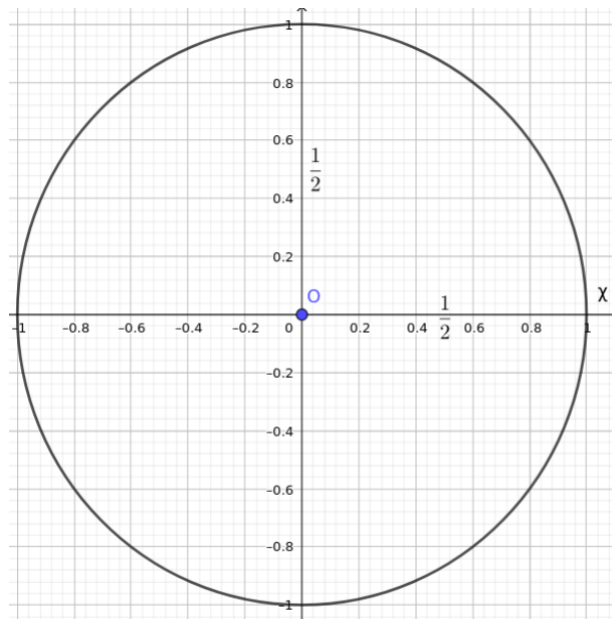


ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (3.5)

ΘΕΜΑ 14977 (2°)

- α) Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο να σημειώσετε τις τελικές πλευρές δύο γωνιών που ανήκουν στο διάστημα $[0, 2\pi)$, με αρχική πλευρά την ημιευθεία Ox , οι οποίες να έχουν ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$ και άλλες δύο οι οποίες να έχουν συνημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$. (Μονάδες 12)



- β) Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ για $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 15036 (2°)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) i. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)
 ii. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f . (Μονάδες 5)
 β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -3$ στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 15969 (2°)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu(13\pi + x) - 2\eta\mu(\frac{\pi}{2} - x)$.

- α) Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu(13\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x$. (Μονάδες 5)
 β) Να δείξετε ότι $f(x) = -4\sigma\upsilon\nu x$. (Μονάδες 8)
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 16298 (2°)

Δίνεται γωνία ω , με $0 \leq \omega < 2\pi$ που ικανοποιεί τις σχέσεις: $\sin \omega = -\frac{1}{2}$ και $\eta\mu\omega > 0$.

α) Να σχεδιάσετε τη γωνία ω πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο και να βρείτε το μέτρο της. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε όλες τις γωνίες φ με $\varphi \in \mathbb{R}$, που ικανοποιούν τη σχέση $\sin \varphi = -\frac{1}{2}$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 21995 (2°)

Πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση $\eta\mu x = \alpha$ στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$ όταν:

α) $\alpha = 1$. (Μονάδες 13)

β) $\alpha = -2$. (Μονάδες 12)

Να αιτιολογήσετε γραφικά, ή όπως αλλιώς θέλετε, την απάντησή σας σε κάθε ένα από τα παραπάνω ερωτήματα.

ΘΕΜΑ 32675 (2°)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x + 1, x \in \mathbb{R}$.

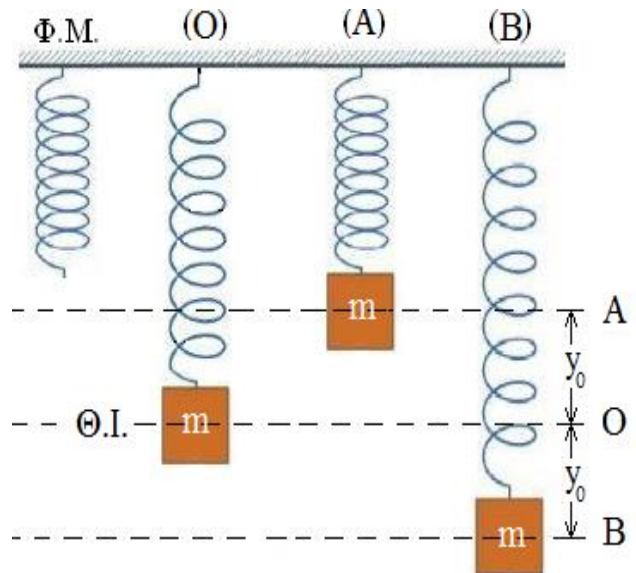
α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του $x \in [0, 2\pi]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή; (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 14975 (4^ο)

Ένα ελατήριο με φυσικό μήκος (Φ.Μ.) κρέμεται από το ταβάνι. Τοποθετείται στο ελατήριο ένα σώμα μάζας m και ισορροπεί στη θέση O (Θ.Ι. – Θέση Ισορροπίας), απέχοντας από το πάτωμα απόσταση ίση με 1 μέτρο.

Το σώμα ανεβοκατεβαίνει, ξεκινώντας από τη θέση O , εκτελώντας ταλάντωση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων A και B , οι οποίες απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση ίση με $2y_0$.



Η απόσταση του σώματος (σε μέτρα) από το πάτωμα, ως συνάρτηση του χρόνου (σε δευτερόλεπτα), είναι:

$$y(t) = 1 + 0,2 \cdot \eta\mu \frac{\pi}{2} t$$

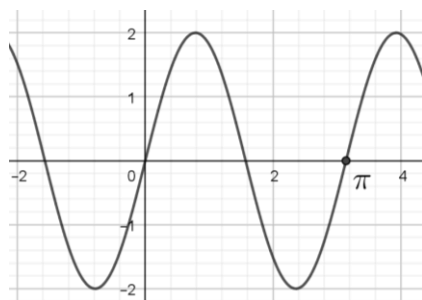
- α) Να βρείτε το y_0 και στη συνέχεια την απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων A και B της ταλάντωσης. (Μονάδες 06)
- β) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης. (Μονάδες 06)
- γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $t \in [0, 4]$. (Μονάδες 06)
- δ) Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές, η απόσταση του σώματος από το πάτωμα θα είναι ίση με 1, 1 μέτρα, για $t \in [0, 2]$. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 15003 (4^ο)

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \eta\mu\alpha x \cdot \left[\sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{2} - \alpha x \right) + 2 \right] - \sigma\upsilon\nu\alpha x \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - \alpha x) - 1, \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

- α) i. Να δείξετε ότι $f(x) = 2 \cdot \eta\mu\alpha x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)
- ii. Δίνεται επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να δείξετε ότι $\alpha = 2$. (Μονάδες 6)



- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $\varepsilon: y = 1$ για $x \in [0, \pi]$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 15014 (4°)

α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu\beta x$, με α, β ακέραιους θετικούς αριθμούς.

Να βρείτε την τιμή του α , αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2.

(Μονάδες 6)

β) Αν $\alpha = 2$, να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του β για την οποία είναι $f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2$

είναι $\beta = 8$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν $\alpha = 2$ και $\beta = 8$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 15026 (4°)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα xx' .

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $(f(x) - 1)^2 + (f(1 - x) - 1)^2 = 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 15049 (4°)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \eta\mu(\pi + x)$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $-2 \leq f(x) \leq 2$. Κατόπιν να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε:

i. Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 3)

ii. Δυο σημεία τομής της C_f με τον $x'x$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 15050 (4^ο)

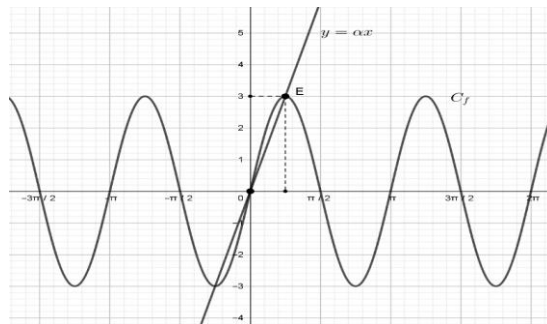
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της. (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε δυο κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = 1$ (Μονάδες 5)
- γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ και $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. (Μονάδες 6)
- δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, στο διάστημα $[0, 2\pi]$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 15287 (4^ο)

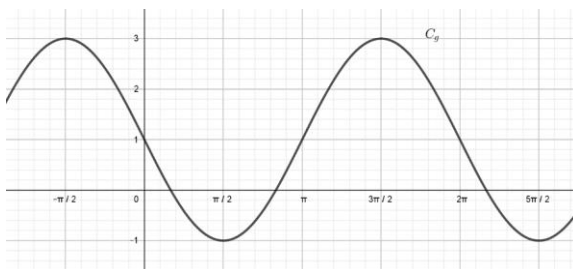
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η ευθεία $y = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \rho \eta \mu(\omega x)$, όπου $\omega > 0$, $\rho > 0$ και $x \in \mathbb{R}$. Με βάση το σχήμα,

- α) Να δείξετε ότι $\rho = 3$ και $\omega = 2$. (Μονάδες 6)
- β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α . (Μονάδες 9)
- γ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $3\eta \mu(2x) - \frac{12}{\pi}x = 0$. (Μονάδες 10)

**ΘΕΜΑ 15288 (4^ο)**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta \mu 3x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε την περίοδο T , τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f . (Μονάδες 3)
- β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \alpha \eta \mu \beta x + \gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ και πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



- i. Με βάση το σχήμα, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β και γ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

- ii. Για $\alpha = -2$, $\beta = 1$ και $\gamma = 1$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$ στο διάστημα $[0, \pi)$ (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 15347 (4^ο)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\nu\nu^2(\pi - x) - 3\eta\mu(\frac{\pi}{2} + x) + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2\sigma\nu\nu^2x - 3\sigma\nu\nu x + \alpha$. (Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε το α αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(\frac{\pi}{3}, 1)$. (Μονάδες 5)

δ) Για $\alpha = 2$ και $g(x) = 2\eta\mu^2x + 9\sigma\nu\nu x - 9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 15821 (4^ο)

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε $\eta\mu x = \sigma\nu\nu x = 0$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι εξίσωση $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x = 3 \cdot \sigma\nu\nu x$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$ και κατόπιν να τη λύσετε στο διάστημα $[0, 2\pi]$. (Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{3} \cdot \eta\mu x$ και $g(x) = 3 \cdot \sigma\nu\nu x$ στο ίδιο σύστημα αξόνων στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος β). (Μονάδες 7)

δ) Αξιοποιώντας το ερώτημα γ) να λύσετε γραφικά την ανίσωση $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x < 3 \cdot \sigma\nu\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 20645 (4^ο)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sigma\nu\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $g(x) = \sigma\nu\nu x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να περιγράψετε με ποιο τρόπο από τη γραφική παράσταση της g προκύπτει η γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 6)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τιμές $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f(\pi)$. (Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2}f(x) + 1 = 0$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 20712 (4^ο)

Σε μια θαλάσσια περιοχή, λόγω της παλίρροιας, η στάθμη των υδάτων αυξομειώνεται. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης f , που δίνει σε μέτρα το ύψος της στάθμης των υδάτων συναρτήσει του χρόνου t σε ώρες. Να βρείτε :

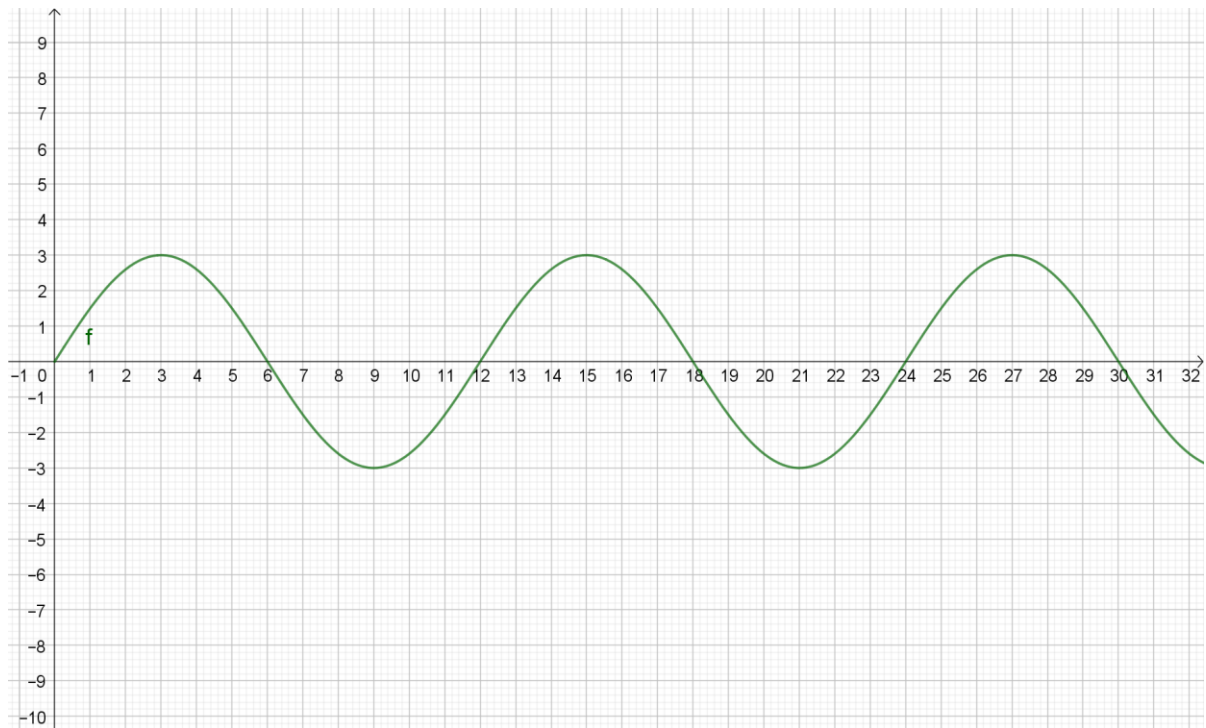
α) την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη στάθμη (πλημμυρίδα) και τη χαμηλότερη στάθμη (άμπωτη). (Μονάδες 6)

β) την περίοδο του φαινομένου της παλίρροιας. (Μονάδες 6)

γ) τον τύπο της συνάρτησης f . (Μονάδες 6)

δ) ποιες ώρες, στη διάρκεια μιας ημέρας, η στάθμη των υδάτων είναι $\frac{3}{2}$ μέτρα.

(Μονάδες 7)

**ΘΕΜΑ 20747 (4^ο)**

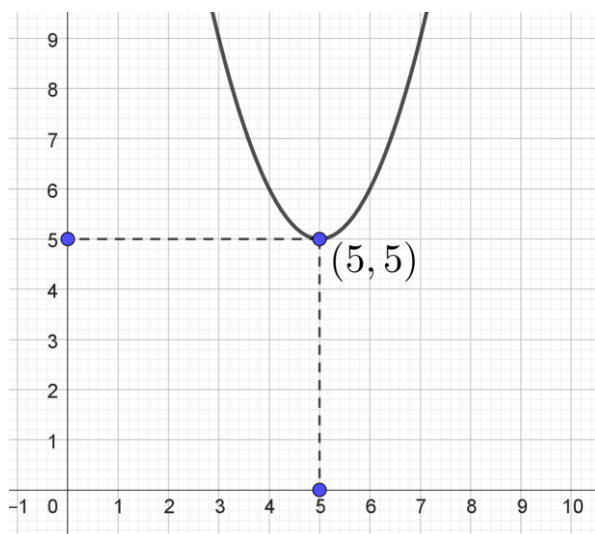
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 + \sqrt{3}\epsilon\phi\omega \cdot \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$. Αν για τη γωνία ω ισχύει η σχέση $-2\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu\omega = -1$, $\omega \in [0, \frac{\pi}{2}]$, τότε:

α) i) Να αποδείξετε ότι $\epsilon\phi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$. (Μονάδες 10)

ii) Για $\epsilon\phi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

(Μονάδες 04)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x^2 - 10x + 30$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση στο παρακάτω σχήμα.



- i) Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g . (Μονάδες 04)
- ii) Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g έχουν κοινά σημεία. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 21244 (4^ο)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha+1}{2} \sin(\beta x)$, με $\alpha, \beta > 0$, η οποία έχει ελάχιστο -2 και περίοδο $\frac{\pi}{2}$.

- α) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = 4$. (Μονάδες 5)

β) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \epsilon\varphi(\pi - x) \cdot \eta\mu(2\pi + x)}{\sigma\upsilon\nu(3\pi - x) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$.

Να δείξετε ότι $A = -1$. (Μονάδες 10)

- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2A$, στο διάστημα $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$. (Μονάδες 10)