

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ – ΕΝΟΤΗΤΑ 4.4

(Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές)

ΘΕΜΑ 15037 (4^ο)

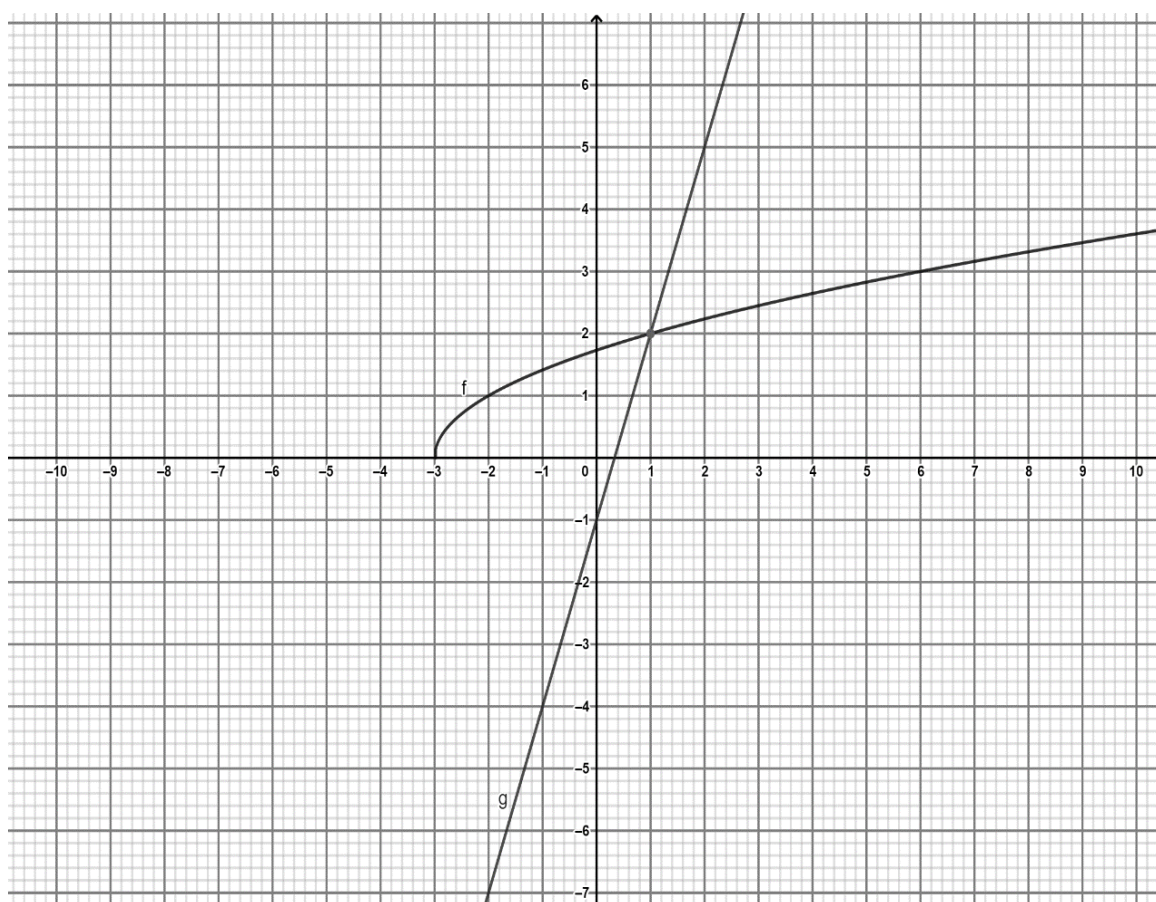
Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x+3}$ και $g(x) = 3x - 1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τη μονοτονία των συναρτήσεων f, g . (Μονάδες 4)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$. (Μονάδες 6)

γ) i) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$. (Μονάδες 7)

ii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του i ερωτήματος. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 15187 (4°)

Για τη γωνία ω του παρακάτω σχήματος ισχύει $5\eta\mu^3\omega - 8\eta\mu^2\omega - 7\eta\mu\omega + 6 = 0$.

α) Να δείξετε ότι $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$. (Μονάδες 8)

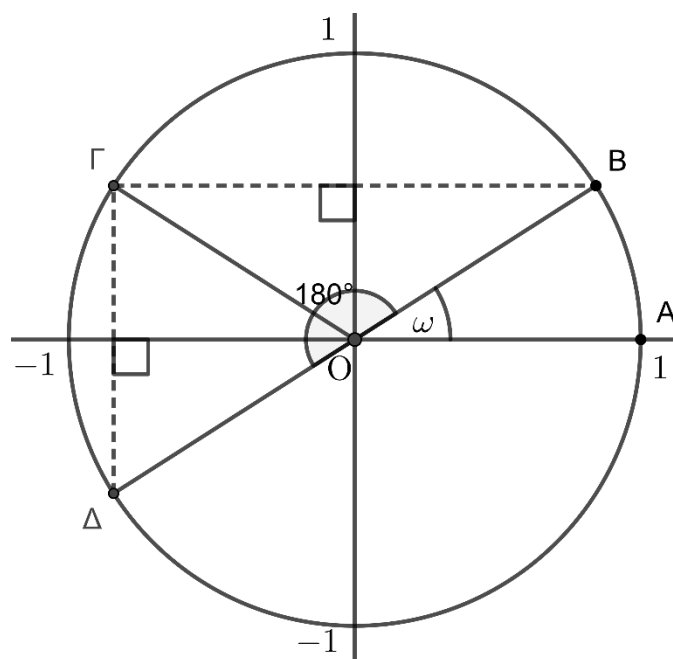
β) Να βρείτε:

i. την τιμή του $\sigma\upsilon\nu\omega$ (Μονάδες 6)

ii. τις συντεταγμένες των σημείων B , Γ και Δ (Μονάδες 6)

iii. το ημίτονο και το συνημίτονο των θετικών γωνιών $A\hat{O}B$, $A\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}\Delta$.

(Μονάδες 5)

**ΘΕΜΑ 15270 (4°)**

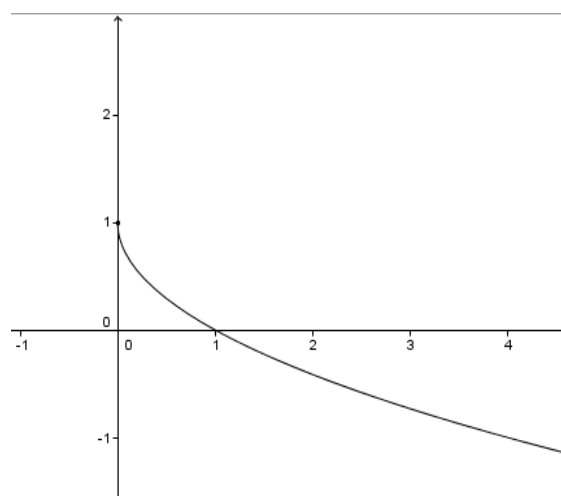
Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την μονοτονία της και την μέγιστη τιμή της. (Μονάδες 6)

β) Αν $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, και $0 < \alpha < \frac{1}{4} < \beta$, να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $P = (2f(\alpha) - 1)(2f(\beta) - 1)$ (Μονάδες 10)

γ) Έστω ότι η συνάρτηση του προβλήματος είναι η

$f(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ευθεία $y = 2x$. (Μονάδες 9)



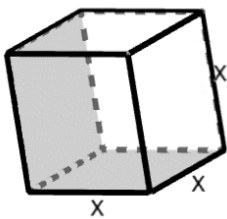
ΘΕΜΑ 15377 (4°)

Μία κυβική δεξαμενή Α έχει ακμή με μήκος x μέτρα. Αν αυξηθεί η μία μόνο ακμή της κατά μία μονάδα θα μετατραπεί στη δεξαμενή Β σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με τετράγωνη βάση.

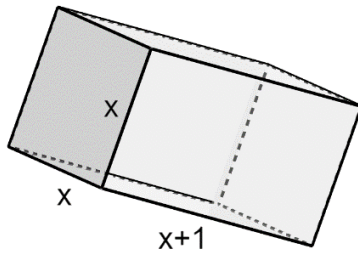
- α) Να βρείτε τη διαφορά $\Delta(x)$ των όγκων των δύο δεξαμενών ως συνάρτηση του x .
(Μονάδες 4)
- β) Αν ο όγκος της δεξαμενής Β είναι 36 κυβικά μέτρα να βρείτε:
- Τις διαστάσεις των δεξαμενών Α και Β. (Μονάδες 9)
 - Τη διαφορά των όγκων $\Delta(x)$. (Μονάδες 4)
- γ) Αν επιπλέον αυξηθεί η μία ακμή της βάσης της δεξαμενής Β κατά 2 μονάδες, να βρείτε τη μικρότερη τιμή του x ώστε ο όγκος της νέας δεξαμενής Γ να είναι τουλάχιστον 60 κυβικά μέτρα. (Μονάδες 8)

Βοηθητικά δίνονται τα σχήματα των δεξαμενών Α, Β και Γ

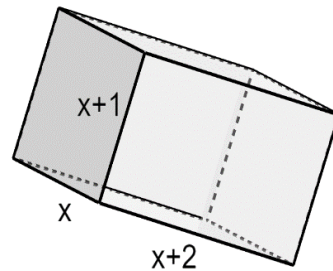
Δεξαμενή Α



Δεξαμενή Β



Δεξαμενή Γ

**ΘΕΜΑ 17941 (4°)**

Δίνεται η εξίσωση $\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} = a, a \in \mathbb{R}$. (1)

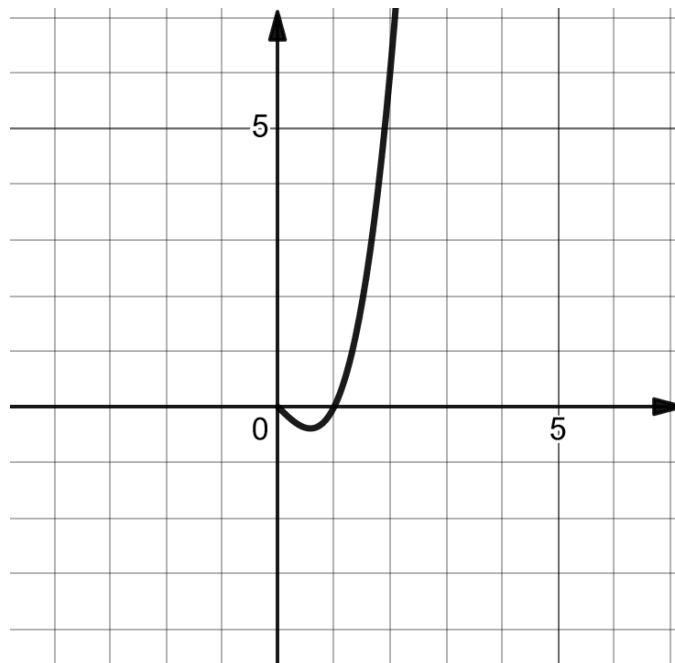
- α) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζεται η εξίσωση (1). (Μονάδες 5)
- β) Να λύσετε την εξίσωση (1) για $a = 0$. (Μονάδες 5)
- γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+2}$ είναι άρτια. (Μονάδες 5)
- δ) Να αποδείξετε ότι:
- Για $a = 2\sqrt{2}$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα.
 - Για $a \neq 2\sqrt{2}$ αν η εξίσωση (1) έχει ως ρίζα τον αριθμό $\rho \in [-2, 2]$, τότε θα έχει ως ρίζα και τον αριθμό $-\rho$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 18111 (4^ο)

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{όταν } x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$ και $h(x) = x^3 - x, x \in \mathbb{R}$.

α) i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι περιττή. (Μονάδες 03)

ii) Να συμπληρώσετε το παρακάτω σχήμα ώστε να παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h .



(Μονάδες 04)

iii) Χωρίς να χρησιμοποιήσετε το παραπάνω σχήμα, να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 08)

β) Αν $x \geq 0$ να αποδείξετε ότι: η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από την ευθεία $\varepsilon: y = x$ αν και μόνο αν η γραφική παράσταση της h βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 10)

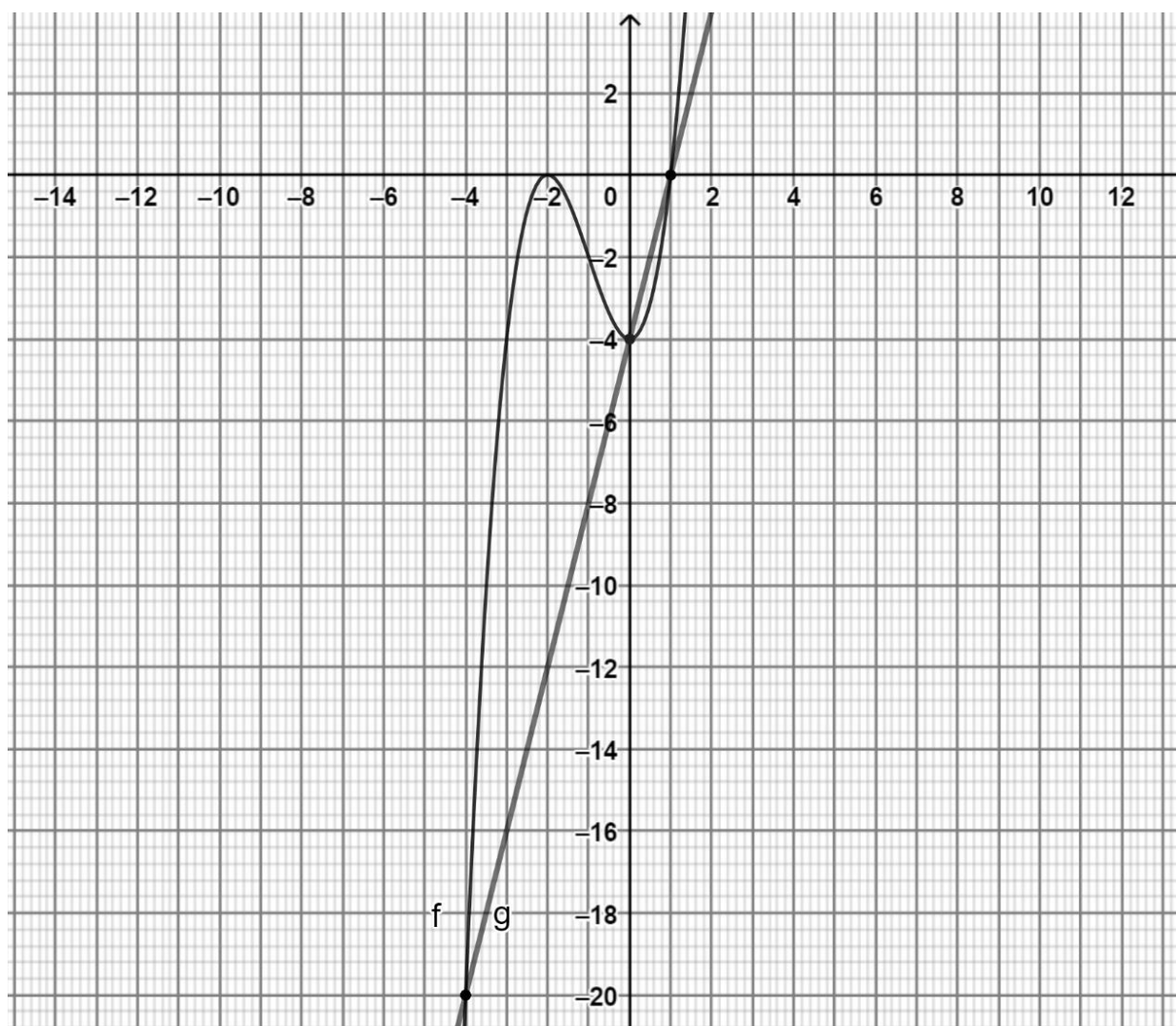
ΘΕΜΑ 18696 (4^ο)

Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \text{ και } g(x) = 4x - 4 \text{ με } x \in \mathbb{R}.$$

- α) Από τη γραφική παράσταση της f , να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της. (Μονάδες 8)
- β) Να λύσετε γραφικά και αλγεβρικά την εξίσωση $f(x) = g(x)$. (Μονάδες 10)
- γ) Να βρείτε αλγεβρικά τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης g είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 18713 (4^ο)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - \alpha x^2 + 2x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν $P(1) = 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$ ισούται με 15,

α) Να δείξετε ότι $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$. (Μονάδες 8)

β) i) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $\pi(x) = x^2 + 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$. (Μονάδες 5)

ii) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\sin^3 x + \sin x = 1 - \frac{1}{2}\eta\mu^2 x$, $x \in (0, 2\pi)$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 20647 (4^ο)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - \beta x + 3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα τον αριθμό 2, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι τουλάχιστον ένας συντελεστής του δεν είναι ακέραιος. (Μονάδες 7)

Αν επιπλέον $P(1) = 0$, τότε:

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -3$ και $\beta = \frac{21}{2}$. (Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$. (Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $P(\sin x) = 0$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 20731 (4ο)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 6x^2 - 7$.

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $x-1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$. (Μονάδες 5)

β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(x)$ σε πολυώνυμα πρώτου ή δευτέρου βαθμού. (Μονάδες 8)

γ) i) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 5)

ii) Αν οι αριθμοί -1 και 1 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $P(x)=0$, να λύσετε την εξίσωση $(2\eta\mu x - 1)^4 + 6(2\eta\mu x - 1)^2 - 7 = 0$, για $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 20759 (4^ο)

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΜ που βλέπετε στο παρακάτω σχήμα είναι $(OAM) = \frac{4}{6}$ τετραγωνικές μονάδες. Η ευθεία ε είναι εφαπτόμενη στον κύκλο στο σημείο Α.

α) Να αποδείξετε ότι για τη γωνία $\omega = \widehat{AOM}$ ισχύει $\varepsilon\phi\omega = \frac{4}{3}$, $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$.

(Μονάδες 08)

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu\omega$, $\sigma\phi\omega$ της γωνίας

$\omega = \widehat{AOM}$ αν ισχύει $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$. (Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$f(x) = \eta\mu^2 x - 5\eta\mu\omega \cdot \eta\mu x + 5\sigma\upsilon\nu\omega$ και του άξονα $x'x$, όπου $\omega = \widehat{AOM}$ η γωνία

του προηγούμενου ερωτήματος και $x \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 09)

