

ΦΥΛΛΟ 6

1. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία που ορίζεται από την εξίσωση $(2\alpha - \beta + 5)x + (\alpha - 3\beta - 3)y + 2\alpha + 7\beta + 15 = 0$ να είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και να διέρχεται από το σημείο $A(5, 0)$.
2. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $(2 - \mu)x - (\mu + 5)y + \mu - 1 = 0$ παριστάνει :
 - i) Ευθεία
 - ii) Ευθεία ε παράλληλη στον άξονα $x'x$.
 - iii) Ευθεία ε παράλληλη στον άξονα $y'y$.
 - iv) Ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
3. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες $(\alpha^2 + 1)x + (\alpha - 1)y - 3\alpha^2 + \alpha - 4 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.
4. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : \lambda x + (\lambda + 1)y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + 2y - \lambda + 2 = 0$.
 - i) Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.
 - ii) Αν οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται, να αποδείξετε ότι καθώς το λ μεταβάλλεται, το σημείο τομής τους ανήκει σε σταθερή ευθεία.
5. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : \lambda x + (\lambda - 1)y - 1 = 0$ και $\varepsilon_2 : 4x + \lambda y + \lambda - 2 = 0$. Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει :
 - i) $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$, ii) $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$
6. Να βρεθούν οι τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1 : (\mu - 2)x + 3y + 9 = 0$ και $\varepsilon_2 : (\mu - 4)x + (\mu - 6)y + 2 = 0$ να είναι κάθετες.
7. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : x - y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2 : x - y + 5 = 0$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι μεσοπαράλληλη των ε_1 και ε_2 .
8. Αν η ευθεία $\zeta : x - 2y + 1 = 0$ είναι μεσοπαράλληλος των ευθειών $\varepsilon_1 : x - 2y + \alpha = 0$ και $\varepsilon_2 : 2x - 4y + \alpha + 2 = 0$, να βρείτε την παράμετρο α .
9. Να βρεθεί η οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες $\varepsilon_1 : x - 3y + 2 = 0$ και $\varepsilon_2 : -2x + y + 4 = 0$.
10. Να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών $\varepsilon_1 : 2\lambda x - (\lambda + 1)y + \mu = 0$ και $\varepsilon_2 : (3\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y + \kappa = 0$.

11. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: (2\lambda - 1)x + \lambda y - 2 = 0$ και $\varepsilon_2: -x + y + 1 = 0$. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η γωνία των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ να είναι ίση με $\frac{\pi}{3}$.
12. Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες $\varepsilon_1: 3x - 4y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2: 5x + 12y - 2 = 0$. Ποια είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας;
13. Θεωρούμε τα σημεία $A(3, 2)$, $B(-1, -2)$ και $\Gamma(5, 0)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
14. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $A(1, -2)$ και οι εξισώσεις των δύο πλευρών του είναι $x - y + 1 = 0$ και $x + y + 3 = 0$. Να βρείτε την κορυφή του Γ και τις εξισώσεις των άλλων πλευρών του.
15. Δίνονται οι εξισώσεις $8x + 3y + 1 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ δύο πλευρών ενός παραλληλογράμμου και η εξίσωση $3x + 2y + 3$ μιας διαγωνίου του. Να βρείτε τις κορυφές του.
16. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1, 2)$. Αν η εξίσωση της μιας πλευράς του είναι $x - 2y + 1 = 0$ και το ύψος BD έχει εξίσωση $x + 2y + 3 = 0$, να βρείτε τις κορυφές B και Γ .
17. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1, 2)$. Αν η εξίσωση της μιας πλευράς του είναι $x + 2y - 4 = 0$ και η διάμεσος BD έχει εξίσωση $x - y + 1 = 0$, να βρείτε τις κορυφές του B και Γ .
18. Η κορυφή A τριγώνου $AB\Gamma$ έχει συντεταγμένες $(2, 1)$ και οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται τα δύο ύψη του έχουν εξισώσεις $y = -3x + 11$ και $y = x + 3$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών του.
19. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται η πλευρά AB , η διάμεσος GM και το ύψος AD έχουν εξισώσεις $y = x - 2$, $y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$ και $y = -\frac{2}{3}x + 3$ αντίστοιχα. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του A, B, Γ .
20. Η κορυφή A τριγώνου $AB\Gamma$ είναι το σημείο $(1, 2)$, ενώ οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται δύο διάμεσοι του είναι οι $\varepsilon_1: x - 3y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2: y = 1$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών B και Γ .
21. Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(1, 2)$ και δύο ύψη έχουν εξισώσεις $x + y - 1 = 0$ και $x - 2y = 0$. Να βρεθεί η εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$ και το εμβαδόν του τριγώνου.
22. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη προς την ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y + 10 = 0$ και απέχει από το σημείο $M(6, 2)$ απόσταση ίση με 1.

23. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $M(4, 1)$ και απέχει από το σημείο $N(5, 3)$ απόσταση ίση με 1.
24. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(1, -4)$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν $E=1$.
25. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών, οι οποίες είναι κάθετες προς την ευθεία $\varepsilon: 6x-3y+10=0$ και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν $E=9$.
26. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τις ευθείες $\varepsilon_1: x-2y=0$ και $\varepsilon_2: x+2y=0$ αντίστοιχα είναι ίσος με 2.
27. Δίνεται το σημείο $A(1, -3)$ και το σημείο B που κινείται στην ευθεία $\varepsilon: 2x+3y=-2$.
Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου M του AB .
28. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες ισοσκελές τρίγωνο και απέχει από το σημείο $A(-2, 1)$ απόσταση ίση με $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.
- α) Αν B και Γ τα σημεία τομής της παραπάνω ευθείας ε με τους άξονες, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $OB\Gamma$.
- β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία ισχύει $d(M, \varepsilon) = d(A, \varepsilon)$.
- γ) Αν N τυχαίο σημείο της ευθείας $\varepsilon_1: x+y=5$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $NB\Gamma$.
29. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 + 4\lambda x + 2\lambda y + 3\lambda^2 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.
- i) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που είναι κάθετες.
- ii) Να βρείτε το σημείο τομής M των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.
- iii) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M .