

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ – ΕΝΟΤΗΤΑ 1.4

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ 14666 (2°)

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -3)$ και $\vec{\beta} = (-2, -1)$ και ορίζουμε τα διανύσματα

$$\vec{u} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} \quad \text{και} \quad \vec{v} = 5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}.$$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$. (Μονάδες 9)

β) Αν $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$, να γράψετε το $\vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. (Μονάδες 9)

Αν τα $\vec{\beta}, \vec{w}, \vec{u}$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων K, Λ, και Μ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 15002 (2°)

Δίνονται τα σημεία $A(0,5)$ και $\Delta(4,5)$ και τα διανύσματα $\vec{AB} = (3, -3)$ και $\vec{AT} = (3,1)$.

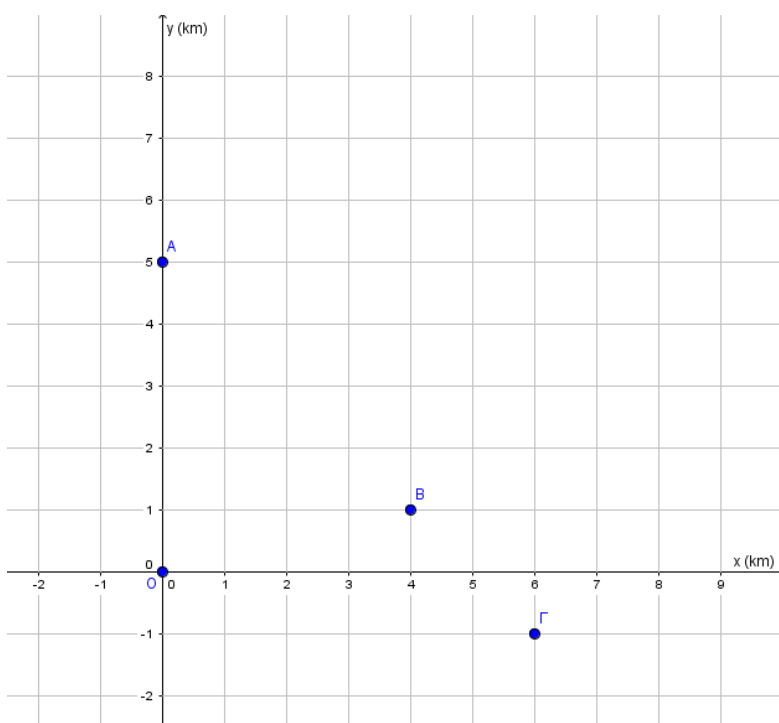
α) Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $\Gamma(3,6)$. (Μονάδες 11)

β) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{F\Delta}$. (Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι $\vec{AB} // \vec{F\Delta}$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 15043 (2°)

Ένα γραφείο μελετών έχει αναλάβει την αναμόρφωση μιας οικιστικής περιοχής, η οποία αποτυπώνεται σε τοπογραφικό σχέδιο με ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Τα σημεία $A(0,5), B(4,1)$ και $\Gamma(6, -1)$ παριστάνουν τη θέση τριών οικισμών στο χάρτη.



- α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BG}$. (Μονάδες 06)
- ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά και ως εκ τούτου υπάρχει η δυνατότητα να σχεδιασθεί ένας ευθύγραμμος δρόμος που να συνδέει τους τρεις οικισμούς. (Μονάδες 07)
- β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό A είναι διπλάσια από την απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό Γ . (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 15854 (2°)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 1)$ και $\vec{\beta} = (-8, -4)$.

- α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$. (Μονάδες 10)
- β) Να δείξετε ότι για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει $\vec{\beta} = -4\vec{\alpha}$. (Μονάδες 7)
- γ) Να αποδείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$ είναι τετραπλάσιο του διανύσματος $\vec{\alpha}$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 16147 (2°)

Δίνονται τα διανύσματα : $\vec{\alpha} = 3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}$, $\vec{\beta} = \sqrt{2}\vec{i}$, $\vec{\gamma} = -3\vec{j}$ και $\vec{\delta} = (-1, 1)$.

- α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης καθενός από τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\delta}$. (Μονάδες 9)
- β) Να γράψετε τη γωνία που σχηματίζει καθένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ με το θετικό ημιάξονα Ox . (Μονάδες 10)
- γ) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 16151 (2°)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, 3)$ και $\vec{\beta} = (-\sqrt{3}, 1)$.

- α) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσής των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ καθώς και τη γωνία που σχηματίζει καθένα από αυτά με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 16)
- β) Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 16579 (2°)

Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$ και $B(6, 7)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

- α) Να σχεδιάσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 7)
- β) Αν $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v}$. (Μονάδες 8)

- γ) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} = (-8, -12)$ και $\vec{v}$ του β) ερωτήματος είναι αντίρροπα (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 16580 (2°)

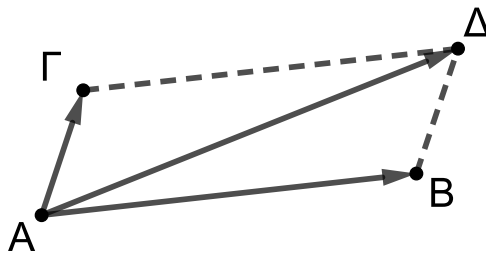
Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(2,4)$, $B(11,5)$, $\Gamma(3,7)$ και ένα σημείο Δ ώστε το $\overrightarrow{A\Delta}$ να είναι ίσο με το άθροισμα των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες:

- α) των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 12)
β) του διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$. (Μονάδες 8)
γ) του σημείου Δ . (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 16581 (2°)

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(-1,6)$, $B(1,2)$ και $\Gamma(3,-2)$.

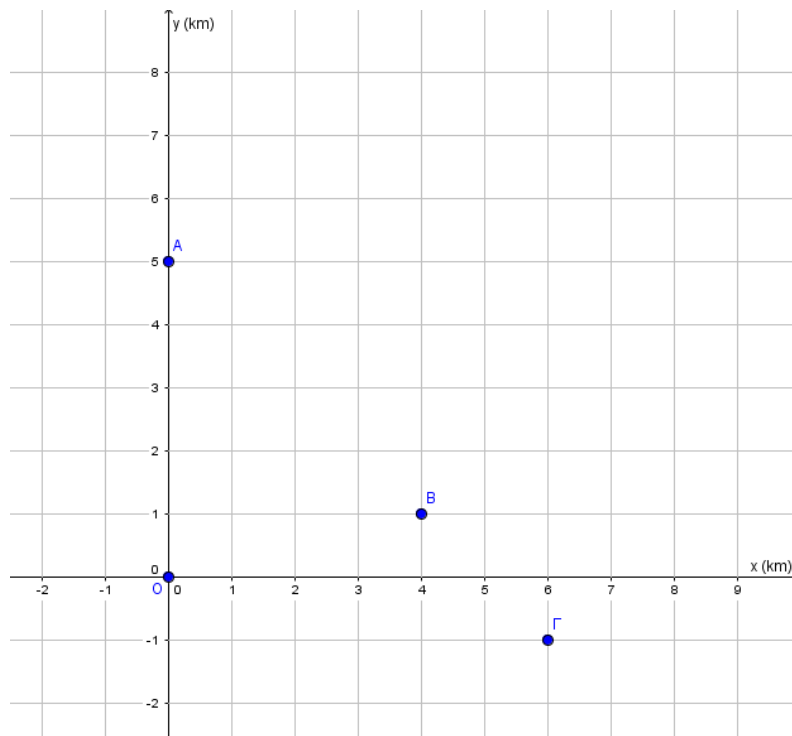
- α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$. (Μονάδες 12)
β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 6)
γ) Να αποδείξετε ότι το B είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος $A\Gamma$. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 17070 (2°)

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(3, 4)$, $B(2, 1)$, $\Gamma(3, -1)$ και $\Delta(4, 2)$.

- α) Να σχεδιάσετε τα παραπάνω σημεία A, B, Γ και Δ . (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$. (Μονάδες 9)
- γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)



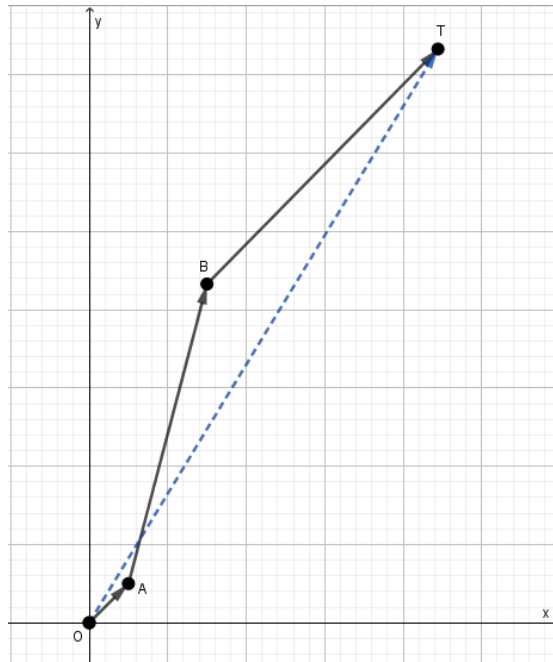
- α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$. (Μονάδες 06)
- ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά και ως εκ τούτου υπάρχει η δυνατότητα να σχεδιασθεί ένας ευθύγραμμος δρόμος που να συνδέει τους τρεις οικισμούς. (Μονάδες 07)
- β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό A είναι διπλάσια από την απόσταση του οικισμού B από τον οικισμό Γ . (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 18878 (2°)

Ένας εξερευνητής ξεκίνησε από την κατασκήνωσή του (σημείο O) τρεις μέρες πριν, για ένα ταξίδι μέσα στη ζούγκλα. Στο τέλος της πρώτης ημέρας έφθασε στο σημείο A , στο τέλος της δεύτερης ημέρας έφθασε στο σημείο B και στο τέλος της τρίτης ημέρας έφθασε στο σημείο T . Οι τρεις ημέρες του ταξιδιού του μπορούν να περιγραφούν από τα παρακάτω διανύσματα

$$\overrightarrow{OA} = (1, 1), \quad \overrightarrow{AB} = (2, 4), \quad \overrightarrow{BT} = (2, 5\sqrt{3} - 5),$$

όπως φαίνονται στο σχήμα:



Αν οι αποστάσεις εκφράζονται σε χιλιόμετρα, τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OT} = (5, 5\sqrt{3})$. (Μονάδες 13)
- β) Να υπολογίσετε την απόσταση (OT) του εξερευνητή από την κατασκήνωση στο τέλος της τρίτης ημέρας. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 19038 (2°)

Δίνεται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{b} = (-1, 1)$ και $\vec{\gamma} = (-5, -5)$.

- α) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{b}$ με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 9)
- β) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\gamma}| = 5|\vec{b}|$. (Μονάδες 8)
- Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς λ , μ ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να γραφεί στη μορφή $\vec{\gamma} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$. (Μονάδες 8)

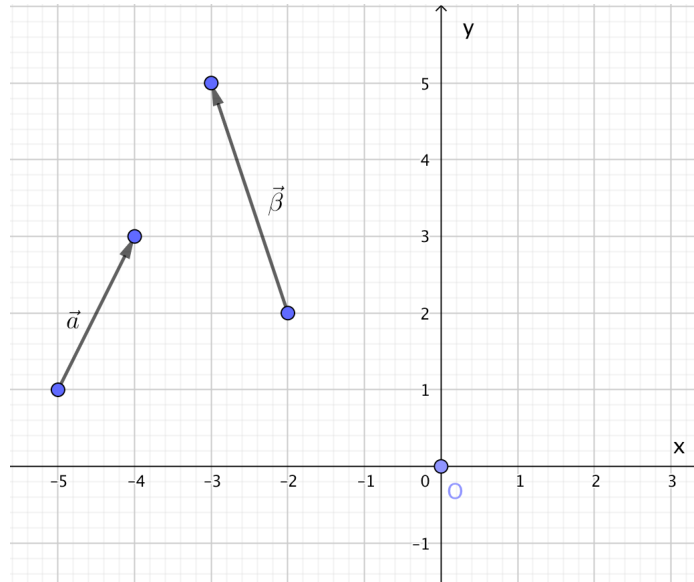
ΘΕΜΑ 20914 (2ο)

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$.

α) Να σημειώσετε πάνω στο σχήμα τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ όπου O η αρχή των αξόνων. (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ και $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 09)

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 08)

**ΘΕΜΑ 21681 (2°)**

Θεωρούμε τα σημεία $A(1, 2)$, $B(-3, 4)$, $\Gamma(2, 5)$.

α) Να βρείτε σημείο Δ ώστε $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 10)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το κέντρο O του παραλληλογράμμου. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 22038 (2°)

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{a} = (5, -12)$.

α) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ που να είναι ομόρροπο στο $\vec{a}$ και να έχει μέτρο 1. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ που να είναι αντίρροπο στο $\vec{a}$ και να έχει μέτρο 7. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 22044 (2°)

Δίνονται τα σημεία $A(0,0)$, $B(4,0)$ και $\Gamma(5,1)$.

- α) Να σχεδιάσετε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και να τοποθετήσετε σε αυτό τα σημεία A, B, Γ . (Μονάδες 10)
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός τέταρτου σημείου Δ έτσι ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 22052 (2°)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-2,5)$ και $\vec{\beta} = (1,-3)$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα. (Μονάδες 12)
- β) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (8,-21)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 22060 (2ο)

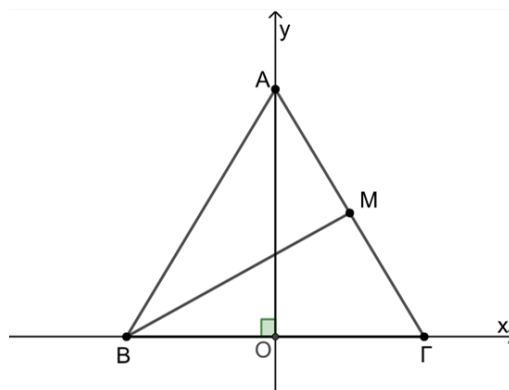
Δίνονται τα σημεία $A(0,2)$, $B(3,0)$, $\Gamma(6,2)$ και $\Delta(3,4)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{BA}$ και να επιβεβαιώσετε ότι: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BG}$. (Μονάδες 12)
- β) Να δείξετε ότι $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BG}|$. Ποιο είναι το σχήμα του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$; (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 22557 (2°)

Το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει βάση $B\Gamma$ και ύψος AO . Η κορυφή A είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Oy και οι κορυφές B και Γ είναι σημεία του άξονα $x'x$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Έστω $(B\Gamma)=12$, $(AO)=8$ και M το μέσο της πλευράς AG .

- α) Να αποδείξετε ότι:
- $A(0,8)$, $B(-6,0)$ και $\Gamma(6,0)$. (Μονάδες 9)
 - $M(3,4)$ (Μονάδες 9)
- γ) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου BM . (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 17076 (4°)

Δίνονται τα σημεία $A(-3, -1)$, $B(0, 3)$ και $M(x, y)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 6)
- β) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MB}$ και $\overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 6)
- γ) Να αποδείξετε ότι $|\overrightarrow{AM}| + |\overrightarrow{MB}| \geq 5$. (Μονάδες 6)
- δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει ζεύγος πραγματικών αριθμών (x, y) τέτοιο ώστε να ισχύει $\sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 4$.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 17077 (4°)

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy τα σημεία A και B έχουν διανύσματα θέσεως

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j} \text{ και } \overrightarrow{OB} = (\lambda + 1)\vec{i} + (\lambda + 3)\vec{j}, \text{ με } \lambda \in P.$$

- α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} = (\lambda - 1)\vec{i} + 3\vec{j}$. (Μονάδες 6)
- β) Να βρείτε την απόσταση των σημείων A και B ως συνάρτηση του λ . (Μονάδες 7)
- γ) Για ποιές τιμές του λ η απόσταση των σημείων A και B είναι ίση με 5; (Μονάδες 7)
- δ) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε η απόσταση των σημείων A και B να παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 20938 (4°)

Θεωρούμε τρίγωνο OAB , με $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = (6, 8)$. Για το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ γνωρίζουμε ότι

$$\vec{\alpha} = (|\vec{\alpha}| - 4, |\vec{\alpha}| - 2)$$

- α) Να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = 2$. (Μονάδες 10)
- β) Να βρείτε σημείο Γ έτσι, ώστε το τετράπλευρο $OAGB$ να αποτελεί παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 08)
- γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η πλευρά OA με τη διαγώνιο AB του παραλληλογράμμου $OAGB$. (Μονάδες 07)