

Θέμα 2^ο

ΘΕΜΑ 15267 (2ο)

Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = 1 + \log 3 - \log 6$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση γράφεται $\log(x^2 + 1) = \log 5$. (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση. (Μονάδες 13)

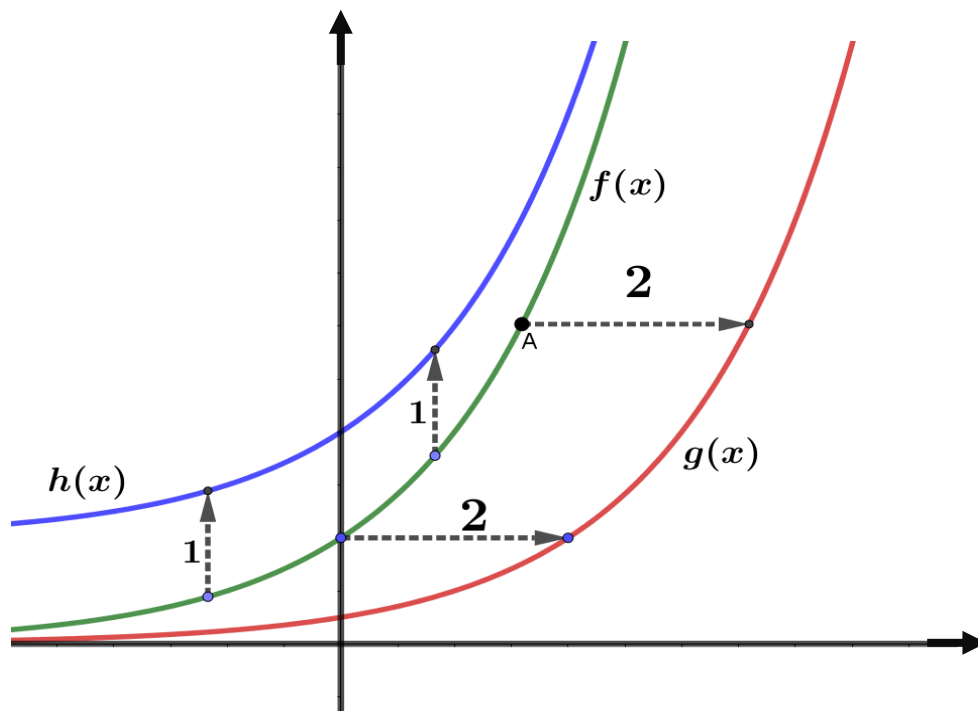
ΘΕΜΑ 15393 (2^ο)

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$ και δύο άλλων συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$, $x \in \mathbb{R}$ που προέκυψαν από μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $f(x)$.

α) Να εξηγήσετε με τι είδους μετατοπίσεις προέκυψαν οι γραφικές παραστάσεις των $g(x)$ και $h(x)$ από την γραφική παράσταση της $f(x)$. (Μονάδες 8)

β) Να γράψετε τους τύπους των συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Α της γραφικής παράστασης της f του οποίου η τεταγμένη είναι 16. (Μονάδες 9)



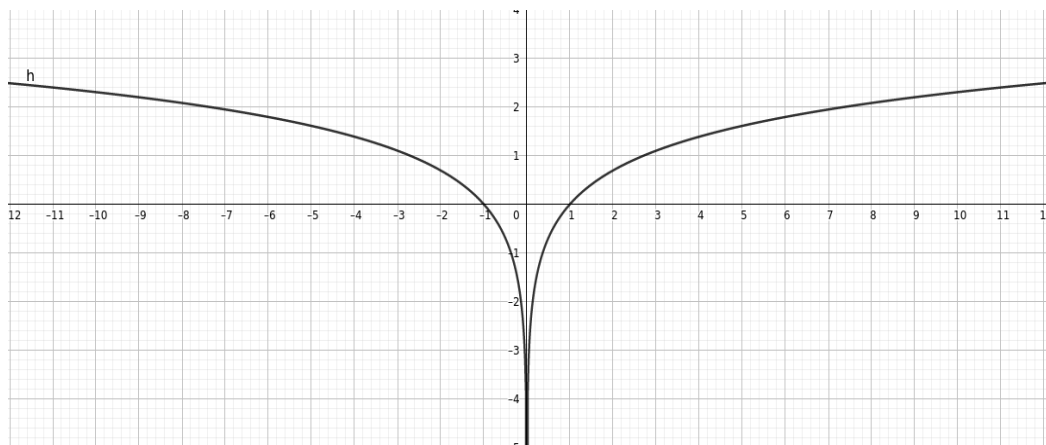
ΘΕΜΑ 15617 (2°)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1}{|x|}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -\ln|x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. (Μονάδες 10)

β) i) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$h(x) = \ln|x|, x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$



Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 7)

ii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και $g(x) = \ln x, x > 0$ έχουν

μοναδικό κοινό σημείο για $x = 1$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 15675 (2ο)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 15808 (2°)

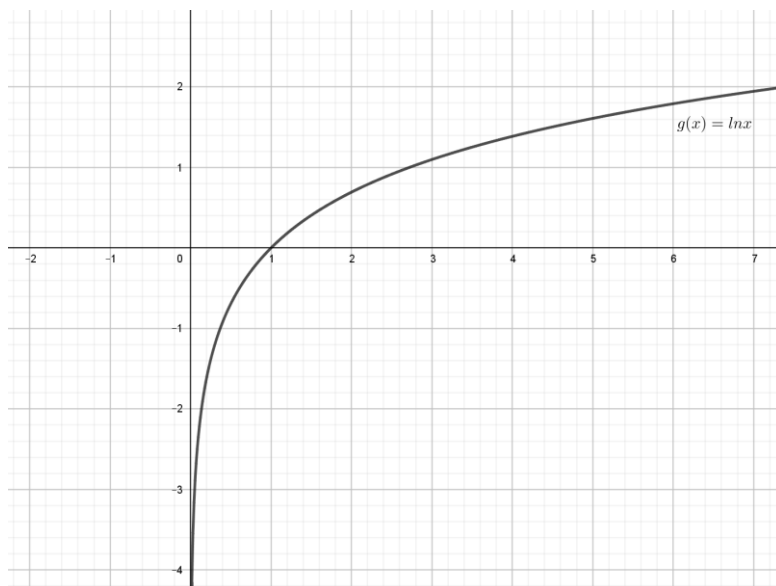
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 8)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \ln x$.



Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \ln(x+2)$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 17318 (2°)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 3)$, με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(3)$. (Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι $\ln 3 + 3\ln 2 - f(3) = \ln 4$. (Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln 4$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 19908 (2°)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1-x}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 20635 (2°)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 7)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 20692 (2°)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log x, x > 0$.

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς $f(100), f(\sqrt{10})$ (Μονάδες 12)

β) Για $x > 1$, να επιλύσετε την εξίσωση $f(x+1) + f(x-1) = \log 10 - \log 5$.
(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 20725 (2°)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log x$ και $g(x) = \log(x+2)$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i) $f(x) = 2$. (Μονάδες 7)

ii) $g(x) = 2f(x)$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 20727 (2°)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log x$ και $g(x) = \ln(x-1)$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i) $\log x = 3$. (Μονάδες 7)

ii) $\ln(x-1) = 1$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 20729 (2°)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 9)

γ) Στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 20730 (2°)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1-x)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 12)

β) Να λυθεί η εξίσωση $\ln(1-x) = \ln(x^2+1)$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 20851 (2°)

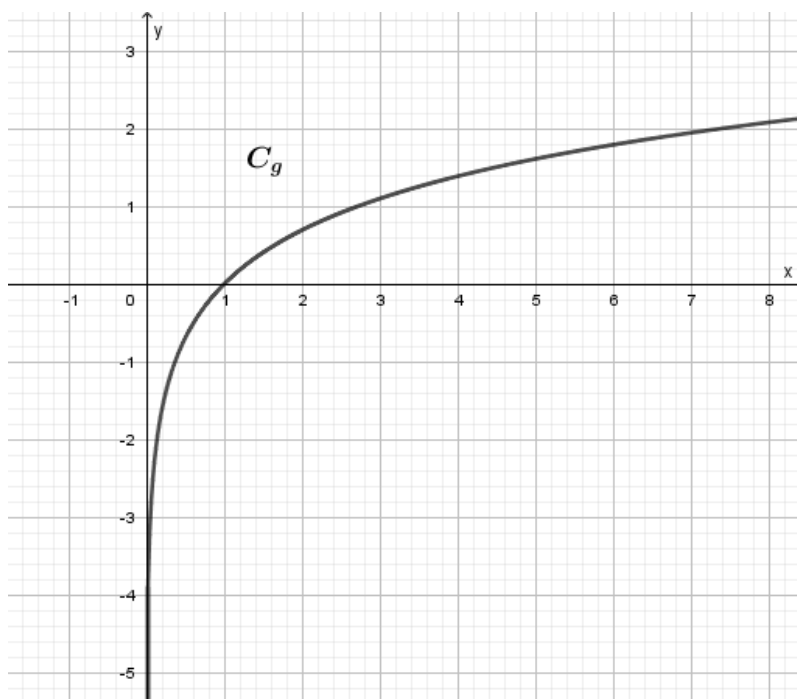
Δίνονται οι παραστάσεις: $A = 2 \log 6 - \log 12$ και $B = \log 5 + \log 2$

- α) Να αποδείξετε ότι $A = \log 3$ και $B = 1$. (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι $A < B$. (Μονάδες 05)
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $\log x < 1$. (Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 20853 (2°)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x - 1)$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = \ln x, \quad x > 0.$$



- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 05)
- β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g , να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 08)
- γ) Να βρείτε το διάστημα, στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 21174 (2°)

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η εξίσωση:

$$\log(x + 1) = -\log 2 - \log(1 - x) \quad (1). \quad (\text{Μονάδες } 10)$$

- β) Να λύσετε την εξίσωση $\log(x + 1) = \log\left(\frac{1}{2}\right) - \log(1 - x)$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 21449 (2°)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1)$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 10)
- γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της $y = \ln x$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 21450 (2°)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x^2 + 4)$ και $g(x) = \ln x + \ln 4$.

- α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 12)
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 21472 (2°)

- α) Να λύσετε την εξίσωση: $\ln(x+1) = \ln(2x)$. (Μονάδες 13)
- β) Να λύσετε την ανίσωση: $\ln(x+1) > \ln(2x)$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 21473 (2°)

- α) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $A = \ln x + \ln(x+6)$. (Μονάδες 10)
- β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln x + \ln(x+6) = \ln 7$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 21675 (2°)

Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = 1 - \log 2$.

- α) Να αποδείξετε ότι $1 - \log 2 = \log 5$. (Μονάδες 12)
- β) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 21952 (2°)

Δίνεται η παράσταση $A = \ln \sqrt{e} + \log \sqrt[3]{100}$. Να αποδείξετε ότι

- α) $A = \frac{7}{6}$. (Μονάδες 12)
- β) $0 < \ln A < 1$ (Μονάδες 13)

Δίνεται $e \approx 2.71$

ΘΕΜΑ 21953 (2°)

Δίνεται η παράσταση $A = e^{\ln 2} + 10^{2\log \sqrt{5}}$. Να αποδείξετε ότι

α) $A = 7$. (Μονάδες 12)

β) $0 < \log A < 1$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 21954 (2°)

Δίνεται η παράσταση $A = \ln(\ln e) + \log(\log 10^{10})$.

α) Να αποδείξετε ότι :

i) $\log 10^{10} = 10$ (Μονάδες 6)

ii) $A = 1$. (Μονάδες 6)

β) Να λυθεί η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = A$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 21956 (2°)

Δίνεται η παράσταση $A = 2\log 5 + 3\log 2 - \log 20$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = 1$. (Μονάδες 12)

β) Να λυθεί η εξίσωση $\ln(e^x - 1) = A$. (Μονάδες 13)

Θέμα 4°**ΘΕΜΑ 15015 (4°)**

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x - 2\ln x = 0$. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x - 2\ln x > 0$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 15093 (4°)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(10^x - 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0, +\infty)$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) + x = \log(10^{2x} - 10^x)$, $x > 0$. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μοναδικού κοινού σημείου της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y = -x$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 15591 (4^ο)-Ε

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{a}{a+5}\right)^x$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι εκθετική και ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 8)

γ) Για τη μεγαλύτερη τιμή του $a \in \mathbb{Z}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα εκθετική με βάση ακέραιο αριθμό, να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) + f(x+1) = 14 \quad (\text{Μονάδες 9})$$

ΘΕΜΑ 15678 (4^ο)-Ε

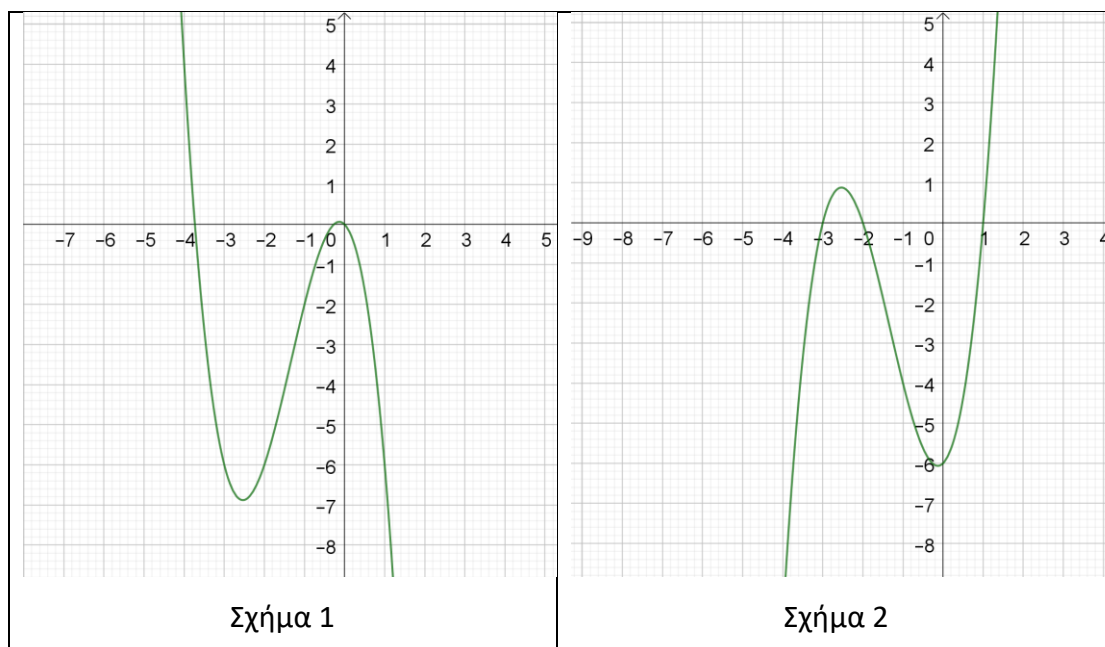
Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = -x^3 - 4x^2 - x + 6$.

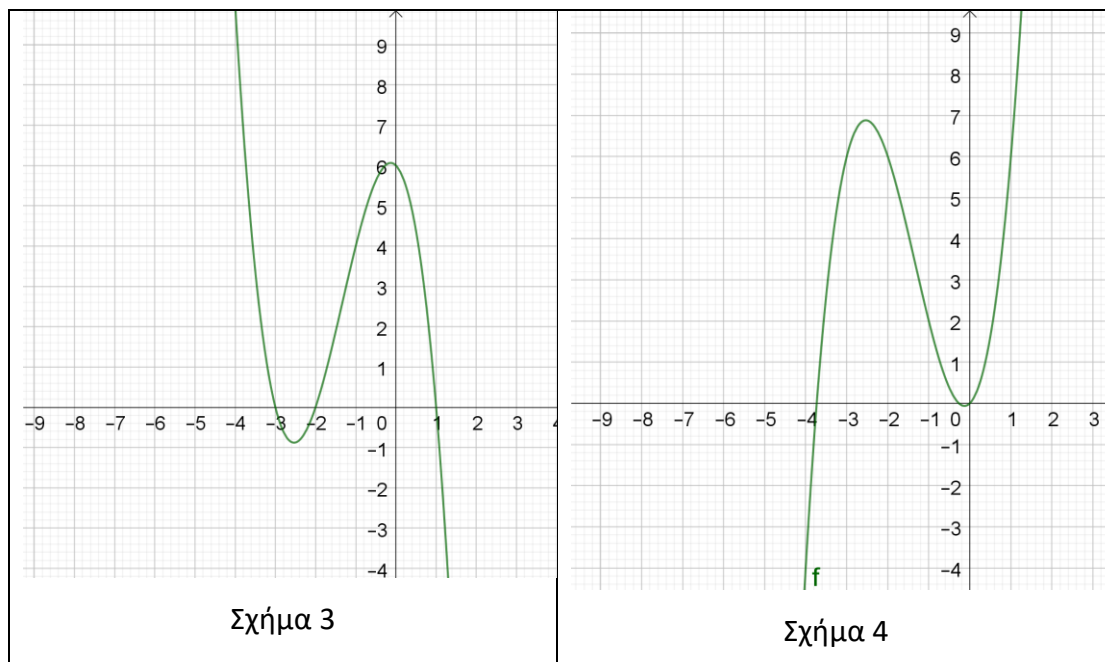
α) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$. (Μονάδες 10)

β) Από τα παρακάτω σχήματα, ένα μόνο μπορεί να αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$. Να βρείτε ποιο αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = \ln x$ έχει μοναδική λύση την $x=1$.

(Μονάδες 8)





ΘΕΜΑ 15679 (4°)

Δίνεται η παράσταση $A = \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x-3}\right)$.

- α) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{\omega^2-1}{\omega-3} > 0$. (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A . (Μονάδες 8)
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $A = -\ln 3$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 15688 (4°)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 9)
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x - 1$. (Μονάδες 8)
- γ) Να αποδείξετε ότι αν $\alpha > 0$, τότε η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία $y = x + \alpha$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 15690 (4°)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2$, $x \neq 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 5)
- β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) = \ln x$. (Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2$, $x \neq 0$. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία $y = 2$. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 15694 (4°)

Στην Αστρονομία, οι αστέρες ταξινομούνται ανάλογα με την λαμπρότητα τους με βάση την σχέση $m - M = 5 \cdot \log \left(\frac{d}{10} \right)$, (I) όπου d η απόσταση του αστέρα από τον παρατηρητή, m είναι το φαινόμενο μέγεθός τους (το πόσο λαμπροί φαίνονται) και M το απόλυτο μέγεθός τους. Το απόλυτο μέγεθος ορίζεται να είναι το φαινόμενο μέγεθος σε απόσταση 10 parsec από τον παρατηρητή, όπου 1 parsec είναι η μονάδα μέτρησης της απόστασης d και ισούται με $3,26$ έτη φωτός $= 30,9 \cdot 10^{12} \text{ Km}$.

α) Για ποιες τιμές της απόστασης d το φαινόμενο μέγεθος ενός αστέρα είναι μικρότερο από το απόλυτο μέγεθός του; (Μονάδες 7)

β) Ένας αστέρας έχει φαινόμενο μέγεθος $m = 1,157$ και βρίσκεται σε απόσταση $d = 100$ parsec από έναν παρατηρητή. Ποιο είναι το απόλυτο μέγεθος αυτού του αστέρα; (Μονάδες 6)

γ) Να επιλύσετε την σχέση (I) ως προς d . (Μονάδες 7)

δ) Ο αστέρας Betelgeuse έχει φαινόμενο μέγεθος 0,46 και απόλυτο μέγεθος $-5,14$.

Ποια είναι η απόστασή του από τον παρατηρητή; Δίνεται ότι $\sqrt[25]{10^{53}} \cong 131$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 16001 (4°)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x \ln x}$ και $g(x) = \sqrt{\ln x}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους. (Μονάδες 4)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω.

(Μονάδες 5)

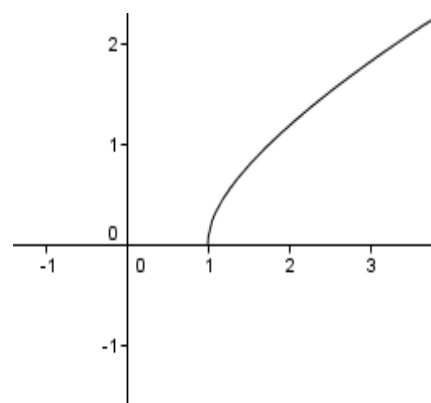
Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f .

γ) i) Να βρείτε τη μονοτονία της. (Μονάδες 4)

ii) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{5}{3}\right)$ και $f\left(\frac{7}{5}\right)$

(Μονάδες 5)

δ) Να σχεδιάσετε την ευθεία $y = 1 - x$ και να βρείτε γραφικά τη λύση της εξίσωσης $f(x) = 1 - x$. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 18865 (4ο)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (Μονάδες 3)

β) Να προσδιορίσετε το είδος της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f .
(Μονάδες 6)

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 6)

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $E(x) = \frac{1}{2}(x-1)\ln x$, με $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ μπορεί να περιγράψει το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου $A(1,0)$, $B(x,0)$ και $\Gamma(x,\ln x)$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 20857 (4ο)-Ε

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - ax^2 + 7x - \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x - 3$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 1)$ είναι $v = -16$, τότε:

α) Να υπολογισθούν οι τιμές των α, β . (Μονάδες 06)

Αν είναι $\alpha = 5$, $\beta = 3$,

β) να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 07)

γ) να λυθεί η ανίσωση $P(x) < 0$. (Μονάδες 06)

δ) Αν $P(\ln k) < 0$, τότε να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού k .
(Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 21445 (4ο)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \frac{4^x - 1}{2^x + 5}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \log 3 - \log 7$. (Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \log 3 - \log 7$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 21446 (4ο)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + x = 3\ln 2$. (Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + x \geq 3\ln 2$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 21447 (4ο)

Σε ένα πείραμα εργαστηρίου, ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο

$$P(t) = 200 \cdot e^{ct},$$

Όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος ($t = 0$). Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328. (Δίνεται ότι $\ln(1,64) \cong 0,5$ και $\ln 10 \cong 2,3$)

- α) Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα. (Μονάδες 7)
- β) Να αποδείξετε ότι $c = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 9)
- γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 21470 (4ο)

Μια ποσότητα Q ραδιενεργού υλικού (σε κιλά) θάβεται και με την πάροδο του χρόνου t (σε έτη), μειώνεται ακολουθώντας το νόμο της εκθετικής μεταβολής $Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$. Γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας και μετά από τέσσερα χρόνια έχει απομείνει 1 κιλό.

- α) Να δείξετε ότι $Q(t) = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$. (Μονάδες 10)
- β) Να βρείτε την αρχική ποσότητα που θάφτηκε (για $t = 0$). (Μονάδες 6)
- γ) Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 21474 (4ο)

Σε ένα ανοιχτό δοχείο υπάρχουν 10 λίτρα ενός υγρού. Το υγρό εξατμίζεται έτσι ώστε ο όγκος του να μειώνεται κατά 15% ανά εβδομάδα.

- α) Να βρείτε την ποσότητα του υγρού που υπάρχει στο δοχείο στο τέλος της 1^{ης} και στο τέλος της 2^{ης} εβδομάδας. (Μονάδες 8)
- β) Ο όγκος V του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη συνάρτηση $V(t) = V_0 \cdot \alpha^t$, όπου V_0 και α σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τους αριθμούς V_0 και α . (Μονάδες 8)

- γ) Αν ο όγκος του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη σχέση $V(t) = 10 \cdot (0,85)^t$, να βρείτε πότε ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής. (Δίνεται ότι: $\log(0,5) \approx -0,3$ και $\log(0,85) \approx -0,07$). (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 21674 (4°)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \sqrt{10^x - 2}$.

- α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = (\log 2, +\infty)$. (Μονάδες 07)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \log \sqrt{\frac{10^x}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$.

- i) Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{\frac{10^x}{3}} = \sqrt{10^x - 2}$ με $x \in (\log 2, +\infty)$. (Μονάδες 09)
- ii) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων, των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 21678 (4°)

Ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού λέμε τον χρόνο που απαιτείται για να διασπασθεί η μισή από την αρχική του ποσότητα, οπότε να απομείνει το 50% από αυτή. Αν Q_0 είναι η αρχική ποσότητα ενός ραδιενεργού υλικού, τότε η ποσότητα $Q(t)$ που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο $Q(t) = Q_0 e^{ct}$, όπου c είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το υλικό.

- α) Να αποδείξετε ότι ο χρόνος ημιζωής t' δίνεται από τον τύπο $t' = -\frac{\ln 2}{c}$. (Μονάδες 8)

Το ραδιοϊσότοπο του άνθρακα, άνθρακας -14 έχει χρόνο ημιζωής 5730 χρόνια.

- β) Να αποδείξετε ότι η ποσότητα του άνθρακα -14 που απομένει t χρόνια μετά, δίνεται από τον τύπο $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\ln 2}{5730}t}$ (Μονάδες 8)

- γ) Κατά την εξέταση ενός οστού που ανακάλυψαν οι παλαιοντολόγοι διαπιστώθηκε ότι έχει απομείνει σ' αυτό το 25% της ποσότητας του άνθρακα -14 που περιείχε αρχικά. Να βρείτε την ηλικία του οστού. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 21679 (4°)

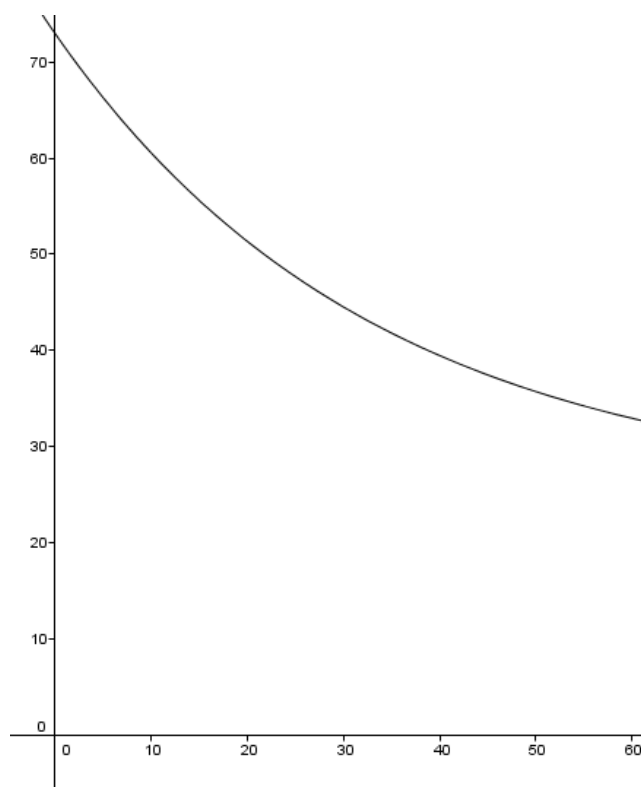
Ένα ζεστό ρόφημα τη στιγμή που σερβίρεται, σε θερμοκρασία του περιβάλλοντος που είναι $T_{\alpha} = 25^{\circ}\text{C}$, έχει θερμοκρασία $T_0 = 73^{\circ}\text{C}$. Η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από t λεπτά δίνεται, σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, από την συνάρτηση $T(t) = T_{\alpha} + ce^{-kt}$ όπου όπου c , k κατάλληλες σταθερές και $t \in [0, 60]$. Αν

είναι γνωστό ότι η θερμοκρασία του ροφήματος μετά από 10 λεπτά είναι 61°C , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $c = 48$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την σταθερά k . (Θεωρήστε $\ln 0,75 = -0,3$). (Μονάδες 8)

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T(t)$ φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



γ) Να βρείτε την θερμοκρασία του ροφήματος 40 λεπτά μετά το σερβίρισμα.

(Θεωρήστε $e^{-1,2} = 0,3$). (Μονάδες 5)

δ) Αν θεωρήσουμε ότι ο καταναλωτής έχει την αίσθηση του ζεστού όταν η θερμοκρασία του ροφήματος είναι μεγαλύτερη από 40°C , να αιτιολογήσετε, με βάση τη γραφική παράσταση και το αποτέλεσμα του ερωτήματος γ), γιατί πριν περάσουν 40 λεπτά ο καταναλωτής του ροφήματος έχει την αίσθηση ότι το ρόφημα δεν είναι πλέον ζεστό. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 21680 (4°)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x$, $x > 0$ και η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 2$.

- α) Να αποδείξετε ότι $f(2) + f(4) = \frac{1}{3}f(8)$. (Μονάδες 8)
- β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι από τον άξονα $x'x$ και πάνω. (Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε:
- i) Τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία. (Μονάδες 4)
- ii) Για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από την ευθεία. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 21950 (4°)

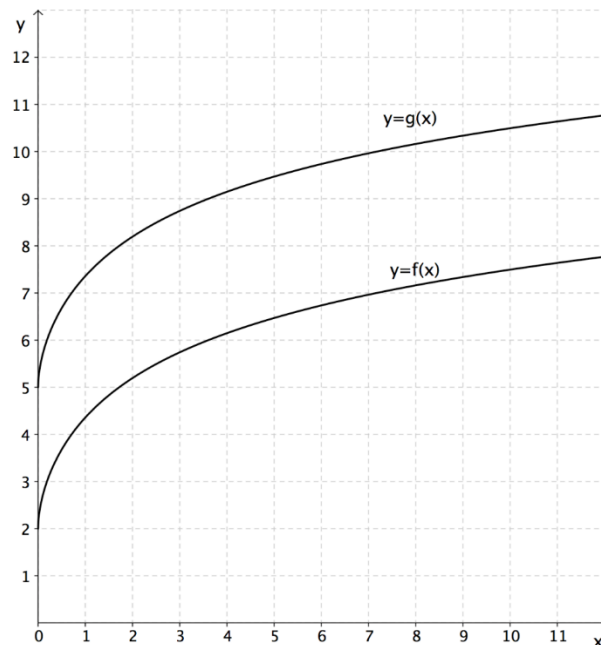
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12}$.

- α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0$ είναι το $(-6, 2) \cup (2, +\infty)$. (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{\ln 2\}$. (Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και του άξονα xh' (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 25463 (4°)

Ένας ερευνητής πραγματοποίησε μια στατιστική μελέτη για την μεταβολή του βάρους των Ελληνοπαίδων. Τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνονται στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, όπου παριστάνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g . Στον οριζόντιο άξονα $x'x$ καταγράφεται η ηλικία σε μήνες και στον κατακόρυφο άξονα $y'y$ το βάρος σε κιλά. Η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει τις ελάχιστες φυσιολογικές τιμές και η γραφική παράσταση της g τις μέγιστες φυσιολογικές τιμές που μπορεί να έχει ένα παιδί κατά την διάρκεια του πρώτου έτους της ηλικίας του. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f έχει τύπο

$f(x) = a\sqrt{\ln(x+1)} + \ln(x+1) + \beta$, $x \geq 0$, $a, \beta \in \mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0, 2)$ και $B(e^2 - 1, 2\sqrt{2} + 4)$ ενώ για την γραφική παράσταση της g , γνωρίζουμε ότι προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f μετατοπισμένη κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.



- α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 2$. Στην συνέχεια να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g . (Μονάδες 10)
- β) Να προσδιορίσετε γραφικά (κατά προσέγγιση) την ηλικία κατά την οποία η ελάχιστη φυσιολογική τιμή του βάρους ενός παιδιού είναι τα 5 κιλά. Στη συνέχεια, με αλγεβρικό τρόπο, να βρείτε με ακρίβεια την ηλικία. (Μονάδες 8)
- γ) Το βάρος ενός παιδιού στο τέλος του 12^ο μήνα βρέθηκε 13 κιλά. Πως θα το χαρακτηρίζατε: υπέρβαρο, φυσιολογικό ή λιποβαρές; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας με αλγεβρικό τρόπο. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 37476 (4^ο)

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Να αποδείξετε ότι

- α) το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x-1)$. (Μονάδες 6)
- β) $P(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 2)$. (Μονάδες 7)
- γ) $1 < \log 20 < 2$. (Μονάδες 6)
- δ) $P(\log 20) < 0$. (Μονάδες 6)