ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ – ΕΝΟΤΗΤΑ 5.2 (Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ)

ΘΕΜΑ 15687 (2ο)

Δίνεται η παράσταση $A = \log_4 3 + \log_4 \alpha - \log_4 \beta$, όπου α, β θετικοί αριθμοί.

α) Να αποδείξετε ότι $A = \log_4 \dfrac{3\alpha}{\beta}$ (Μονάδες 13)

β) Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει $3\alpha = 16\beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης Α.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 15816 (2ο)

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \ln 2$, $\beta = \ln 4$, $\gamma = \ln 8$.

α) Να αποδείξετε ότι $2\beta = \alpha + \gamma$ (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\beta + \gamma = 5\alpha$ (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 15817 (2ο)

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \ln 2$ και $\beta = \ln 3$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $0 < \alpha < \beta$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\beta - \alpha < 1$. (Μονάδες 13)

Δίνεται $e \simeq 2.71$.

ΘΕΜΑ 19903 (2ο)

Αν $\alpha = \log 100 + \log 5 + \log 2 - \log 1$, τότε:

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$. (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $9 \cdot 2^x = 4 \cdot \alpha^x$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 20663 (2ο)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\log_2 8) \cdot x^3 + \left(4\log_2 \sqrt{2}\right) \cdot x^2 - (4\log_2 1) \cdot x + 1990$.

α) Να αποδείξετε ότι $\log_2 8 + 2\log_2 \sqrt{2} - \log_2 1 = 4$. (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x-2)$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 20710 (2ο)

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \log 20$ και $\beta = \log 50$. Να αποδείξετε ότι

α) $\beta + \alpha = 3$. (Μονάδες 7)

β) $\ln(\beta + \alpha) > 1$. (Μονάδες 6)

γ) $10^{\beta} - 10^{\alpha} = 10 \cdot (\beta + \alpha)$. (Μονάδες 12)

Δίνεται ότι $e \simeq 2{,}71$.

ΘΕΜΑ 20711 ($2^{ο}$)

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \log 3$ και $\beta = \log 4$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $0 < \alpha < \beta$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι :

i. $\beta + \alpha > 1$. (Μονάδες 6)

ii. $\ln \dfrac{\alpha}{\beta} < 0$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 21676 ($2^{ο}$)

Αν είναι γνωστό ότι $\ln 4 = 1{,}386$ και $\ln 5 = 1{,}609$ τότε:

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \ln\dfrac{e}{5} - \ln\dfrac{4}{e}$ (Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια της ισότητας $80 = 5 \cdot 4^2$ να αποδείξετε ότι $\ln 80 = 4{,}381$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 21858 ($2^{ο}$)

Δίνεται η παράσταση $\mathrm{A} = 2\log 5 + 2\log 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A} = 2$. (Μονάδες 12)

β) Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία ισχύει ότι $e^{\lambda} = \mathrm{A}$. (Μονάδες 6)

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β), να αποδείξετε ότι $\ln \lambda < 0$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 15021 ($4^{ο}$)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $\mathrm{O}(0,0)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $f(\ln 2) + f(\ln\dfrac{1}{2})$. (Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $f(\eta\mu\theta) + f(\eta\mu(\pi+\theta)) = 0$, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ με $\eta\mu\theta \neq 0$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 15251 (4ο)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-9x^2+(\alpha-2)x-6$ το οποίο έχει παράγοντα το $x-1$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α. (Μονάδες 6)

β) Για $\alpha=15$

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x):\left(x^2-3x+2\right)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. (Μονάδες 6)

ii. αν $P(x)=\left(x^2-3x+2\right)(2x-3)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$. (Μονάδες 7)

iii. να αποδείξετε ότι $P(\ln 2)<0$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 15474 (4ο)

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=\ e^{lne}x^3+4x^2ln\sqrt{e}+2$.

α) Να δείξετε ότι $P(x)=ex^3+2x^2+2$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία ε: $y=ex+4$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία ε: $y=ex+4$. (Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης: $P(e)-e^2-4$**.** (Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 15822 (4ο)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+x$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ και $\alpha\neq 0$, το οποίο έχει 3 ακέραιες ρίζες διαφορετικές ανά δύο.

α) Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες του $P(x)$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$ και $\beta=0$. (Μονάδες 6)

γ) Με $\alpha=-1$ και $\beta=0$,

i. να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$. (Μονάδες 6)

ii. να αποδείξετε ότι $P(\log\sqrt{10})>0$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 15823 (4ο)

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $4x^2-1$ δίνει πηλίκο $3x-2$ και υπόλοιπο 1.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=1$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $P(\log 5)\neq 1$. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 18110 (4ο)

α) i. Να λύσετε την εξίσωση $x\left(e^x-1\right)=0$ (Μονάδες 03)

ii. Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ το πρόσημο του γινομένου $x\left(e^x-1\right)$ (Μονάδες 06)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\sqrt{x\left(e^x-1\right)}$.

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 05)

ii. Να υπολογίσετε τις τιμές $f\left(0\right), f\left(\ln 2\right)$ και $f\left(-\ln 2\right)$. (Μονάδες 06)

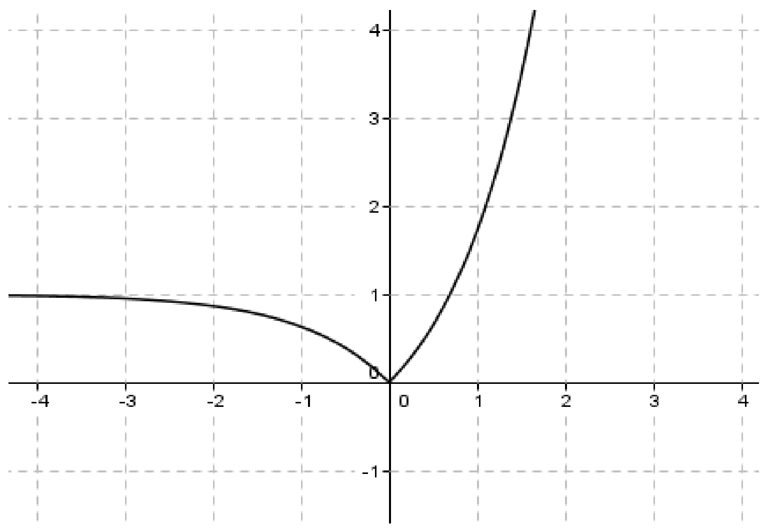
iii. Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παρακάτω ισχυρισμός: « η συνάρτηση $f\left(x\right)=\sqrt{x\left(e^x-1\right)}$ είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της». Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 18235 (4ο)

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης

$f(x)=|e^x-1|, x\in\mathbb{R}$.

α) Να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να περιγράψετε πως αυτή μπορεί να προκύψει από τη γνωστή γραφική παράσταση της $g(x)=e^x, x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 7)



β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να συμπεράνετε τη μονοτονία και την ελάχιστη τιμή της f . (Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$. (Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του α, το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής της παράστασης C_f με την ευθεία $y=\alpha$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 18429 (4ο)

Η μονάδα μέτρησης της έντασης του ήχου είναι το ένα Watt ανά τετραγωνικό μέτρο $(1W/m^2)$. Στο ανθρώπινο αυτί, η ελάχιστη ένταση που γίνεται αντιληπτή είναι $10^{-12}\,w/m^2$. Για να μετρήσουμε την στάθμη της έντασης ενός ήχου, χρησιμοποιούμε την κλίμακα Decibel (Db). Το επίπεδο της στάθμης σε Db δίνεται από τη σχέση $D = 10 \cdot log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ όπου I_0 η ελάχιστη αντιληπτή ένταση και I η ένταση του ήχου.

α) Να βρείτε το επίπεδο των Db που παράγει ένα μαχητικό αεροσκάφος, αν γνωρίζουμε ότι η ένταση του ήχου του είναι $100\,w/m^2$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι μια αύξηση του επιπέδου στάθμης οποιουδήποτε ήχου κατά 20 Db αντιστοιχεί σε ήχο έντασης 100 φορές μεγαλύτερης. (Μονάδες 10)

γ) Το όριο πόνου του ανθρώπινου αυτιού λόγω έντασης ήχου είναι 120 Db. Η έκθεση σε ήχους πάνω από 120 Db μπορεί να οδηγήσει σε προβλήματα ακοής ή κώφωση. Ποια είναι η αντίστοιχη ένταση ήχου στο όριο του πόνου για τον άνθρωπο;

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 18434 (4ο)

Ο Νόμος των Bouguert-Lambert στη φωτομετρία, λέει ότι η ένταση I μιας ακτινοβολίας (ηλιακό φως, ακτίνες Χ, κ.λπ.) που εισχωρεί κατακόρυφα σε ένα διαφανές μέσο (νερό λιμνών, θαλάσσης, γυαλί, κ.λ.π.) μειώνεται εκθετικά, απορροφούμενη από το μέσο, συναρτήσει του βάθους (πάχους) h του μέσου, σύμφωνα με τη συνάρτηση $I = I_0 \cdot e^{-\lambda h}$, όπου $\lambda > 0$ σταθερά και I_0 η αρχική ένταση.

α) Να εξετάσετε αν υπάρχει κάποιο βάθος h στο οποίο η ένταση της ακτινοβολίας να είναι μηδέν. (Μονάδες 3)

β) Γνωρίζουμε ότι για καθαρό νερό θαλάσσης είναι $\lambda = 1{,}4\,m^{-1}$ (το m παριστάνει μέτρα) και ότι μια συγκεκριμένη μορφή φυτικής ζωής δεν μπορεί να υπάρξει, όταν η ένταση του ηλιακού φωτός γίνει μικρότερη ή ίση από το $\frac{1}{4}$ της αρχικής έντασης. Να βρείτε για ποιες τιμές του βάθους h συμβαίνει αυτό. (Δίνεται ότι $ln2 = 0{,}7$)

(Μονάδες 12)

γ) Σε κάποιο άλλο διαφανές μέσο, γνωρίζουμε ότι σε βάθος $10\,m$ η ένταση μιας ακτινοβολίας μειώνεται στο μισό της έντασης της αρχικής ακτινοβολίας. Να αποδείξτε ότι στην συγκεκριμένη κατάσταση ισχύει $I = I_o \cdot 2^{-\frac{h}{10}}$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 18437 (4ο)

Ένα από τα επιβλητικότερα μνημεία του κόσμου είναι η αψίδα Gateway Arch στην πόλη Saint-Louis των Η.Π.Α. Θεωρώντας κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, όπως στο παρακάτω σχήμα, η πρόσοψη της αψίδας προσεγγίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = -192\left(e^{\frac{x}{100}} + e^{-\frac{x}{100}}\right) + 576$,

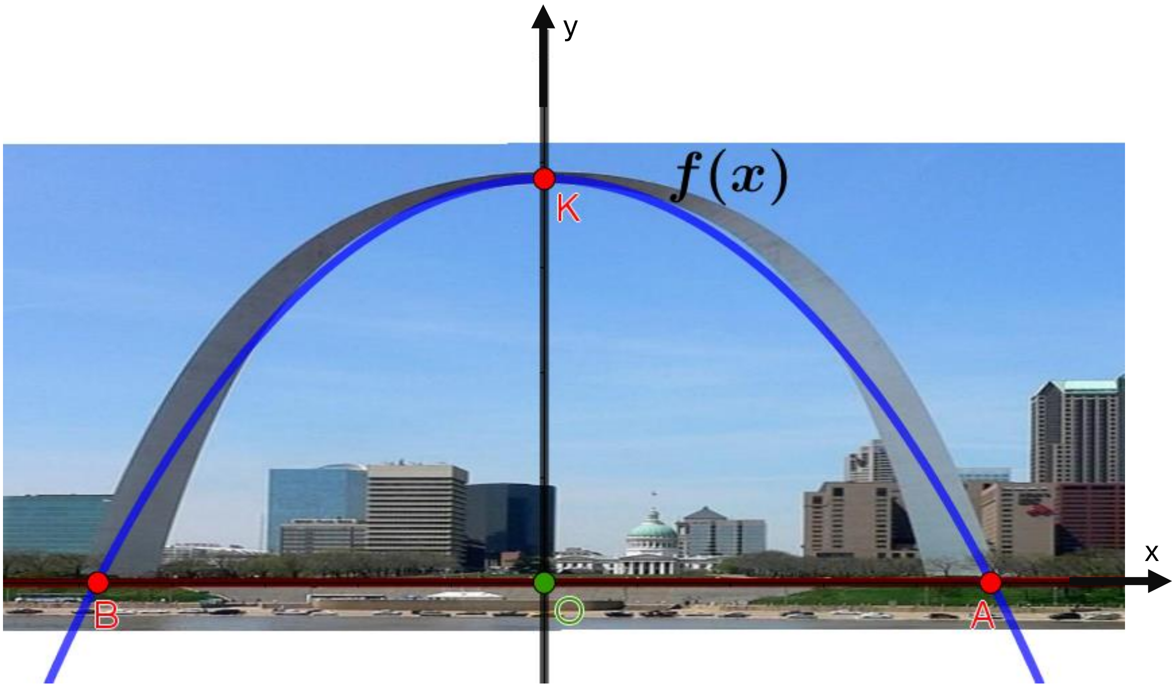
με $f(x) \geq 0$, όπου οι αριθμοί $x, f(x)$ μετρούνται σε μέτρα (m).

(Η γραφική παράσταση μιας τέτοιας συνάρτησης λέγεται αλυσοειδής καμπύλη).

α) Να αποδείξετε ότι το μέγιστο ύψος ΟΚ της αψίδας είναι $192\,m$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Α στο οποίο η καμπύλη τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox. Δίνεται ότι $ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \cong 0{,}96$. (Μονάδες 13)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι τα σημεία Α και Β έχουν αντίθετες τετμημένες, να αποδείξετε ότι το πλάτος ΑΒ της αψίδας είναι ίσο με το μέγιστο ύψος της ΟΚ. (Μονάδες 5)

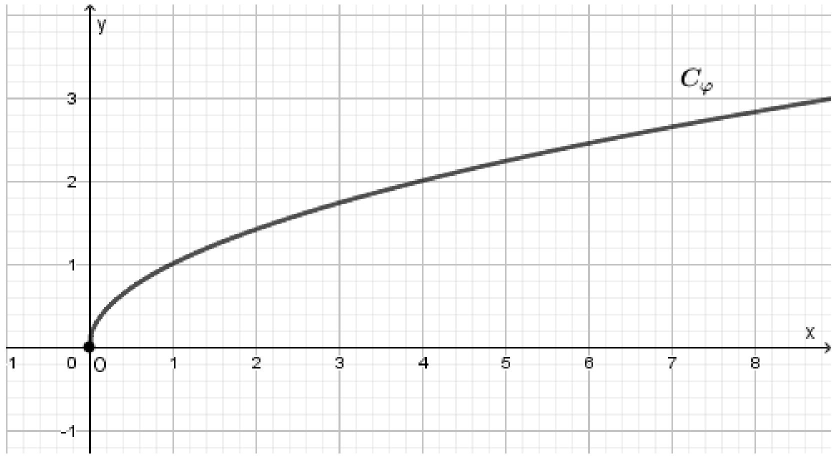


ΘΕΜΑ 18863 (4ο)

Δίνονται οι συναρτήσεις: $\varphi(x) = \sqrt{x}$, με $x \geq 0$, $f(x) = \sqrt{x-1}$, με $x \geq 1$ και $g(x) = \frac{x+1}{3}$, με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 08)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ.



i. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (Μονάδες 02)

ii. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, να σχεδιάσετε και την γραφική παράσταση της συνάρτησης g. (Μονάδες 04)

γ) Με τη βοήθεια του σχήματος ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g. (Μονάδες 06)

δ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{ln10 - 1} > \frac{1+ln10}{3}$. (Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 20657 (4ο)

Σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, η θερμοκρασία θ, σε βαθμούς Κελσίου, ενός αντικειμένου μειώνεται με την πάροδο του χρόνου t, σε λεπτά, σύμφωνα με τη συνάρτηση $\theta(t) = T + (\theta_0 - T)e^{kt}$, όπου k μια σταθερά με $k < 0$, θ_0 η αρχική θερμοκρασία του αντικειμένου, ενώ T είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος μέσα στο οποίο τοποθετείται το αντικείμενο, με $\theta_0 > T$.

Ένα αντικείμενο έχει θερμανθεί στους $100^o\ C$ και στη συνέχεια αφήνεται να κρυώσει σε ένα δωμάτιο με σταθερή θερμοκρασία $30^o\ C$. Γνωρίζουμε ότι 5 λεπτά μετά την τοποθέτησή του αντικειμένου στο δωμάτιο, η θερμοκρασία του αντικειμένου είναι $80^o\ C$.

α) Να αποδείξετε ότι $k = -0{,}0672$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $\theta(t) = 30 + 70 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{t/5}$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε, με προσέγγιση εκατοστού, τη θερμοκρασία του αντικειμένου μετά από 1 ώρα και 40 λεπτά. (Μονάδες 8)

Δίνεται ότι $ln\left(\frac{5}{7}\right) = -0{,}336$ (προσεγγιστικά) και $\left(\frac{5}{7}\right)^{10} \cong 0{,}034$.

ΘΕΜΑ 20669 (4ο)

α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{x^2+1} - x > 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$. (Μονάδες 03)

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 09)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $g(-x) + g(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 09)

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O. (Μονάδες 04)

ΘΕΜΑ 20845 (4ο)

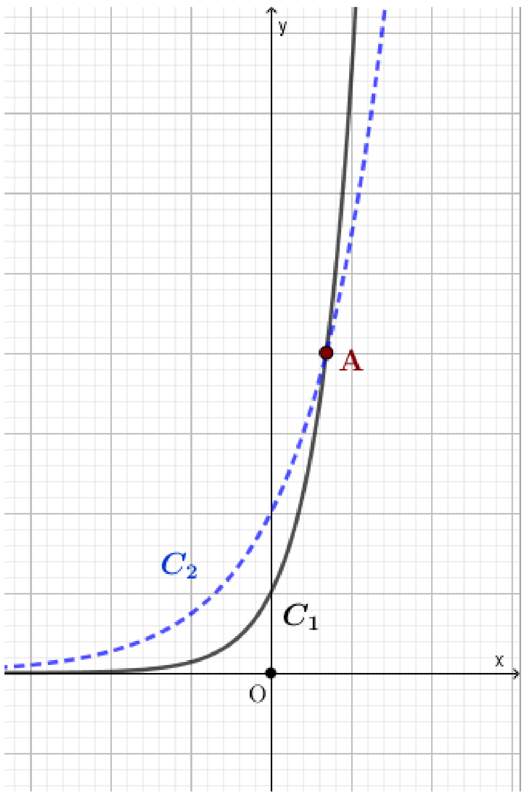
Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = e^{\kappa x},\ \kappa \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(1) - f(0) \geq f(0) - f(-1)$. Πότε ισχύει η ισότητα;(Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι αν $\kappa > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 07)

γ) i. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει: $e^{2x} > 2e^{x}$. (Μονάδες 05)

ii. Χρησιμοποιώντας το παρακάτω σχήμα, να αντιστοιχίσετε τις C_1, C_2 με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\varphi(x) = 2e^{x}$ και $k(x) = e^{2x}$. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του κοινού τους σημείου Α;



(Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 20847 (4ο)

Αν I είναι η ένταση του ήχου (σε W/m^2 - Watt ανά τετραγωνικό μέτρο), τότε η αντίστοιχη ηχοστάθμη D (σε ντεσιμπέλ) δίνεται από τον τύπο:

$$D = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot I)$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα ηχοστάθμης.

Όριο ακοής	$\mathbf{0}$ $\boldsymbol{\nu\tau\varepsilon\sigma\iota\mu\pi\acute{\varepsilon}\lambda}$
Θρόισμα φύλλων	10 $\nu\tau\varepsilon\sigma\iota\mu\pi\acute{\varepsilon}\lambda$
Συνήθης ψίθυρος	20 $\nu\tau\varepsilon\sigma\iota\mu\pi\acute{\varepsilon}\lambda$
Αθόρυβο αυτοκίνητο	50 $\nu\tau\varepsilon\sigma\iota\mu\pi\acute{\varepsilon}\lambda$
Συνήθης ομιλία	65 $\nu\tau\varepsilon\sigma\iota\mu\pi\acute{\varepsilon}\lambda$
Κυκλοφοριακή κίνηση	80 $\nu\tau\varepsilon\sigma\iota\mu\pi\acute{\varepsilon}\lambda$
Αεροσυμπιεστής (κομπρεσέρ) σε απόσταση 3 μέτρων	90 $\nu\tau\varepsilon\sigma\iota\mu\pi\acute{\varepsilon}\lambda$
Όριο πόνου	120 $\nu\tau\varepsilon\sigma\iota\mu\pi\acute{\varepsilon}\lambda$
Αεριωθούμενο	140 $\nu\tau\varepsilon\sigma\iota\mu\pi\acute{\varepsilon}\lambda$

α) Να βρείτε την ένταση του ήχου που δημιουργεί το θρόισμα των φύλλων.
(Μονάδες 08)

β) Αν η ένταση του ήχου σε μία ροκ συναυλία είναι 1 W/m^2 να ελέγξετε αν η ηχοστάθμη στην οποία εκτίθεται το κοινό αγγίζει το όριο του πόνου. (Μονάδες 07)

γ) Αν διπλασιάσουμε την ένταση του ενισχυτή ενός στερεοφωνικού συστήματος, τότε να υπολογίσετε πόσα ντεσιμπέλ θα αυξηθεί η στάθμη του εξερχόμενου ήχου. (Δίνεται ότι $\log 2 \approx 0{,}3$) (Μονάδες 10)