία ορισμού των $f \circ g$ και f .

- ✓ Πρέπει: $x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$

- ✓ $(f \circ g)(x) = \dots\dots\dots$ Ξεκινάμε από τον τύπο της $f \circ g$

$f(g(x)) = \dots\dots\dots$ Στο 1^ο μέλος γράφουμε τον τύπο της f αντικαθιστώντας το x με $g(x)$

$\vdots$ Προκύπτει εξίσωση με άγνωστο το $g(x)$. Λύνουμε ως προς $g(x)$

$g(x) = \dots\dots\dots$

- **Δίνεται η $f \circ g$ και η g . Ζητείται η f .**

- ✓ Βρίσκουμε τα πεδία ορισμού των $f \circ g$ και g .

- ✓ $g(x) = \omega \Leftrightarrow \dots\dots \Leftrightarrow \boxed{x = \dots\dots} \quad (1)$ Θέτω $g(x) = \omega$ και λύνουμε ως προς x

- ✓ Απαιτούμε $x \in D_{f \circ g}$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση (1) βάζουμε περιορισμούς για το ω .

- ✓ $f(g(x)) = \dots\dots\dots$ Ξεκινάμε από τον τύπο της $f \circ g$ που δίνεται.

$\vdots$ Στο 1^ο μέλος αντικαθιστούμε την $g(x)$ με ω .

Στο 2^ο μέλος αντικαθιστούμε το x από τη σχέση (1).

- ✓ $f(\omega) = \dots\dots\dots$ Καταλήγουμε σε μια συνάρτηση με μεταβλητή ω .

- ✓ $f(x) = \dots\dots\dots$ Αλλάζουμε τη μεταβλητή από ω σε x .

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ 1 – 1

- Για συναρτήσεις που είτε δίνεται ο τύπος (τύπος χωρίς κλάδους), είτε όχι.

1. Με μονοτονία (προτείνεται όταν μπορούμε να βρούμε το πρόσημο της $f'(x)$)

2. Με τον ορισμό. Ξεκινάω από $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \dots \Rightarrow x_1 = x_2$
και κάνοντας πράξεις

- Για συναρτήσεις με κλάδους

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \neq x_0 \\ c, & x = x_0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq x_0 \\ f_2(x), & x > x_0 \end{cases}$$

α) Αν $f'(x) > 0$ (ή $f'(x) < 0$) για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ } $\Rightarrow f$ γν. αύξουσα (γν. φθίνουσα), 1 – 1
 f συνεχής στο x_0 (στο α και στο β)

β) Αν $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα (α, x_0) και (x_0, β) , δηλαδή αν f είναι γν. μονότονη στο (α, x_0) και f γν. μονότονη στο (x_0, β) (όχι απαραίτητα το ίδιο είδος μονοτονίας), αλλά η f δεν είναι συνεχής στο x_0 ή η f δεν ορίζεται στο x_0 τότε:

✓ Για $\Delta_1 = (\alpha, x_0)$ βρίσκουμε το $f(\Delta_1)$

✓ Για $\Delta_2 = (x_0, \beta)$ βρίσκουμε το $f(\Delta_2)$

✓ Αν $f(\Delta_1) \cap f(\Delta_2) \cap f(x_0) = \emptyset$ (δηλαδή τα σύνολα τιμών $f(\Delta_1)$, $f(\Delta_2)$, $f(x_0)$ δεν έχουν κοινά σημεία), τότε η f είναι 1 – 1.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- Για συνάρτηση με τύπο χωρίς κλάδους.

- ✓ Βρίσκω το πεδίο ορισμού της f (D_f)
- ✓ Αποδεικνύω ότι η f είναι 1-1.
- ✓ Βρίσκω το πεδίο ορισμού της f^{-1} , βρίσκοντας το σύνολο τιμών της f .
- ✓ Θέτω $y = f(x) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = \dots \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \dots$
Λύνω ως προς x
- ✓ Άρα $f^{-1}(x) = \dots, x \in D_{f^{-1}} = f(A)$

- Για συνάρτηση με τύπο που έχει κλάδους.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \neq x_0 \\ c, & x = x_0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leq x_0 \\ f_2(x), & x > x_0 \end{cases}$$

- ✓ Βρίσκω το πεδίο ορισμού της f (D_f).
- ✓ Μελετώ την f ως προς τη **συνέχεια**.
- ✓ Αποδεικνύω ότι η f είναι 1-1.
- ✓ Βρίσκω το πεδίο ορισμού της f^{-1} , βρίσκοντας το σύνολο τιμών της f . Συγκεκριμένα:

$$\Delta_1 = (\alpha, x_0) \Rightarrow f(\Delta_1) = \dots$$

$$\Delta_2 = (x_0, \beta) \Rightarrow f(\Delta_2) = \dots$$

- ✓ Βρίσκω τον τύπο της f^{-1} .

- Για $x \in \Delta_1 = (\alpha, x_0)$ θέτω $y = f(x) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = \dots \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \dots, y \in f(\Delta_1)$
Λύνω ως προς x

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = \dots, x \in f(\Delta_1)$$

- Για $x \in \Delta_2 = (x_0, \beta)$ θέτω $y = f(x) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = \dots \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \dots, y \in f(\Delta_2)$
Λύνω ως προς x

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = \dots, x \in f(\Delta_2)$$

- ✓ Τελικά $f^{-1}(x) = \begin{cases} \dots, & x \in f(\Delta_1) \\ \dots, & x \in f(\Delta_2) \end{cases}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

1. Απόδειξη συνέχειας συνάρτησης με κλάδους

$\text{Av } f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{αν } x \neq x_0 \\ c, & \text{αν } x = x_0 \end{cases}$ ✓ Εξετάζουμε τη συνέχεια στα διαστήματα $(-\infty, x_0)$ και $(x_0, +\infty)$ ✓ Εξετάζουμε τη συνέχεια στο x_0. Πρέπει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$	$\text{Av } f(x) = \begin{cases} g_1(x), & \text{αν } x < x_0 \\ g_2(x), & \text{αν } x \geq x_0 \end{cases}$ ✓ Εξετάζουμε τη συνέχεια στα διαστήματα $(-\infty, x_0)$ και $(x_0, +\infty)$ ✓ Εξετάζουμε τη συνέχεια στο x_0. Πρέπει $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$
---	--

2. Απόδειξη παραγωγισιμότητας συνάρτησης με κλάδους

$\text{Av } f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{αν } x \neq x_0 \\ c, & \text{αν } x = x_0 \end{cases}$ ✓ Εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα στα διαστήματα $(-\infty, x_0)$ και $(x_0, +\infty)$ ✓ Εξετάζουμε τη συνέχεια στο x_0. Πρέπει $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$	$\text{Av } f(x) = \begin{cases} g_1(x), & \text{αν } x < x_0 \\ g_2(x), & \text{αν } x \geq x_0 \end{cases}$ ✓ Εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα στα διαστήματα $(-\infty, x_0)$ και $(x_0, +\infty)$ ✓ Εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα στο x_0. Πρέπει: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$
---	--

3. Απόδειξη συνέχειας μιας συνάρτησης όταν δίνεται μια συναρτησιακή σχέση που ικανοποιεί και η συνέχειά της σε ένα σημείο συγκεκριμένο σημείο α.

- ✓ Ορισμός της συνέχειας στο α : $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$ (1)
- ✓ Έστω x_0 τυχαίο. Θα βρούμε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ με αλλαγή μεταβλητής.
- Αν η συναρτησιακή σχέση που δίνεται είναι της μορφής $f(x + y) = \dots\dots\dots$
Θέτω $u = x - x_0 + \alpha$
 - Αν η συναρτησιακή σχέση που δίνεται είναι της μορφής $f(x \cdot y) = \dots\dots\dots$
Θέτω $u = \frac{x \cdot \alpha}{x_0}$

4. Απόδειξη παραγωγισιμότητας μιας συνάρτησης όταν δίνεται μια συναρτησιακή σχέση που ικανοποιεί και η παραγωγισιμότητά της σε ένα σημείο συγκεκριμένο σημείο α .

- Αν η συναρτησιακή σχέση που δίνεται είναι της μορφής $f(x+y) = \dots\dots\dots$

✓ Ορισμός για $f'(\alpha) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h}$ (1)

✓ Έστω x_0 τυχαίο. Θα βρούμε το όριο $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ κάνοντας χρήση της σχέσης που δίνεται για το $f(x_0+h)$ και του ορίου που δίνει το $f'(\alpha)$ από την (1).

- Αν η συναρτησιακή σχέση που δίνεται είναι της μορφής $f(x \cdot y) = \dots\dots\dots$

✓ Ορισμός για $f'(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ (1)

✓ Έστω x_0 τυχαίο. Θα βρούμε το όριο $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

✓ Για τον υπολογισμό του παραπάνω ορίου κάνω πρώτα αλλαγή μεταβλητής

Θέτω $u = \frac{x \cdot \alpha}{x_0}$ και λύνω ως προς x .

$\lim_{x \rightarrow x_0} u = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x \cdot \alpha}{x_0} = \alpha$ (όταν $x \rightarrow x_0$, $u \rightarrow \alpha$)

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{u \rightarrow \alpha} \frac{f\left(\frac{ux_0}{\alpha}\right) - f(x_0)}{\frac{ux_0}{\alpha} - x_0} \dots\dots$ Υπολογίζουμε το όριο αυτό κάνοντας χρήση της

σχέσης που δίνεται και του ορίου που δίνει το $f'(\alpha)$ από την (1).

ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ

A. Ύπαρξη 1 τουλάχιστον ρίζας (2 τουλάχιστον ριζών, 3 τουλάχιστον ριζών,.....)

1. Με Θ.Bolzano

- **Ρίζα συνάρτησης f:** Θ.Bolzano στην f
- **Ρίζα εξίσωσης (ύπαρξη x_0 , ξ: να ισχύει ισότητα):**
 - ✓ Μεταφέρουμε όλους τους όρους της εξίσωσης στο 1^ο μέλος.
 - ✓ Θέτουμε $f(x) = 1^{\circ}$ μέλος
 - ✓ Αποδεικνύουμε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.B για την f σε κατάλληλο διάστημα.

Ιδιαιτερότητες στο Θ.Bolzano

α) Ύπαρξη ρίζας σε κλειστό διάστημα $[α, β]$

Αν προκύψει $f(α) \cdot f(β) \leq 0$ (και όχι $f(α) \cdot f(β) < 0$), τότε έχουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $f(α) \cdot f(β) < 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in (α, β)$
- Αν $f(α) \cdot f(β) = 0$, τότε οι ρίζες είναι το α ή το β.

Άρα τελικά υπάρχει $x_0 \in [α, β]$

β) Ύπαρξη ρίζας χωρίς να δίνεται διάστημα (Πρέπει να επιλέξουμε εμείς κατάλληλο διάστημα)

γ) Ύπαρξη 2 τουλάχιστον ριζών σε ένα διάστημα (Πρέπει να χωρίσουμε το διάστημα που δίνεται σε δύο υποδιαστήματα)

2. Με Θ.Rolle

- **Ρίζα συνάρτησης f:** Εφαρμόζουμε το Θ.R. στην παράγουσα F της f ($F'(x) = f(x)$)
- **Ρίζα εξίσωσης (ύπαρξη x_0 , ξ: να ισχύει ισότητα που μπορεί να περιέχει και $f(\xi)$ $f'(\xi)$):**
 - α) Όλα στο 1^ο μέλος
 - β) Μετασχηματίζουμε το 1^ο μέλος ώστε να μπορώ να καταλάβω την παράγουσά του.
 - γ) Θέτω $f(x) = 1^{\circ}$ μέλος και εφαρμόζω Θ.R. στην παράγουσα της f.

3. Με σύνολο τιμών

- **Ρίζα συνάρτησης f:** Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f και εξετάζουμε αν το 0 βρίσκεται στο σύνολο τιμών. Αν ναι, τότε υπάρχει ρίζα της f.
- **Ρίζα εξίσωσης:**
 - ✓ Μεταφέρουμε όλους τους όρους της εξίσωσης στο 1^ο μέλος.
 - ✓ Θέτουμε $f(x) = 1^{\circ}$ μέλος
 - ✓ Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f και εξετάζουμε αν το 0 βρίσκεται σ' αυτό ($0 \in f(A)$).

Για την ύπαρξη δύο ή περισσότερων ριζών πρέπει να αποδείξουμε ότι το 0 βρίσκεται σε κάθε υποδιάστημα του συνόλου τιμών ($0 \in f(\Delta_1)$, $0 \in f(\Delta_2)$,...)

4. Προφανής ρίζα (με δοκιμές)

Β. Ύπαρξη το πολύ 1 ρίζας (το πολύ 2 ριζών, το πολύ 3 ριζών,.....)

1. Με 1 – 1 ή μονοτονία.

2. Με Θ.Rolle και άτοπο: Υποθέτουμε ότι η f έχει 2 ρίζες, τις ρ_1 και ρ_2 .

Τότε $\left. \begin{array}{l} f(\rho_1)=0 \\ f(\rho_2)=0 \end{array} \right\}$ από Θ.R. υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta): f'(x_0)=0$ από το οποίο θα προκύπτει άτοπο.

Ύπαρξη δύο το πολύ ριζών συνάρτησης f

Υποθέτουμε ότι η f έχει 3 ρίζες, τις ρ_1, ρ_2 και ρ_3 . Τότε:

$\left. \begin{array}{l} f(\rho_1)=0 \\ f(\rho_2)=0 \\ f(\rho_3)=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{από Θ.R. υπάρχει } \xi_1 \in (\rho_1, \rho_2): f'(\xi_1)=0 \\ \text{από Θ.R. υπάρχει } \xi_2 \in (\rho_2, \rho_3): f'(\xi_2)=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{από Θ.R. υπάρχει } \xi \in (\xi_1, \xi_2): \\ f''(\xi)=0 \end{array}$

Από το οποίο καταλήγουμε σε άτοπο

Γ. Ύπαρξη ακριβώς 1 ρίζας (ακριβώς 2 ριζών, ακριβώς 3 ριζών,.....)

- ✓ Πρώτα αποδεικνύουμε την ύπαρξη τουλάχιστον 1 ρίζας (με τους παραπάνω τρόπους).
- ✓ Στη συνέχεια αποδεικνύουμε τη μοναδικότητα με 1 – 1 ή μονοτονία ή Θ. Rolle και άτοπο.

ΠΛΗΘΟΣ ΡΙΖΩΝ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

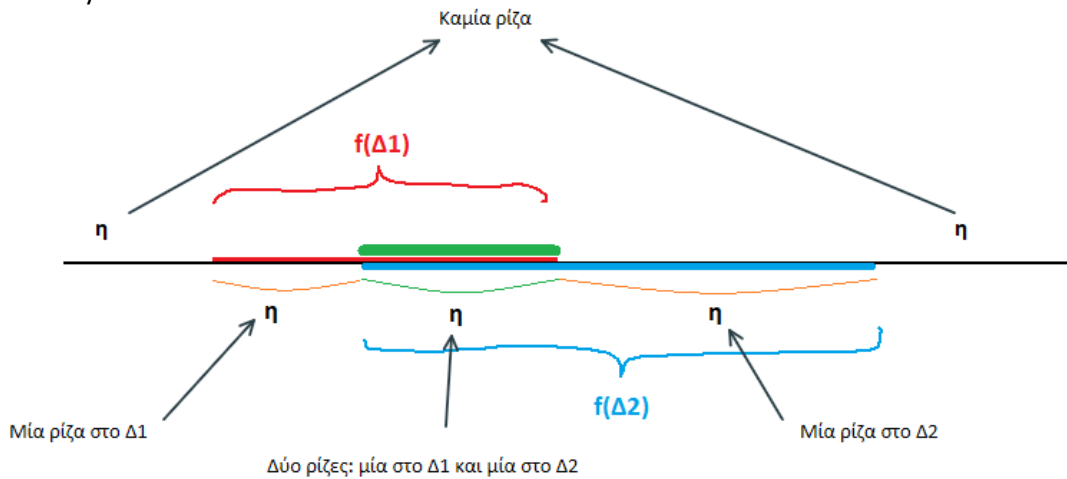
1. Πλήθος ριζών εξίσωσης της μορφής $f(x) = 0$

- ✓ Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f . Συγκεκριμένα τα σύνολα τιμών σε κάθε υποδιάστημα $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ του πεδίου ορισμού της f : $f(\Delta_1), f(\Delta_2), \dots$
- ✓ Στη συνέχεια εξετάζουμε αν το 0 βρίσκεται σε καθένα από αυτά τα σύνολα τιμών $0 \in f(\Delta_1), 0 \in f(\Delta_2), \dots$

2. Πλήθος ριζών εξίσωσης της μορφής $f(x) = \eta$

- **Αν το η δίνεται (είναι συγκεκριμένος αριθμός)**
 - ✓ Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f . Συγκεκριμένα τα σύνολα τιμών σε κάθε υποδιάστημα $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ του πεδίου ορισμού της f : $f(\Delta_1), f(\Delta_2), \dots$
 - ✓ Στη συνέχεια εξετάζουμε αν το η βρίσκεται σε καθένα από αυτά τα σύνολα τιμών $\eta \in f(\Delta_1), \eta \in f(\Delta_2), \dots$
- **Αν το η δεν δίνεται (παράμετρος)**
 - ✓ Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f . Συγκεκριμένα τα σύνολα τιμών σε κάθε υποδιάστημα $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ του πεδίου ορισμού της f : $f(\Delta_1), f(\Delta_2), \dots$
 - ✓ Διακρίνουμε περιπτώσεις για το η (παράδειγμα στην επόμενη σελίδα)

Π.χ.: Το σύνολο τιμών αποτελείται από δύο υποδιαστήματα $f(\Delta_1), f(\Delta_2)$ τα οποία έχουν κοινά γ .



ΠΡΟΣΗΜΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

- ✓ Εξετάζουμε την f ως προς τη συνέχεια.
- ✓ Βρίσκουμε τις ρίζες της f
 1. **Αν η f δεν έχει ρίζες**
 - ✓ Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$ και f συνεχής στο $A \Rightarrow$ η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο A .
 - ✓ Βρίσκουμε το πρόσημο της f στο A από μια τιμή $f(x_0)$ με $x_0 \in A$ που δίνεται στις υποθέσεις.
 2. **Αν όλες οι ρίζες της f είναι οι αριθμοί $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$ (εύρεση ριζών αλγεβρικά)**
 - ✓ Επιλέγουμε κατάλληλες τιμές $x_1, x_2, \dots$ στα διαστήματα $(\rho_1, \rho_2), (\rho_2, \rho_3), \dots$ και βρίσκουμε τις αντίστοιχες τιμές της f .
 - ✓ Το πρόσημο των $f(x_1), f(x_2), \dots$ μας δίνει και το πρόσημο της f στα αντίστοιχα διαστήματα $(\rho_1, \rho_2), (\rho_2, \rho_3), \dots$
 3. **Αν δεν μπορούμε να βρούμε όλες τις ρίζες της f (αλγεβρικά), αλλά μόνο μία με δοκιμή (προφανής ρίζα).**
 - ✓ Βρίσκουμε μια προφανή ρίζα x_0 (με δοκιμές)
 - ✓ Μελετάμε την f ως προς μονοτονία – ακρότατα – σύνολο τιμών.

ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

- ✓ Όλα στο 1^ο μέλος.
- ✓ Θέτουμε $f(x) = 1$ ο μέλος
- ✓ Βρίσκουμε μια προφανή ρίζα της f , έστω x_0 (με δοκιμές)
- ✓ Μελετάμε την f ως προς μονοτονία – ακρότατα – σύνολο τιμών.

Σε εξίσωση μπορούμε να εφαρμόσουμε ή να βγάλουμε και από τα δύο μέλη συνάρτηση f αν είναι 1 - 1 και να προκύπτει ισοδύναμη εξίσωση: $A = B \overset{f1-1}{\Leftrightarrow} f(A) = f(B)$ ή $f(A) = f(B) \overset{f1-1}{\Leftrightarrow} A = B$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΗΣ

- ✓ Όλα στο 1^ο μέλος.
- ✓ Θέτουμε $f(x) = 1$ ο μέλος
- ✓ Βρίσκουμε το πρόσημο της f
- ✓ Επιλέγουμε τα διαστήματα του x στα οποία το πρόσημο της f συμφωνεί με την ανίσωση που θέλουμε να λύσουμε.

Σε ανίσωση μπορούμε να εφαρμόσουμε ή να βγάλουμε και από τα δύο μέλη συνάρτηση f αν είναι γν. αύξουσα (ή γν. φθίνουσα) και να προκύπτει ισοδύναμη ανίσωση της ίδιας φοράς (ή αντίθετης φοράς):

• $A < B \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(A) < f(B)$ ή $f(A) < f(B) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} A < B$ • $A < B \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(A) > f(B)$ ή $f(A) < f(B) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} A > B$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

1. Με πρόσημο συνάρτησης

- ✓ Όλα στο 1^ο μέλος.
- ✓ Θέτουμε $f(x) = 1$ ο μέλος, οπότε η προς απόδειξη ανισότητα μετασχηματίζεται στην $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$ ή $f(x) \geq 0$ ή $f(x) \leq 0$
- ✓ Βρίσκουμε το πρόσημο της f , το οποίο πρέπει να συμφωνεί με την ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε.

2. Με Θ.Μ.Τ

α) Απόδειξη διπλής ανισότητας (π.χ. $2 - \frac{e}{\pi} < \ln \pi < \frac{\pi}{e}$)

- ✓ Επιλέγουμε κατάλληλη συνάρτηση f και κατάλληλο διάστημα $[a, b]$.
- ✓ Βρίσκουμε την $f'(x)$ (1)
- ✓ Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα $[a, b]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (2)$$
- ✓ Βάζουμε το ξ μεταξύ των άκρων του διαστήματος και στο μεσαίο μέλος κατασκευάζουμε το $f'(\xi)$ σύμφωνα με την (1), οπότε και το αντικαθιστούμε από την (2). Δηλαδή:
 $a < \xi < b \xrightarrow{\text{στο μεσαίο μέλος κατασκευάζουμε το } f'(\xi) \text{ από (1)}} \dots < f'(\xi) < \dots \text{ αντικαθιστούμε το } f'(\xi) \text{ από την (2)}$

β) Δίνεται ανισότητα για την f' και ζητείται η απόδειξη ανισότητας για κάποιες τιμές της f .

- ✓ Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f σε κατάλληλο διάστημα $[a, b]$ οπότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (1).$$
- ✓ Αντικαθιστούμε το $f'(\xi)$ στην ανισότητα που δίνεται από την (1) και κάνουμε πράξεις.

Υπάρχει περίπτωση να χρειαστεί να χωρίσουμε το διάστημα $[a, b]$ σε δύο υποδιαστήματα και να εφαρμόσουμε Θ.Μ.Τ. σε καθένα από αυτά. Όταν για παράδειγμα εμφανίζεται η τιμή $f(c)$ με $c \in (a, b)$, τότε εφαρμόζω Θ.Μ.Τ. στα $[a, c]$ και $[c, b]$.

γ) Δίνεται η μονοτονία της f' . Ζητείται η απόδειξη ανισότητας που περιέχει τις $f, f', \dots$

- ✓ Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την f σε κατάλληλο διάστημα $[a, b]$.
- ✓ Βάζουμε το ξ μεταξύ των άκρων του διαστήματος και κολλάμε σε όλα τα μέλη την f' της οποίας τη μονοτονία γνωρίζουμε. Δηλαδή:
 $a < \xi < b \xrightarrow{f' \uparrow} f'(a) < f'(\xi) < f'(b) \text{ ή } a < \xi < b \xrightarrow{f' \downarrow} f'(a) > f'(\xi) > f'(b)$

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις απόδειξης ανισότητας με χρήση Θ.Μ.Τ., αν η ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε περιέχει x , εφαρμόζουμε **Θ.Μ.Τ σε διάστημα του οποίου τα άκρα περιέχουν το x .**

3. Με χρήση γνωστών ανισοτήτων

- $|\eta\mu x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \eta\mu x \leq 1$
- $|\sigma\upsilon\nu x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$
- $|\eta\mu x| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq \eta\mu x \leq |x|$, το "=" ισχύει για $x=0$
- $e^x \geq x+1$, το "=" ισχύει για $x=0$.
Ταυτόχρονα ισχύουν και $e^x > x$, $e^x > x-1$, $e^x > x-2$, ...
- $\ln x \leq x-1$, το "=" ισχύει για $x=1$.
Ταυτόχρονα ισχύουν και $\ln x < x$, $\ln x < x+1$, $\ln x < x+2$, ...

4. Με κυρτότητα και εφαπτομένη

- ✓ Αποδεικνύουμε ότι η f είναι κυρτή ή κοίλη.
- ✓ Βρίσκουμε την εφαπτομένη της C_f σε κατάλληλο σημείο $A(x_0, f(x_0)) \rightarrow \varepsilon: y = \alpha x + \beta$
- ✓ Αν f είναι κυρτή, τότε $f(x) \geq \alpha x + \beta$, αν f είναι κοίλη, τότε $f(x) \leq \alpha x + \beta$.

ΔΙΝΕΤΑΙ ΑΝΙΣΟΪΣΟΤΗΤΑ

- ✓ Όλα στο 1^ο μέλος
- ✓ Θέτουμε $f(x) = 1$ ο μέλος, οπότε η ανισοϊσότητα που δίνεται παίρνει τη μορφή $f(x) \leq 0$ ή $f(x) \geq 0$
- ✓ Βρίσκουμε με δοκιμές ένα εσωτερικό σημείο x_0 για το οποίο $f(x_0) = 0$.
- ✓ Οπότε η ανισοϊσότητα που δίνεται παίρνει τη μορφή $f(x) \leq f(x_0)$ ή $f(x) \geq f(x_0)$ από την οποία συμπεραίνουμε ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 .
- ✓ Από Θ.Fermat ισχύει $f'(x_0) = 0$

ΕΥΡΕΣΗ ΤΥΠΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Από συναρτησιακές ιδιότητες ή ανισότητες

Δίνονται σχέσεις της μορφής : $2f(x) - f(-x) = e^x + e^{-x}$, $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$,

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad f\left(\frac{x}{e}\right) \leq \ln x \leq f(x) - 1$$

✓ Αντικαθιστούμε κατάλληλες τιμές στη θέση των μεταβλητών

2. Δίνεται το τετράγωνο της f , δηλαδή δίνεται ότι $f^2(x) = g(x)$ και ζητείται ο τύπος της f .

✓ Πεδίο ορισμού της f και συνέχεια.

✓ Ρίζες της f : Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow \dots$

α) Αν η f δεν έχει ρίζες στο πεδίο ορισμού της, τότε:

✓ $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$ και f συνεχής στο $A \Rightarrow$ η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο A

Είτε $f(x) > 0, x \in A \Rightarrow f(x) = \sqrt{g(x)}, x \in A$ είτε $f(x) < 0, x \in A \Rightarrow f(x) = -\sqrt{g(x)}, x \in A$

✓ Βρίσκουμε το πρόσημο της f στο A από μια τιμή $f(x_0)$ με $x_0 \in A$ που δίνεται στις υποθέσεις και επιλέγουμε από τους δύο τύπους το σωστό.

β) Αν $x_0 \in A$ είναι η μοναδική ρίζα της f στο πεδίο ορισμού της:

✓ Στο διάστημα (α, x_0) είναι $f(x) \neq 0$ και f συνεχής $\Rightarrow$ η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (α, x_0) . Βρίσκουμε το πρόσημο της f στο (α, x_0) από μια τιμή $f(x_1)$ με $x_1 \in A$ που δίνεται στις υποθέσεις. Οπότε:

Αν $f(x) > 0, x \in (\alpha, x_0)$ είναι $f(x) = \sqrt{g(x)}, x \in (\alpha, x_0)$

Αν $f(x) < 0, x \in (\alpha, x_0)$ είναι $f(x) = -\sqrt{g(x)}, x \in (\alpha, x_0)$

✓ Στο διάστημα (x_0, β) είναι $f(x) \neq 0$ και f συνεχής $\Rightarrow$ η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (x_0, β) . Βρίσκουμε το πρόσημο της f στο (x_0, β) από μια τιμή $f(x_2)$ με $x_2 \in (x_0, \beta)$ που δίνεται στις υποθέσεις. Οπότε:

Αν $f(x) > 0, x \in (x_0, \beta)$ είναι $f(x) = \sqrt{g(x)}, x \in (x_0, \beta)$

Αν $f(x) < 0, x \in (x_0, \beta)$ είναι $f(x) = -\sqrt{g(x)}, x \in (x_0, \beta)$

3. Εύρεση του τύπου μιας συνάρτησης f , η οποία βρίσκεται στον τύπο μιας σταθερής συνάρτησης g (δηλαδή $g(x) = \dots f(x) \dots$).

✓ Αποδεικνύουμε ότι $g'(x) = 0$.

✓ Άρα η g είναι σταθερή, δηλαδή $g(x) = c$ (1) (1^η συνέπεια του Θ.Μ.Τ.)

✓ Βρίσκουμε τη σταθερά c , θέτοντας στην (1) κατάλληλες τιμές του x

✓ Λύνουμε την (1) ως προς $f(x)$.

4. Δίνεται η παράγωγος της f , δηλαδή δίνεται ότι $f'(x) = g(x)$, και ζητείται ο τύπος της f .

- ✓ Βρίσκουμε την παράγουσα στο 2^ο μέλος, δηλαδή την παράγουσα της $g(x)$. Έστω $G(x)$ η παράγουσα της g .
- ✓ Τότε $f'(x) = g(x) \Leftrightarrow f'(x) = G'(x) \Leftrightarrow f(x) = G(x) + c$ (1), όπου c μια σταθερά (από θεώρημα).
- ✓ Βρίσκουμε τη σταθερά c αντικαθιστώντας στην (1) κατάλληλες τιμές του x οι οποίες δίνονται στην υπόθεση.

ΙΔΙΑΙΤΕΡΟΤΗΤΕΣ

1. Αν δεν δίνεται η $f'(x)$ αλλά η σύνθεση $f'(h(x)) = \dots\dots\dots$ (1), όπου $h(x)$ συγκεκριμένη συνάρτηση.

- Με αντικατάσταση :

✓ Θέτουμε $u = h(x) \Leftrightarrow \dots\dots\dots \Leftrightarrow x = \dots\dots\dots$ (2) λύνω ως προς x

- ✓ Αντικαθιστούμε στην (1) το $h(x)$ με u και στο 2^ο μέλος το x από την (2) και συνεχίζουμε όπως πάνω (μέθοδος 4).

- Αν η $u = h(x)$ δεν λύνεται ως προς x :

- ✓ Πολλαπλασιάζω και τα δύο μέλη της (1) με $h'(x)$ οπότε :

$$f'(h(x)) = \dots\dots\dots \Leftrightarrow f'(h(x)) \cdot h'(x) = \dots\dots\dots \Leftrightarrow [f(h(x))]' = \dots\dots\dots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [f(h(x))]' = G'(x) \Leftrightarrow f(h(x)) = G(x) + c \quad (2)$$

όπου $G(x)$ η παράγουσα στο 2^ο μέλος και c μια σταθερά.

Βρίσκουμε τη σταθερά c αντικαθιστώντας στην (2) κατάλληλες τιμές στο x .

2. Αν η σχέση $f'(x) = g(x)$ δεν ισχύει σε ένα διάστημα αλλά σε ένωση διαστημάτων.

Π.χ. $f'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$

$$\text{Τότε } f(x) = \begin{cases} G(x) + c_1, & x \in (a, x_0) \\ c_3, & x = x_0 \\ G(x) + c_2, & x \in (x_0, \beta) \end{cases} \quad \text{Για να βρούμε τις σταθερές } c_1, c_2 \text{ και } c_3 \text{ χρησιμοποιούμε}$$

τη συνέχεια της f στο $x_0 \left(\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \right)$ και κατάλληλες τιμές.

5. Εύρεση τύπου μιας συνάρτησης f όταν δίνεται μια σχέση που περιέχει τις $f, f', f'', \dots$

(Διαφορικές εξισώσεις)

- Αν η σχέση που δίνεται είναι της μορφής $f'(x) = f(x)$, τότε ο τύπος της f είναι : $f(x) = ce^x$, όπου c είναι μια σταθερά την οποία βρίσκουμε με κατάλληλη αντικατάσταση.
- Αν η σχέση που δίνεται είναι της μορφής $f'(x) = a \cdot f(x)$, $a \in \mathbb{R}$, τότε ο τύπος της f είναι : $f(x) = ce^{ax}$ όπου c είναι μια σταθερά την οποία βρίσκουμε με κατάλληλη αντικατάσταση.

- Αλλιώς, προσπαθώ να φέρω τη δοσμένη σχέση στη μορφή : $G'(x) = H'(x)$, οπότε προκύπτει :
 $G'(x) = H'(x) \Leftrightarrow G(x) = H(x) + c$.
 Βρίσκουμε τη σταθερά c με κατάλληλες αντικαταστάσεις και λύνουμε ως προς $f(x)$.

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!

Αν η σχέση που δίνεται ισχύει σε ένωση διαστημάτων και όχι σε ένα διάστημα (**Ιδιαιτερότητα 2**)

ΕΥΡΕΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ**1. Εύρεση παραμέτρων ώστε μια παραμετρική συνάρτηση f να είναι συνεχής.**

- Αν η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{αν } x \neq x_0 \\ c, & \text{αν } x = x_0 \end{cases}$ απαιτούμε: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- Αν η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = \begin{cases} g_1(x), & \text{αν } x < x_0 \\ g_2(x), & \text{αν } x \geq x_0 \end{cases}$ απαιτούμε: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

2. Εύρεση παραμέτρων ώστε μια παραμετρική συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη.

- Αν η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{αν } x \neq x_0 \\ c, & \text{αν } x = x_0 \end{cases}$ απαιτούμε:
 $\checkmark \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
 $\checkmark$ Η f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 δηλαδή $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}$
- Αν η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = \begin{cases} g_1(x), & \text{αν } x < x_0 \\ g_2(x), & \text{αν } x \geq x_0 \end{cases}$ απαιτούμε:
 $\checkmark$ Η f να είναι συνεχής στο x_0 δηλαδή $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$
 $\checkmark$ Η f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 δηλαδή $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}$

3. Εύρεση παραμέτρων ώστε για μια συνάρτηση f να ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Rolle σε διάστημα $[\alpha, \beta]$

- ✓ Απαιτούμε η f να είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Αν αλλάζει ο τύπος σε σημείο x_0 του $[\alpha, \beta]$, απαιτούμε
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$
- ✓ Απαιτούμε η f να είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) . Αν αλλάζει ο τύπος σε σημείο x_0 του (α, β) , απαιτούμε
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}$
- ✓ Απαιτούμε $f(\alpha) = f(\beta)$.

4. Εύρεση παραμέτρων ώστε μια συνάρτηση f να είναι γν. αύξουσα ή γν. φθίνουσα

- ✓ Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f .
- ✓ Βρίσκουμε την $f'(x)$.
- ✓ Αν $f'(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (τριώνυμο), απαιτούμε:
 - $\Delta \leq 0$ (ώστε το τριώνυμο να μην αλλάζει πρόσημο) και
 - $\alpha > 0$ (αν f γν. αύξουσα) ή $\alpha < 0$ (αν f γν. φθίνουσα)

5. Εύρεση παραμέτρων ώστε μια συνάρτηση f να παρουσιάζει ακρότατο σ' ένα σημείο x_0

- ✓ Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f .
- ✓ Βρίσκουμε την $f'(x)$.
- ✓ Απαιτούμε $f'(x_0) = 0$ (1)
- ✓ Αξιοποιούμε την (1) και όποια άλλη πληροφορία δίνεται προκειμένου να βρούμε τις τιμές των παραμέτρων.
- ✓ **Επαλήθευση.** Αφού έχουμε βρει τις τιμές των παραμέτρων, τις αντικαθιστούμε στον τύπο της συνάρτησης και κάνουμε μελέτη ως προς μονοτονία και ακρότατα ώστε να γίνουν δεκτές ή να απορριφθούν οι παράμετροι που έχουμε βρει.