

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ - ΕΝΟΤΗΤΑ 2.3

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ – ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

«Το/τα θέμα/τα προέρχεται και αντλήθηκε/αν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-archiki-selida>)».

ΘΕΜΑ 15440 (2°)

Δίνονται τα σημεία $A(0,2)$, $B(3,0)$ και $\Gamma(1,1)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AG}$. (Μονάδες 9)
- β) i. Να εξετάσετε αν τα σημεία A , B και Γ ορίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 8)
- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 16194 (2°)

Δίνονται οι ευθείες $(\epsilon_1) : 8\chi + \psi - 28 = 0$, $(\epsilon_2) : \chi - \psi + 1 = 0$, $(\epsilon_3) : 3\chi + 4\psi + 5 = 0$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των (ϵ_1) και (ϵ_2) . (Μονάδες 09)
- β) Αν το σημείο τομής είναι το $M(3,4)$ να υπολογίσετε:
- i) Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$, όπου O η αρχή των αξόνων. (Μονάδες 08)
- ii) Την απόσταση του σημείου M από την ευθεία (ϵ_3) . (Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 16425 (2°)

Δίνονται οι ευθείες: $\epsilon_1: y = \frac{2}{3}x + 1$ και $\epsilon_2: x = \frac{3}{2}y + 9$.

- α) Να αποδείξετε ότι: $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$. (Μονάδες 12)
- β) Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ϵ_1 και ϵ_2 . (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 16759 (2°)

Δίνονται οι ευθείες (ϵ_1) , (ϵ_2) και (ϵ_3) με εξισώσεις $x - 2y = -1$, $2x + y = 4$ και

$y = -1$ αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) είναι κάθετες. (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) τέμνονται στο σημείο $A\left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right)$. (Μονάδες 9)
- γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ϵ_3) . (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 16769 (2°)

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές A(1,7), B(-1,5) και Γ(3,3).

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 09)

β) Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε να υπολογίσετε:

i) Τις συντεταγμένες του Μ.

ii) Την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ. (Μονάδες 16)

ΘΕΜΑ 16771 (2°)

Δίνονται τα σημεία A(2,1), Γ(4,-1) και το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = (3, -1)$.

α) Να βρεθεί το σημείο Β. (Μονάδες 09)

β) Αν B(5,0):

i) Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 08)

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 16774 (2°)

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία A(2,5), B(3,6) και Γ(-1,-2).

α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΒΓ. (Μονάδες 07)

β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους που άγεται από το Α. (Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία ΑΒ με τον άξονα x'x. (Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 16810 (2°)

Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τα σημεία A(1,1), B(5,2), Γ(0,-2) και Δ(8,0).

α) Να τοποθετήσετε τα παραπάνω σημεία του επιπέδου σε ένα πρόχειρο σχήμα και να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία αυτά είναι τραπέζιο.

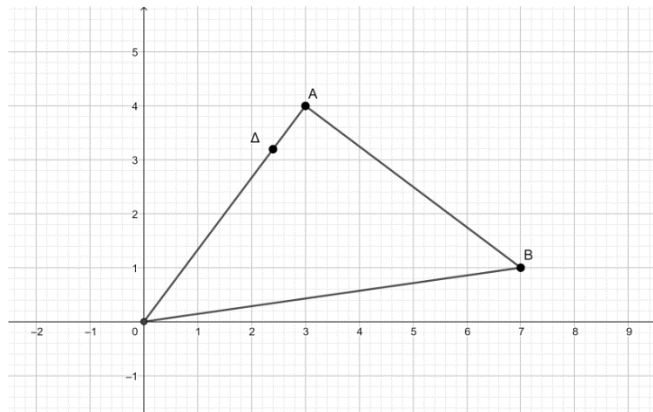
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραpezίου του ερωτήματος α). (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 17805 (2°)

Δίνεται το τρίγωνο AOB με $A(3,4)$, $B(7,1)$, O η αρχή των αξόνων και το σημείο

$\Delta\left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)$ της πλευράς AO .



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{AD}$. (Μονάδες 7)

β) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}$. (Μονάδες 9)

γ) Δίνεται ότι $(OAB) = \frac{25}{2}$ τετραγωνικές μονάδες. Να δείξετε ότι $(ADB) = \frac{1}{5}(OAB)$ (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 18240 (2°)

Δίνεται το σημείο $A(1,2)$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = x + 3$.

α) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε) . (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην (ε) . (Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων τις ευθείες (η) , (ε) . (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 18733 (2°)

Δίνονται τα σημεία $A(4,3)$, $B(1,1)$ και $\Gamma(6,0)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$ είναι κάθετα. (Μονάδες 8)

γ) Δίνεται το σημείο $M\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Να δείξετε ότι $(MA) = (MB)$ (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 18979 (2°)

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x + 3y = 5$ και $\varepsilon_2: 4x + 6y = 8$.

- α) Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες. (Μονάδες 10)
- β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(1,1)$ είναι σημείο της ευθείας ε_1 . (Μονάδες 5)
- γ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε_2 . (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 20864 (2°)

Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: 2x + y - 6 = 0$ και $\varepsilon_2: 2x + y + 2 = 0$.

- α) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. (Μονάδες 12)
- β) i. Να δείξετε ότι το σημείο $A(0,6)$ ανήκει στην ευθεία ε_1 . (Μονάδες 5)
- ii. Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2 . (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 20885 (2°)

Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $A(-3, -1)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε . (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου, που σχηματίζει η ευθεία ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$, είναι: $E = 8$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 20926 (2°)

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x - 2y = 1$ και τα σημεία $A(0,2)$, $B(1,0)$.

- α) Να αποδείξετε ότι το σημείο B ανήκει στην ευθεία ε ενώ το σημείο A δεν είναι σημείο της ε . (Μονάδες 08)
- β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε . (Μονάδες 08)
- γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του A από το B και να αποδείξετε ότι η προβολή του A στην ευθεία ε είναι το B . (Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 21260 (2°)

Δίνεται η ευθεία (ε): $y - 2x = 0$ και τα σημεία $B(1,1)$ και $\Gamma(-1,3)$.

- α) Να δείξετε ότι το σημείο $A(5,10)$ ανήκει στην ευθεία (ε). (Μονάδες 5)
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 10)
- γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 15152 (3°)

Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(-2,2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + y + \alpha = 0$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου A από το σημείο B . (Μονάδες 5)
- β) Για ποιες τιμές του α , η απόσταση AB είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε . (Μονάδες 8)
- γ) Για $\alpha = 4$ να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 14984 (4°)

Θεωρούμε τα σημεία $A(-2, -3)$ και $B(7, 9)$. Έστω S το σύνολο των σημείων M που είναι κορυφές των τριγώνων AMB ώστε $(AMB) = 12$ τ.μ.

- α) Να αποδείξετε ότι το S αποτελείται από τα σημεία των παραλλήλων ευθειών $(\varepsilon_1): 4x - 3y - 9 = 0$ και $(\varepsilon_2): 4x - 3y + 7 = 0$. (Μονάδες 9)
- β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB είναι η μεσοπαράλληλη των (ε_1) και (ε_2) . (Μονάδες 9)
- γ) Θεωρούμε ένα σημείο M_1 στην (ε_1) και ένα σημείο M_2 στην (ε_2) ώστε να σχηματίζεται το τετράπλευρο AM_1BM_2 . Πόσο είναι το εμβαδόν του; Πόσα τετράπλευρα $AXBY$ υπάρχουν, αν το X πρέπει να είναι σημείο της (ε_1) και το Y σημείο της (ε_2) , που έχουν το ίδιο εμβαδό με το AM_1BM_2 ; Εξηγήστε. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 15194 (4°)

Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1,1)$, $B(4,4)$ και $\Gamma(3,1)$.

- α) Να δείξετε ότι τα σημεία αυτά σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 7)
- β) Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$ είναι η ευθεία $(\varepsilon): y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$. (Μονάδες 9)
- γ) Να βρείτε σημείο K της ευθείας (ε) του β) ερωτήματος τέτοιο ώστε $(KA) = (KB)$. Τι ιδιότητα έχει το σημείο K ; (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 15273 (4°)

Θεωρούμε τα σταθερά σημεία $A(3,4)$, $B(2,5)$ και $\Gamma(-2,2)$ και το μεταβλητό σημείο $M(4\alpha - 1, 3\alpha + 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα A , B , Γ σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 5)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$. (Μονάδες 5)
- γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία M κινούνται στην ευθεία που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην $B\Gamma$. (Μονάδες 7)
- δ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του σημείου M ισχύει $(MB\Gamma) = (AB\Gamma)$. Πως αιτιολογείται αυτό γεωμετρικά; (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 15380 (4°)

Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(-2,2)$ και η ευθεία $\epsilon: 3x + y + \alpha = 0$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε για ποια τιμή του α , η απόσταση του σημείου A από το σημείο B είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ϵ . (Μονάδες 8)
- β) Για $\alpha = 4$,
 - i) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ϵ με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 8)
 - ii) Να βρείτε το σημείο της ευθείας ϵ που απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 15433 (4°)

Δύο οικισμοί A και B βρίσκονται στις θέσεις που ορίζουν τα σημεία $A(-1, -2)$ και $B(3,1)$. Εξωτερικά των οικισμών υπάρχει ευθύγραμμος δρόμος με εξίσωση

$$\delta: x + y - 1 = 0.$$

- α) Να βρείτε σε ποια θέση του δρόμου δ :
 - i) Ο οικισμός A έχει τη μικρότερη απόσταση από τον δρόμο. (Μονάδες 8)
 - ii) Υπάρχει το Κέντρο Υγείας της περιοχής, αν είναι γνωστό ότι ισαπέχει από τους δύο οικισμούς. (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε τη θέση Γ ενός αυτοκινήτου πάνω στο δρόμο, αν είναι γνωστό, ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν τα τρία σημεία A , B και Γ είναι ίσο με 8. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 15681 (4°)

Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(\alpha,0)$, $B(\frac{\alpha}{2},\beta)$ και $M(\frac{\alpha}{2},0)$, όπου α,β σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

- α) Να μεταφέρετε τα παραπάνω σημεία σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Κατόπιν, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές και το σημείο M είναι το μέσο της βάσης του OA . (Μονάδες 6)
- β) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των ευθειών OB και AB είναι $OB: 2\beta x - \alpha y = 0$ και $AB: 2\beta x + \alpha y - 2\alpha\beta = 0$ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)
- γ) Αν d_1 είναι η απόσταση του σημείου M από την ευθεία OB και d_2 η απόσταση του σημείου M από την ευθεία AB , να αποδείξετε ότι $d_1 = d_2$. (Μονάδες 8)
- δ) Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί; (Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 15692 (4°)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + y = x + 2xy + 6$.

- α) Να αποδείξετε ότι:
- i) $(x-y)^2 - (x-y) - 6 = 0$. (Μονάδες 4)
- ii) Η εξίσωση παριστάνει ένα ζεύγος παράλληλων ευθειών, τις οποίες να βρείτε. (Μονάδες 4)
- Έστω $\varepsilon_1: x - y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2: x - y + 2 = 0$ οι δυο παράλληλες ευθείες.
- β) Να αποδείξετε ότι όλα τα σημεία $M\left(\alpha, \alpha - \frac{1}{2}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ισαπέχουν από τις δυο ευθείες. (Μονάδες 10)
- γ) Να βρείτε την μεσοπαράλληλη των δυο ευθειών. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 15987 (4°)

Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$ και $B(2,3)$

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας AB είναι η $(\varepsilon): y = 2x - 1$. (Μονάδες 8)
- β) Να αιτιολογήσετε αν το σημείο $\Gamma(2^{100}, 5)$ ανήκει ή όχι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία (ε) και την αρχή των αξόνων $O(0,0)$. (Μονάδες 8)
- γ) Να αιτιολογήσετε αν το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το εμβαδόν του τριγώνου AOB . (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 16057 (4°)

Δίνονται τα σημεία $A(2,0)$, $B(3,4)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) i) Να βρείτε την εξίσωση που περιγράφει όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο A και έχουν κλίση λ . (Μονάδες 5)
- ii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο A , έχει κλίση λ και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο B , έχει εξίσωση (ε) : $15x - 8y - 30 = 0$. (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει και άλλη ευθεία (ζ) , εκτός από την (ε) , η οποία διέρχεται από το σημείο A και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο B . (Μονάδες 5)
- γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ) . (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 17694 (4°)

Στο χάρτη μίας πεδινής περιοχής, που είναι εφοδιασμένος με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, δύο κωμοπόλεις A και B έχουν συντεταγμένες $A(3,6)$ και $B(7,-2)$.

- α) Ανάμεσα στις δύο κωμοπόλεις, θα κατασκευαστεί ευθεία σιδηροδρομική γραμμή, κάθε σημείο της οποίας θα ισαπέχει από αυτές. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή. (Μονάδες 12)
- β) Πάνω στην σιδηροδρομική γραμμή θα κατασκευαστεί σταθμός Σ , ώστε το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από τα σημεία A , B και Σ να ισούται με 20 τετραγωνικές μονάδες. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σταθμού Σ στο χάρτη. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 17695 (4°)

Υποθέτουμε, ότι σε ένα επίπεδο που έχουμε εφοδιάσει με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, κινούνται δύο σημεία A και B . Κάθε χρονική στιγμή t με $t \geq 0$ η θέση του πρώτου σημείου είναι $A(t-1, 2t-1)$ και του δεύτερου $B(3t-1, -4t-1)$.

- α) Να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο σημεία. (Μονάδες 8)
- β) Υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία τα δύο σημεία ταυτίζονται; (Μονάδες 7)
- γ) Να υπολογιστεί η απόσταση των δύο σημείων την χρονική στιγμή $t=2$. (Μονάδες 5)
- δ) Να βρεθεί η χρονική στιγμή t κατά την οποία η απόσταση του σημείου A από την ευθεία $\varepsilon: 4x+3y+7=0$ ισούται με 6. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 18732 (4^ο)

Σε σύστημα αξόνων δίνονται τα σημεία $A(3,4)$ και $B(7,1)$.



α) Αν $\Gamma\left(2, \frac{8}{3}\right)$ και $\Delta\left(\frac{13}{3}, 3\right)$ να δείξετε ότι:

i. $\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AO}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ (Μονάδες 6)

ii. $\Gamma\Delta \parallel OB$. (Μονάδες 5)

iii. Να δείξετε ότι $(A\Gamma\Delta) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 (AOB)$. (Μονάδες 5)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του α) ερωτήματος, αν για τα σημεία Γ και Δ ισχύουν

$\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{1}{\nu}\overrightarrow{AO}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{\nu}\overrightarrow{AB}$, να δείξετε ότι $(A\Gamma\Delta) = \left(\frac{1}{\nu}\right)^2 (ABO)$ (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 20655 (4^ο)

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $B(3,-1)$ και $\Gamma(-2,0)$.

α) i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ δεν είναι συνευθειακά. (Μονάδες 07)

ii) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ ισούται με $\frac{9}{2}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 03)

β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $\Delta(x,y)$ για τα οποία ισχύει $(\Delta A\Gamma) = (AB\Gamma)$ (Μονάδες 07)

γ) Αν ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Δ του ερωτήματος (β) αποτελείται από τις ευθείες

$$\varepsilon_1 : x - 4y - 7 = 0 \text{ και } \varepsilon_2 : x - 4y + 11 = 0, \text{ τότε:}$$

i) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $ΑΓ$, ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. (Μονάδες 03)

ii) Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός « οι ευθείες

$$x - 4y - 7 = 0 \text{ και } x - 4y + 11 = 0 \text{ έχουν ως μεσοπαράλληλο την ευθεία } ΑΓ ».$$

(Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 20724 (4°)

Η ευθεία ε με εξίσωση $x + y - 1 = 0$ του παρακάτω σχήματος, αναπαριστά τη γραμμή ενός σιδηροδρομικού δικτύου που εξυπηρετεί τους κατοίκους δύο πόλεων $A(8,1)$, $B(-7,4)$ (για την ακρίβεια A , B είναι τα κεντρικά σημεία των πόλεων από τα οποία μετράμε αποστάσεις). Για το λόγο αυτό θα κατασκευαστεί κατά μήκος της γραμμής (ε), ένας σταθμός σε ένα σημείο Σ και μία πεζογέφυρα σε ένα σημείο Π . Να βρείτε :

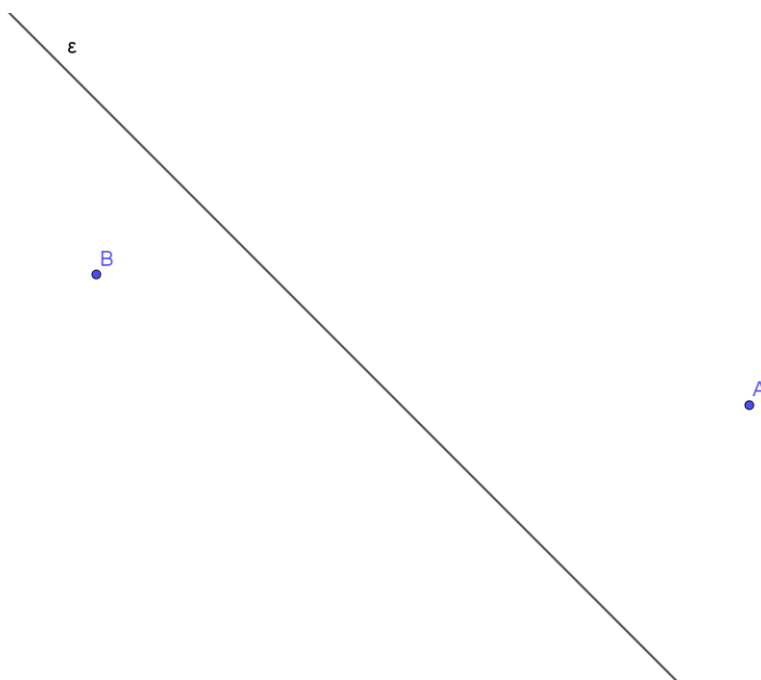
α) ποια πόλη από τις A , B είναι πλησιέστερα στη γραμμή του τραίνου. (Μονάδες 6)

β) τις συντεταγμένες του Π , αν είναι γνωστό ότι θα κατασκευαστεί στο πλησιέστερο σημείο της γραμμής στην πόλη B . (Μονάδες 7)

γ) τις συντεταγμένες του Σ στις παρακάτω περιπτώσεις

i) ο σταθμός Σ να ισαπέχει από τις πόλεις A , B . (Μονάδες 6)

ii) το οδικό δίκτυο που θα συνδέει το σταθμό Σ με τις πόλεις A , B να έχει το μικρότερο δυνατό μήκος. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 20728 (4°)

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ και $\varepsilon_2: y = x$.

α) Να σχεδιάσετε τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια με τον άξονα x' . (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB , όπου $O(0,0), A(3,\sqrt{3}), B(3,3)$. (Μονάδες 6)

δ) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$. (Μονάδες 7)

(Θυμίζουμε ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου δίνεται από το ημιγινόμενο δύο πλευρών του επί το ημίτονο της περιεχόμενης γωνίας τους).

ΘΕΜΑ 20861 (4°)

Δίνεται το σημείο $M(-2, 2)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (ε) που διέρχονται από το σημείο M . (Μονάδες 06)

β) i) Να βρείτε ποιες από τις παραπάνω εξισώσεις ευθειών σχηματίζουν τρίγωνο με τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy . (Μονάδες 04)

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_1), η οποία διέρχεται από το σημείο M και σχηματίζει με τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy τρίγωνο, με εμβαδόν $E = 8$. (Μονάδες 10)

γ) Αν (ε_1): $y = x + 4$, να βρείτε το μήκος του ύψους του ορθογωνίου τριγώνου, που σχηματίζει η (ε_1) με τους άξονες, το οποίο φέρεται από την κορυφή O . (Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 20979 (4°)

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy είναι τοποθετημένα 7 χωριά ως σημεία του επιπέδου και μια πηγή νερού σε ένα σημείο Π . Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν 6 αγωγοί νερού που συνδέουν την πηγή με έξι από τα παραπάνω χωριά. Οι αγωγοί αυτοί ανήκουν στις γραμμές με εξισώσεις της μορφής:

$$(\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y + 2 = 0, \text{ με } \lambda \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

α) Να αποδείξετε ότι και οι 6 γραμμές είναι ευθείες. (Μονάδες 04)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Π . (Μονάδες 06)

γ) Το έβδομο χωριό βρίσκεται στο σημείο $O(0,0)$. Να αποδείξετε ότι κανένας από τους παραπάνω αγωγούς νερού δεν διέρχεται από το χωριό αυτό. (Μονάδες 04)

δ) Προκειμένου να έχει πρόσβαση στο νερό το χωριό O , υπάρχουν δύο επιλογές:

1^η επιλογή: Να συνδέσουμε απευθείας το χωριό O με την πηγή

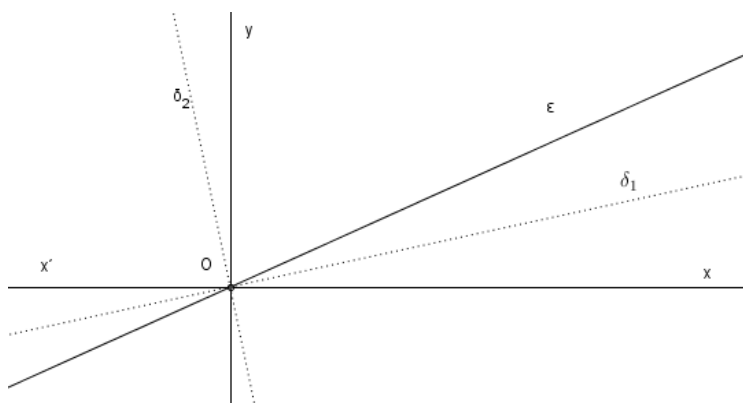
2^η επιλογή: Να συνδέσουμε το χωριό O με έναν από τους παραπάνω αγωγούς μέσω της συντομότερης διαδρομής.

Με δεδομένο ότι το κόστος κατασκευής ανά μονάδα μήκους για κάθε μία από τις παραπάνω επιλογές είναι το ίδιο,

- i) να βρείτε την τιμή του λ για την οποία οι δύο επιλογές οδηγούν στο ίδιο κόστος κατασκευής. (Μονάδες 08)
- ii) Πως εξηγείται γεωμετρικά το συμπέρασμα; (Μονάδες 03)

ΘΕΜΑ 22067 (4°)

Θεωρούμε μία ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x$ με θετική κλίση λ .



- α) Αν δ_1 είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον $x'x$ άξονα, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση της διχοτόμου δ_1 είναι $y = \lambda_1 x$ με $\lambda_1 = \frac{\lambda}{1 + \sqrt{1 + \lambda^2}}$. (Μονάδες 12)
- β) Αν δ_2 είναι η διχοτόμος της αμβλείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον $x'x$ άξονα, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση της διχοτόμου δ_2 είναι: $y = \lambda_2 x$ με $\lambda_2 = \frac{\lambda}{1 - \sqrt{1 + \lambda^2}}$. (Μονάδες 7)
- γ) Αν $\lambda = 1$, να εφαρμόσετε τους τύπους του α) ερωτήματος για να αποδείξετε ότι:

$$\varepsilon\varphi 22,5^\circ = \sqrt{2} - 1. \quad (\text{Μονάδες } 6)$$

ΘΕΜΑ 22073 (4°)

Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο $\Lambda(2,6)$ και η θέση ενός πλοίου με το σημείο $\Pi(\lambda-1, 2+\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) i. Αν το πλοίο κινείται ευθύγραμμα, να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του. (Μονάδες 07)
- ii. Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι. (Μονάδες 05)
- β) Αν τελικά το πλοίο δεν περάσει από το λιμάνι, να βρείτε:
 - i. Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση του πλοίου από το λιμάνι; (Μονάδες 06)
 - ii. Το σημείο του καρτεσιανού επιπέδου που βρίσκεται το πλοίο, όταν απέχει την ελάχιστη απόσταση από το λιμάνι. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 22062 (4°)

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία A(-2, 1), B(1, 5) και Γ(5, -1).

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας BΓ. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του τριγώνου από την κορυφή Α. Στη συνέχεια να βρείτε το σημείο Δ της ευθείας BΓ, από το οποίο, το Α απέχει την ελάχιστη απόσταση.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$$(MAB) = \frac{1}{2} (AB\Gamma) \quad (\text{Μονάδες 7})$$

ΘΕΜΑ 22266 (4°)

Δίνεται η εξίσωση $(2\lambda+1)x - (\lambda-2)y + \lambda - 7 = 0$ (Ε) με $\lambda \in \mathbb{R}$ και η ευθεία (ζ) με εξίσωση:

$$6x - 8y + 3 = 0.$$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (Ε) παριστάνει ευθεία. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (Ε), για τα διάφορα $\lambda \in \mathbb{R}$, διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε ευθεία (ε) που ορίζεται από την εξίσωση (Ε) να είναι παράλληλη στη ευθεία (ζ). Ποια είναι η εξίσωση της (ε); (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Μ(1,3) από την ευθεία (ζ). (Μονάδες 5)