

## ΦΥΛΛΟ 4

- Έστω τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  με  $|\vec{\alpha}|=4$ ,  $|\vec{\beta}|=\sqrt{2}$  και  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})=\frac{3\pi}{4}$ . Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα :  
 i)  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ ,                      ii)  $(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$
- Αν  $\vec{\alpha}=(-1, 2)$ ,  $\vec{\beta}=(2, 4)$  και  $\vec{\gamma}=(0, 5)$ , να λυθεί η εξίσωση  $(\vec{x}\vec{\alpha})\vec{\beta}=\vec{\gamma}+\vec{x}$ .
- Αν  $\vec{\alpha}=(2, 5)$  και  $\vec{\beta}=(4, -2)$ , να βρείτε διάνυσμα  $\vec{u}$ , ώστε  $\vec{u} \parallel \vec{\alpha}$  και  $\vec{u}\vec{\beta}=14$ .
- Αν ισχύουν  $|\vec{\alpha}|=10$ ,  $|\vec{\beta}|=4$  και  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})=120^\circ$ , να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\alpha}+4\vec{\beta}$ .
- Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  και  $\vec{\gamma}$  με  $\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}=\vec{0}$  και  $|\vec{\alpha}|=3$ ,  $|\vec{\beta}|=2$ ,  $|\vec{\gamma}|=1$ . Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $\vec{\alpha}\vec{\beta}-\vec{\alpha}\vec{\gamma}-\vec{\beta}\vec{\gamma}$ .
- Για δύο διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  ισχύουν  $|\vec{\alpha}|=2$ ,  $|\vec{\beta}|=\sqrt{6}$  και  $(4\vec{\alpha}-2\vec{\beta}) \perp (3\vec{\alpha}+4\vec{\beta})$ . Να δείξετε ότι  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ .
- Να υπολογίσετε το μέτρο των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  για τα οποία ισχύει  $(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha}-\vec{\beta})$ ,  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})=\frac{\pi}{3}$  και  $|2\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=7\sqrt{7}$ .
- Για τα διανύσματα  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  του επιπέδου ισχύουν  $|\vec{u}|=1$ ,  $\vec{u} \perp \vec{v}$  και  $(\vec{u}-3\vec{v}) \perp (2\vec{u}+\vec{v})$ . Να υπολογίσετε το  $|\vec{u}+2\vec{v}|$ .
- Αν  $|\vec{\alpha}|=4$ ,  $|\vec{\beta}|=\sqrt{3}$  και  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})=30^\circ$ , να βρεθεί το διάνυσμα  $\vec{x}$  για το οποίο είναι  $\vec{x} \parallel (\vec{\alpha}+\vec{\beta})$  και  $\vec{\beta} \perp (\vec{\alpha}-\vec{x})$ .
- Για τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  και  $\vec{\gamma}$  ισχύουν  $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$  και  $|\vec{\alpha}|=\frac{|\vec{\beta}|}{2}=\frac{|\vec{\gamma}|}{3}$ . Να αποδειχθεί ότι : i)  $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$       ii)  $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$
- Έστω  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  διανύσματα με  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})=60^\circ$ . Αν  $\vec{x}=4\vec{\alpha}+\vec{\beta}$  και  $\vec{y}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ , τότε :  
 i) Να αποδείξετε ότι τα  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  είναι μη μηδενικά.  
 ii) Αν επιπλέον  $|\vec{\alpha}|=1$  και  $|\vec{\beta}|=4$ , να βρείτε τη γωνία των  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ .

12. Αν είναι γνωστό ότι  $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + 6\vec{\gamma} = \vec{0}$  και  $|\vec{\alpha}| = 6$ ,  $|\vec{\beta}| = 3$ ,  $|\vec{\gamma}| = 1$ , να βρείτε τη γωνία  $(\vec{\beta}, \vec{\gamma})$ .
13. Έστω  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  διανύσματα του επιπέδου με  $|\vec{u}| = 2$ ,  $|\vec{v}| = 1$  και  $\vec{u} + 2\vec{v} \perp 3\vec{u} - 5\vec{v}$ . Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ .
14. Αν  $\vec{PA} + \vec{PB} - 2\vec{PG} = \vec{0}$  και  $|\vec{PA}| = 6$ ,  $|\vec{PB}| = |\vec{PG}| = 2\sqrt{3}$ , να αποδείξετε ότι :
- Τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.
  - Το σημείο Γ είναι ανάμεσα στα σημεία A, B.
  - $\hat{APB} = 90^\circ$ .
  - Το διάνυσμα  $\vec{v} = \vec{PB} + \vec{PG}$  είναι κάθετο στο  $\vec{AG}$ .
15. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και σημείο P του επιπέδου, τέτοιο ώστε  $\vec{AB} + \vec{AG} = 2\vec{AP}$ . Αν  $|\vec{AP}| = |\vec{PG}| = 10$  και  $|\vec{AB}| = 10\sqrt{3}$ , να δείξετε ότι :
- Τα σημεία B, Γ και P είναι συνευθειακά.
  - Το P είναι μέσον της BΓ.
  - $\hat{BAG} = 90^\circ$
  - $(\vec{BG}, \vec{AB}) = 150^\circ$
  - $\vec{BG} \perp (\vec{AP} + \vec{AG})$
16. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  με  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$  και  $|\vec{\alpha}| = 2$ ,  $|\vec{\beta}| = 5$ . Αν για ένα διάνυσμα  $\vec{\gamma}$  έχουμε  $|\vec{\gamma}| = 3$ ,  $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma}) = 30^\circ$  και  $(\vec{\beta}, \vec{\gamma}) = 60^\circ$ , να γράψετε το  $\vec{\gamma}$  ως γραμμικό συνδιασμό των  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ .
17. Να αναλύσετε το διάνυσμα  $\vec{v} = (4, 7)$  σε δύο συνιστώσες, μία παράλληλη και μια κάθετη προς το διάνυσμα  $\vec{\alpha} = (-1, 2)$ .
18. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  και  $\vec{w}$  με  $|\vec{u}| = |\vec{w}| = 1$  και  $|\vec{v}| = 3$  και  $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$ . Αν  $(\vec{u} + 2\vec{w}) \perp (5\vec{u} - 4\vec{w})$ , να αναλύσετε το διάνυσμα  $\vec{v}$  σε δύο μη μηδενικές συνιστώσες παράλληλες των διανυσμάτων  $\vec{u}$ ,  $\vec{w}$ .
19. Να αναλύσετε το διάνυσμα  $\vec{u} = (16, 12)$  σε δύο συνιστώσες, μία παράλληλη με το διάνυσμα  $\vec{\alpha} = (-4, 6)$  και μια παράλληλη με το  $\vec{\beta} = (6, 3)$ .
20. Δίνονται τα σημεία A(1, 1), B(3, λ+2) και Γ(λ<sup>2</sup>-2, 3). Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο στο A.
21. Δίνεται τρίγωνο με κορυφές τα σημεία A(1, 2), B(-1, -2) και Γ(-3, 4). Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η διάμεσος AM με την πλευρά AG.

22. Δίνεται το τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κορυφές  $A(6, 3)$ ,  $B(0, 1)$  και  $\Gamma(-4, 5)$ . Αν  $AD$  είναι το ύψος του τριγώνου, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $D$ .
23. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$  και  $\overrightarrow{A\Delta} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ . Αν  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2$  και  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ , να βρείτε τα μήκη των διαγωνίων του παραλληλογράμμου.
24. Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)$ ,  $|\overrightarrow{B\Gamma}| = 2\sqrt{3}$  και  $\hat{B} = 60^\circ$ . Να βρείτε το μέτρο της διαμέσου  $BM$  και τη γωνία  $\hat{A\hat{B}M}$ .
25. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $M$  για τα οποία ισχύει  $\overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BM}$ .
26. Έστω  $O$  και  $A$  δύο σταθερά σημεία με  $|\overrightarrow{OA}| = 3$ . Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$  του επιπέδου για τα οποία ισχύει  $\overrightarrow{OM}(\overrightarrow{OM} - 2\overrightarrow{OA}) = 7$ .