

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ - ΕΝΟΤΗΤΑ 2.3

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ – ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

«Το/τα θέμα/τα προέρχεται και αντλήθηκε/αν από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)».

ΘΕΜΑ 15440 (2°)

Δίνονται τα σημεία $A(0,2)$, $B(3,0)$ και $\Gamma(1,1)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AT}$. (Μονάδες 9)
- β) i. Να εξετάσετε αν τα σημεία A , B και Γ ορίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 8)
- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 16194 (2°)

Δίνονται οι ευθείες $(\epsilon_1) : 8\chi + \psi - 28 = 0$, $(\epsilon_2) : \chi - \psi + 1 = 0$, $(\epsilon_3) : 3\chi + 4\psi + 5 = 0$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των (ϵ_1) και (ϵ_2) . (Μονάδες 09)
- β) Αν το σημείο τομής είναι το $M(3,4)$ να υπολογίσετε:
- i) Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OM}$, όπου O η αρχή των αξόνων. (Μονάδες 08)
- ii) Την απόσταση του σημείου M από την ευθεία (ϵ_3) . (Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 16425 (2°)

Δίνονται οι ευθείες: $\epsilon_1: y = \frac{2}{3}x + 1$ και $\epsilon_2: x = \frac{3}{2}y + 9$.

- α) Να αποδείξετε ότι: $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$. (Μονάδες 12)
- β) Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ϵ_1 και ϵ_2 . (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 16759 (2°)

Δίνονται οι ευθείες (ϵ_1) , (ϵ_2) και (ϵ_3) με εξισώσεις $x - 2y = -1$, $2x + y = 4$ και $y = -1$ αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) είναι κάθετες. (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) τέμνονται στο σημείο $A\left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}\right)$. (Μονάδες 9)
- γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ϵ_3) . (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 16769 (2°)

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές A(1,7), B(-1,5) και Γ(3,3).

- α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 09)
- β) Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε να υπολογίσετε:
- i) Τις συντεταγμένες του Μ.
- ii) Την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ. (Μονάδες 16)

ΘΕΜΑ 16771 (2°)

Δίνονται τα σημεία A(2,1), Γ(4,-1) και το διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = (3, -1)$.

- α) Να βρεθεί το σημείο Β. (Μονάδες 09)
- β) Αν B(5,0):
- i) Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 08)
- ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 16774 (2°)

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία A(2,5), B(3,6) και Γ(-1,-2).

- α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΒΓ. (Μονάδες 07)
- β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους που άγεται από το Α. (Μονάδες 09)
- γ) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία ΑΒ με τον άξονα x'x. (Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 16810 (2°)

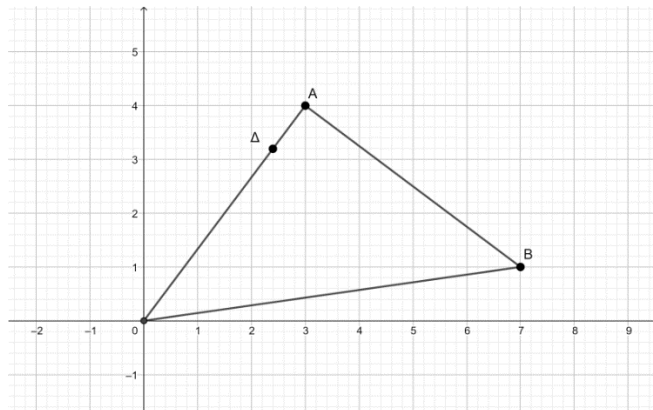
Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τα σημεία A(1,1), B(5,2), Γ(0,-2) και Δ(8,0).

- α) Να τοποθετήσετε τα παραπάνω σημεία του επιπέδου σε ένα πρόχειρο σχήμα και να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία αυτά είναι τραπέζιο. (Μονάδες 10)
- β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραpezίου του ερωτήματος α). (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 17805 (2°)

Δίνεται το τρίγωνο AOB με $A(3,4)$, $B(7,1)$, O η αρχή των αξόνων και το σημείο

$\Delta\left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)$ της πλευράς AO .



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$. (Μονάδες 7)

β) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}$. (Μονάδες 9)

γ) Δίνεται ότι $(OAB) = \frac{25}{2}$ τετραγωνικές μονάδες. Να δείξετε ότι $(A\Delta B) = \frac{1}{5}(OAB)$ (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 18240 (2°)

Δίνεται το σημείο $A(1,2)$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = x + 3$.

α) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε) . (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (η) που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην (ε) . (Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων τις ευθείες (η) , (ε) . (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 18733 (2°)

Δίνονται τα σημεία $A(4,3)$, $B(1,1)$ και $\Gamma(6,0)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα. (Μονάδες 8)

γ) Δίνεται το σημείο $M\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Να δείξετε ότι $(MA) = (MB)$ (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 18979 (2°)

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x + 3y = 5$ και $\varepsilon_2: 4x + 6y = 8$.

- α) Να δείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες. (Μονάδες 10)
- β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(1,1)$ είναι σημείο της ευθείας ε_1 . (Μονάδες 5)
- γ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε_2 . (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 20864 (2°)

Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: 2x + y - 6 = 0$ και $\varepsilon_2: 2x + y + 2 = 0$.

- α) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. (Μονάδες 12)
- β) i. Να δείξετε ότι το σημείο $A(0,6)$ ανήκει στην ευθεία ε_1 . (Μονάδες 5)
- ii. Να υπολογίσετε την απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2 . (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 20885 (2°)

Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $A(-3, -1)$ και σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{3\pi}{4}$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε . (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου, που σχηματίζει η ευθεία ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$, είναι: $E = 8$. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 20926 (2°)

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x - 2y = 1$ και τα σημεία $A(0,2)$, $B(1,0)$.

- α) Να αποδείξετε ότι το σημείο B ανήκει στην ευθεία ε ενώ το σημείο A δεν είναι σημείο της ε . (Μονάδες 08)
- β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε . (Μονάδες 08)
- γ) Να υπολογίσετε την απόσταση του A από το B και να αποδείξετε ότι η προβολή του A στην ευθεία ε είναι το B . (Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 21260 (2°)

Δίνεται η ευθεία (ε): $y - 2x = 0$ και τα σημεία $B(1,1)$ και $\Gamma(-1,3)$.

- α) Να δείξετε ότι το σημείο $A(5,10)$ ανήκει στην ευθεία (ε). (Μονάδες 5)
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$. (Μονάδες 10)
- γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $\hat{A}B\Gamma$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 15152 (3°)

Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(-2,2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + y + \alpha = 0$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου A από το σημείο B . (Μονάδες 5)
- β) Για ποιες τιμές του α , η απόσταση AB είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ε . (Μονάδες 8)
- γ) Για $\alpha = 4$ να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 14984 (4°)

Θεωρούμε τα σημεία $A(-2, -3)$ και $B(7, 9)$. Έστω S το σύνολο των σημείων M που είναι κορυφές των τριγώνων AMB ώστε $(AMB) = 12$ τ.μ.

- α) Να αποδείξετε ότι το S αποτελείται από τα σημεία των παραλλήλων ευθειών $(\varepsilon_1): 4x - 3y - 9 = 0$ και $(\varepsilon_2): 4x - 3y + 7 = 0$. (Μονάδες 9)
- β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB είναι η μεσοπαράλληλη των (ε_1) και (ε_2) . (Μονάδες 9)
- γ) Θεωρούμε ένα σημείο M_1 στην (ε_1) και ένα σημείο M_2 στην (ε_2) ώστε να σχηματίζεται το τετράπλευρο AM_1BM_2 . Πόσο είναι το εμβαδόν του; Πόσα τετράπλευρα $AXBY$ υπάρχουν, αν το X πρέπει να είναι σημείο της (ε_1) και το Y σημείο της (ε_2) , που έχουν το ίδιο εμβαδό με το AM_1BM_2 ; Εξηγήστε. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 15194 (4°)

Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1,1)$, $B(4,4)$ και $\Gamma(3,1)$.

- α) Να δείξετε ότι τα σημεία αυτά σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 7)
- β) Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος του τμήματος $B\Gamma$ είναι η ευθεία $(\varepsilon): y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$. (Μονάδες 9)
- γ) Να βρείτε σημείο K της ευθείας (ε) του β) ερωτήματος τέτοιο ώστε $(KA) = (KB)$. Τι ιδιότητα έχει το σημείο K ; (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 15273 (4°)

Θεωρούμε τα σταθερά σημεία $A(3,4)$, $B(2,5)$ και $\Gamma(-2,2)$ και το μεταβλητό σημείο $M(4\alpha - 1, 3\alpha + 1)$, $\alpha \in \Gamma$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα A , B , Γ σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 5)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$. (Μονάδες 5)
- γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία M κινούνται στην ευθεία που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην $B\Gamma$. (Μονάδες 7)
- δ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του σημείου M ισχύει $(MB\Gamma) = (AB\Gamma)$. Πως αιτιολογείται αυτό γεωμετρικά; (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 15380 (4°)

Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(-2,2)$ και η ευθεία $\epsilon: 3x + y + \alpha = 0$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε για ποια τιμή του α , η απόσταση του σημείου A από το σημείο B είναι ίση με την απόσταση του σημείου A από την ευθεία ϵ . (Μονάδες 8)
- β) Για $\alpha = 4$,
 - i) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Γ το σημείο τομής της ευθείας ϵ με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 8)
 - ii) Να βρείτε το σημείο της ευθείας ϵ που απέχει την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 15433 (4°)

Δύο οικισμοί A και B βρίσκονται στις θέσεις που ορίζουν τα σημεία $A(-1, -2)$ και $B(3,1)$. Εξωτερικά των οικισμών υπάρχει ευθύγραμμος δρόμος με εξίσωση

$$\delta: x + y - 1 = 0.$$

- α) Να βρείτε σε ποια θέση του δρόμου δ :
 - i) Ο οικισμός A έχει τη μικρότερη απόσταση από τον δρόμο. (Μονάδες 8)
 - ii) Υπάρχει το Κέντρο Υγείας της περιοχής, αν είναι γνωστό ότι ισαπέχει από τους δύο οικισμούς. (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε τη θέση Γ ενός αυτοκινήτου πάνω στο δρόμο, αν είναι γνωστό, ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν τα τρία σημεία A , B και Γ είναι ίσο με 8. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 15681 (4°)

Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(\alpha,0)$, $B(\frac{\alpha}{2},\beta)$ και $M(\frac{\alpha}{2},0)$, όπου α,β σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

α) Να μεταφέρετε τα παραπάνω σημεία σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

Κατόπιν, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές και το σημείο M είναι το μέσο της βάσης του OA . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των ευθειών OB και AB είναι $OB: 2\beta x - \alpha y = 0$ και $AB: 2\beta x + \alpha y - 2\alpha\beta = 0$ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

γ) Αν d_1 είναι η απόσταση του σημείου M από την ευθεία OB και d_2 η απόσταση του σημείου M από την ευθεία AB , να αποδείξετε ότι $d_1 = d_2$. (Μονάδες 8)

δ) Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχθεί; (Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 15692 (4°)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + y = x + 2xy + 6$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $(x - y)^2 - (x - y) - 6 = 0$. (Μονάδες 4)

ii) Η εξίσωση παριστάνει ένα ζεύγος παράλληλων ευθειών, τις οποίες να βρείτε. (Μονάδες 4)

Έστω $\varepsilon_1: x - y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2: x - y + 2 = 0$ οι δυο παράλληλες ευθείες.

β) Να αποδείξετε ότι όλα τα σημεία $M\left(\alpha, \alpha - \frac{1}{2}\right)$, $\alpha \in \Gamma$ ισαπέχουν από τις δυο ευθείες. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε την μεσοπαράλληλη των δυο ευθειών. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 15987 (4°)

Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$ και $B(2,3)$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας AB είναι η $(\varepsilon): y = 2x - 1$. (Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε αν το σημείο $\Gamma(2^{100}, 5)$ ανήκει ή όχι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία (ε) και την αρχή των αξόνων $O(0,0)$. (Μονάδες 8)

γ) Να αιτιολογήσετε αν το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το εμβαδόν του τριγώνου AOB . (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 16057 (4°)

Δίνονται τα σημεία $A(2,0)$, $B(3,4)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) i) Να βρείτε την εξίσωση που περιγράφει όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο A και έχουν κλίση λ . (Μονάδες 5)
- ii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο A , έχει κλίση λ και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο B , έχει εξίσωση (ε) : $15x - 8y - 30 = 0$. (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει και άλλη ευθεία (ζ) , εκτός από την (ε) , η οποία διέρχεται από το σημείο A και απέχει απόσταση ίση με 1 από το σημείο B . (Μονάδες 5)
- γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ) . (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 17694 (4°)

Στο χάρτη μίας πεδινής περιοχής, που είναι εφοδιασμένος με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, δύο κωμοπόλεις A και B έχουν συντεταγμένες $A(3,6)$ και $B(7,-2)$.

- α) Ανάμεσα στις δύο κωμοπόλεις, θα κατασκευαστεί ευθεία σιδηροδρομική γραμμή, κάθε σημείο της οποίας θα ισαπέχει από αυτές. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, πάνω στην οποία βρίσκεται η σιδηροδρομική γραμμή. (Μονάδες 12)
- β) Πάνω στην σιδηροδρομική γραμμή θα κατασκευαστεί σταθμός Σ , ώστε το εμβαδόν της περιοχής που ορίζεται από τα σημεία A , B και Σ να ισούται με 20 τετραγωνικές μονάδες. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σταθμού Σ στο χάρτη. (Μονάδες 13)

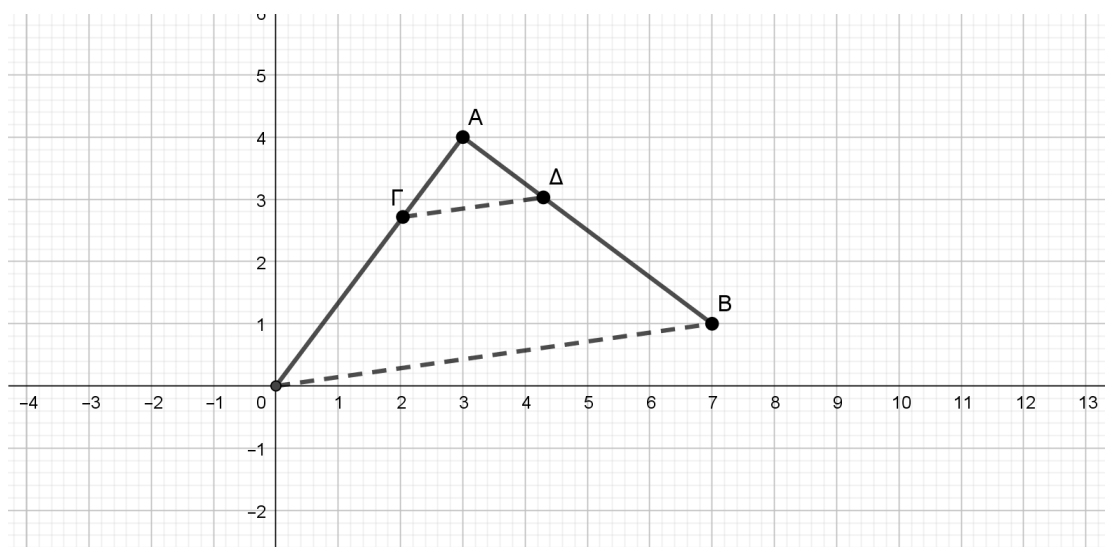
ΘΕΜΑ 17695 (4°)

Υποθέτουμε, ότι σε ένα επίπεδο που έχουμε εφοδιάσει με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, κινούνται δύο σημεία A και B . Κάθε χρονική στιγμή t με $t \geq 0$ η θέση του πρώτου σημείου είναι $A(t-1, 2t-1)$ και του δευτέρου $B(3t-1, -4t-1)$.

- α) Να βρείτε τις εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα δύο σημεία. (Μονάδες 8)
- β) Υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία τα δύο σημεία ταυτίζονται; (Μονάδες 7)
- γ) Να υπολογιστεί η απόσταση των δύο σημείων την χρονική στιγμή $t=2$. (Μονάδες 5)
- δ) Να βρεθεί η χρονική στιγμή t κατά την οποία η απόσταση του σημείου A από την ευθεία $\varepsilon: 4x+3y+7=0$ ισούται με 6. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 18732 (4°)

Σε σύστημα αξόνων δίνονται τα σημεία $A(3,4)$ και $B(7,1)$.



α) Αν $\Gamma\left(2, \frac{8}{3}\right)$ και $\Delta\left(\frac{13}{3}, 3\right)$ να δείξετε ότι:

i. $\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AO}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ (Μονάδες 6)

ii. $\Gamma\Delta \parallel OB$. (Μονάδες 5)

iii. Να δείξετε ότι $(A\Gamma\Delta) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 (AOB)$. (Μονάδες 5)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του α) ερωτήματος, αν για τα σημεία Γ και Δ ισχύουν

$\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{1}{\nu}\overrightarrow{AO}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{\nu}\overrightarrow{AB}$, να δείξετε ότι $(A\Gamma\Delta) = \left(\frac{1}{\nu}\right)^2 (ABO)$ (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 20655 (4°)

Δίνονται τα σημεία $A(2,1)$, $B(3,-1)$ και $\Gamma(-2,0)$.

α) i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B και Γ δεν είναι συνευθειακά. (Μονάδες 07)

ii) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ ισούται με $\frac{9}{2}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 03)

β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $\Delta(x,y)$ για τα οποία ισχύει $(\Delta A\Gamma) = (AB\Gamma)$ (Μονάδες 07)

γ) Αν ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Δ του ερωτήματος (β) αποτελείται από τις ευθείες

$$\varepsilon_1 : x - 4y - 7 = 0 \text{ και } \varepsilon_2 : x - 4y + 11 = 0, \text{ τότε:}$$

i) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $A\Gamma$, ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες. (Μονάδες 03)

ii) Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός « οι ευθείες

$$x - 4y - 7 = 0 \text{ και } x - 4y + 11 = 0 \text{ έχουν ως μεσοπαράλληλο την ευθεία } A\Gamma \text{ »}.$$

(Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 20724 (4°)

Η ευθεία ε με εξίσωση $x + y - 1 = 0$ του παρακάτω σχήματος, αναπαριστά τη γραμμή ενός σιδηροδρομικού δικτύου που εξυπηρετεί τους κατοίκους δύο πόλεων $A(8,1)$, $B(-7,4)$ (για την ακρίβεια A, B είναι τα κεντρικά σημεία των πόλεων από τα οποία μετράμε αποστάσεις). Για το λόγο αυτό θα κατασκευαστεί κατά μήκος της γραμμής (ε), ένας σταθμός σε ένα σημείο Σ και μία πεζογέφυρα σε ένα σημείο Π . Να βρείτε :

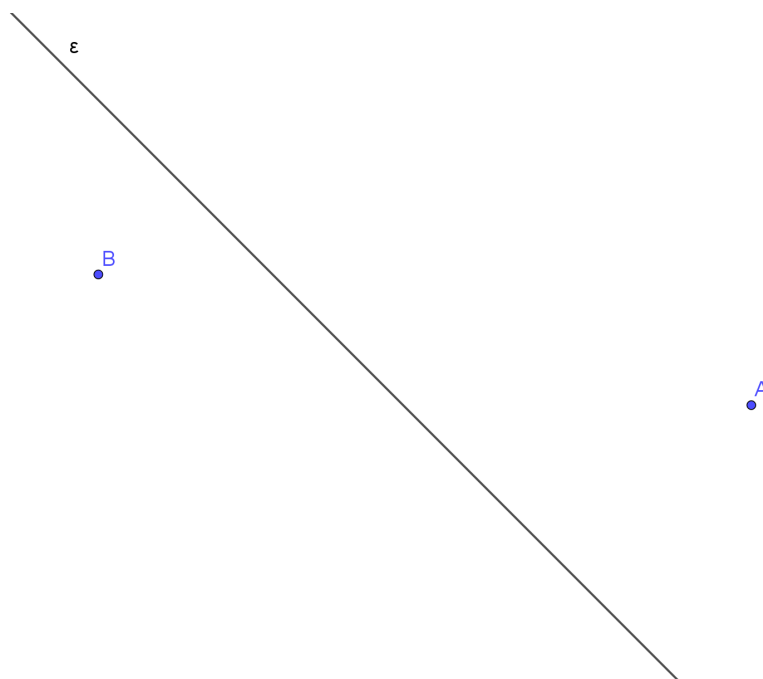
α) ποια πόλη από τις A, B είναι πλησιέστερα στη γραμμή του τραίνου. (Μονάδες 6)

β) τις συντεταγμένες του Π , αν είναι γνωστό ότι θα κατασκευαστεί στο πλησιέστερο σημείο της γραμμής στην πόλη B . (Μονάδες 7)

γ) τις συντεταγμένες του Σ στις παρακάτω περιπτώσεις

i) ο σταθμός Σ να ισαπέχει από τις πόλεις A, B . (Μονάδες 6)

ii) το οδικό δίκτυο που θα συνδέει το σταθμό Σ με τις πόλεις A, B να έχει το μικρότερο δυνατό μήκος. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 20728 (4°)

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ και $\varepsilon_2 : y = x$.

α) Να σχεδιάσετε τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει κάθε μια με τον άξονα xx' . (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB , όπου $O(0,0), A(3,\sqrt{3}), B(3,3)$. (Μονάδες 6)

δ) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$. (Μονάδες 7)

(Θυμίζουμε ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου δίνεται από το ημιγινόμενο δύο πλευρών του επί το ημίτονο της περιεχόμενης γωνίας τους).

ΘΕΜΑ 20861 (4°)

Δίνεται το σημείο $M(-2, 2)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (ε) που διέρχονται από το σημείο M . (Μονάδες 06)

β) i) Να βρείτε ποιες από τις παραπάνω εξισώσεις ευθειών σχηματίζουν τρίγωνο με τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy . (Μονάδες 04)

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_1), η οποία διέρχεται από το σημείο M και σχηματίζει με τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον θετικό ημιάξονα Oy τρίγωνο, με εμβαδόν $E = 8$. (Μονάδες 10)

γ) Αν (ε_1): $y = x + 4$, να βρείτε το μήκος του ύψους του ορθογωνίου τριγώνου, που σχηματίζει η (ε_1) με τους άξονες, το οποίο φέρεται από την κορυφή O . (Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 20939 (4°)

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy είναι τοποθετημένα 7 χωριά ως σημεία του επιπέδου και μια πηγή νερού σε ένα σημείο Π . Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν 6 αγωγοί νερού που συνδέουν την πηγή με έξι από τα παραπάνω χωριά. Οι αγωγοί αυτοί ανήκουν στις γραμμές με εξισώσεις της μορφής:

$$(\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y + 2 = 0, \text{ με } \lambda \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

α) Να αποδείξετε ότι και οι 6 γραμμές είναι ευθείες. (Μονάδες 04)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Π . (Μονάδες 06)

γ) Το έβδομο χωριό βρίσκεται στο σημείο $O(0,0)$. Να αποδείξετε ότι κανένας από τους παραπάνω αγωγούς νερού δεν διέρχεται από το χωριό αυτό. (Μονάδες 04)

δ) Προκειμένου να έχει πρόσβαση στο νερό το χωριό O , υπάρχουν δύο επιλογές:

1^η επιλογή: Να συνδέσουμε απευθείας το χωριό O με την πηγή

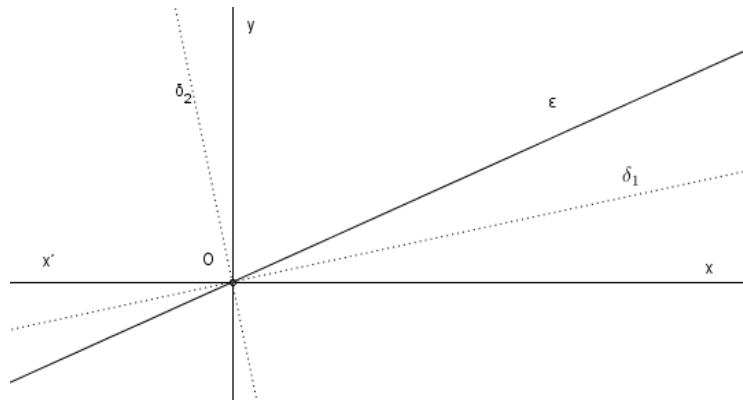
2^η επιλογή: Να συνδέσουμε το χωριό O με έναν από τους παραπάνω αγωγούς μέσω της συντομότερης διαδρομής.

Με δεδομένο ότι το κόστος κατασκευής ανά μονάδα μήκους για κάθε μία από τις παραπάνω επιλογές είναι το ίδιο,

- i) να βρείτε την τιμή του λ για την οποία οι δύο επιλογές οδηγούν στο ίδιο κόστος κατασκευής. (Μονάδες 08)
- ii) Πως εξηγείται γεωμετρικά το συμπέρασμα; (Μονάδες 03)

ΘΕΜΑ 22067 (4°)

Θεωρούμε μία ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x$ με θετική κλίση λ .



- α) Αν δ_1 είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον $x'x$ άξονα, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση της διχοτόμου δ_1 είναι $y = \lambda_1 x$ με $\lambda_1 = \frac{\lambda}{1 + \sqrt{1 + \lambda^2}}$. (Μονάδες 12)
- β) Αν δ_2 είναι η διχοτόμος της αμβλείας γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον $x'x$ άξονα, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση της διχοτόμου δ_2 είναι: $y = \lambda_2 x$ με $\lambda_2 = \frac{\lambda}{1 - \sqrt{1 + \lambda^2}}$. (Μονάδες 7)
- γ) Αν $\lambda = 1$, να εφαρμόσετε τους τύπους του α) ερωτήματος για να αποδείξετε ότι:

$$\varepsilon \varphi 22,5^\circ = \sqrt{2} - 1. \quad (\text{Μονάδες } 6)$$

ΘΕΜΑ 22073 (4°)

Σε χάρτη με καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων η θέση ενός λιμανιού προσδιορίζεται από το σημείο $\Lambda(2,6)$ και η θέση ενός πλοίου με το σημείο $\Pi(\lambda-1, 2+\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) i. Αν το πλοίο κινείται ευθύγραμμα, να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του. (Μονάδες 07)
- ii. Να εξετάσετε αν το πλοίο θα περάσει από το λιμάνι. (Μονάδες 05)
- β) Αν τελικά το πλοίο δεν περάσει από το λιμάνι, να βρείτε:
 - i. Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση του πλοίου από το λιμάνι; (Μονάδες 06)
 - ii. Το σημείο του καρτεσιανού επιπέδου που βρίσκεται το πλοίο, όταν απέχει την ελάχιστη απόσταση από το λιμάνι. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 22262 (4°)

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία A(-2, 1), B(1, 5) και Γ(5, -1).

- α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 5)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ. (Μονάδες 5)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του τριγώνου από την κορυφή Α. Στη συνέχεια να βρείτε το σημείο Δ της ευθείας ΒΓ, από το οποίο, το Α απέχει την ελάχιστη απόσταση. (Μονάδες 8)
- δ) Να βρείτε το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$$(MAB) = \frac{1}{2} (AB\Gamma) \quad (\text{Μονάδες } 7)$$

ΘΕΜΑ 22265 (4°)

Στο καρτεσιανό επίπεδο δίνονται τα σημεία A(1, -1), B(2, 2) και Γ(μ-1, 3μ-2), μ ∈ ℝ.

- α) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το ℝ, το σημείο Γ κινείται στην ευθεία ε: γ = 3x + 1. (Μονάδες 6)
- β) Να αποδείξετε ότι καθώς το μ διατρέχει το ℝ, τα σημεία Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου. (Μονάδες 6)
- γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ είναι σταθερό. (Μονάδες 5)
- δ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο Β και από τις οποίες το σημείο Α, απέχει απόσταση ίση με 1. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 22266 (4°)

Δίνεται η εξίσωση $(2\lambda+1)x - (\lambda-2)y + \lambda - 7 = 0$ (Ε) με $\lambda \in \mathbb{R}$ και η ευθεία (Ζ) με εξίσωση: $6x - 8y + 3 = 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (Ε) παριστάνει ευθεία. (Μονάδες 6)
- β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (Ε), για τα διάφορα $\lambda \in \mathbb{R}$, διέρχονται από το ίδιο σημείο, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 7)
- γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε ευθεία (ε) που ορίζεται από την εξίσωση (Ε) να είναι παράλληλη στη ευθεία (Ζ). Ποια είναι η εξίσωση της (ε); (Μονάδες 7)
- δ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Μ(1,3) από την ευθεία (Ζ). (Μονάδες 5)