

ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ – ΕΝΟΤΗΤΑ 3.1 (ΚΥΚΛΟΣ)

ΘΕΜΑ 2ο

ΘΕΜΑ 15028 (2°)

Έστω κύκλος C με κέντρο $K(1,2)$ και ακτίνα $\rho = 2$ και ευθεία (ε) με εξίσωση $3x + 4y - 1 = 0$.

- α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C . (Μονάδες 8)
- β) Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου $K(1,2)$ από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2. (Μονάδες 9)
- γ) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται στον κύκλο C . (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 15680 (2°)

Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ με κέντρο $K(1,2)$ και η ευθεία $\varepsilon : 3x + 4y + 1 = 0$

- α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κύκλου C είναι $\rho = 2$. (Μονάδες 10)
- β) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K από την ευθεία ε είναι $\frac{12}{5}$. (Μονάδες 10)
- γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία ε και ο κύκλος C δεν έχουν κοινά σημεία. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 15994 (2°)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ (1).

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (Μονάδες 13)
- β) Να σχεδιάσετε τον κύκλο (c) και να βρείτε, χρησιμοποιώντας το σχήμα ή με οποιονδήποτε άλλον τρόπο, τα κοινά του σημεία με τους άξονες. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 16773 (2°)

- α) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το $O(0,0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$. (Μονάδες 08)
- β) Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 5$.
- i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενής του στο σημείο A . (Μονάδες 09)
- ii. Να βρεθεί το σημείο B , το οποίο είναι αντιδιαμετρικό του A σε αυτόν τον κύκλο. (Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 16808 (2°)

Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(-8, 1)$, $B(4, 5)$ και $\Gamma(-4, 9)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K του ευθυγράμμου τμήματος AB .
(Μονάδες 08)
- β) Να δείξετε ότι ο κύκλος (C) που έχει κέντρο το σημείο K και διάμετρο το τμήμα AB διέρχεται από το σημείο Γ .
(Μονάδες 09)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (C) .
(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 17317 (2°)

Δίνεται ο κύκλος $C: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y = 8$.

- α) Να βρείτε το κέντρο K του κύκλου C και την ακτίνα του.
(Μονάδες 5)
- β) Αν $K(1,2)$, να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου του κύκλου C από την ευθεία ε είναι $d(K, \varepsilon) = \frac{13}{5}$.
(Μονάδες 13)
- γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η ευθεία και ο κύκλος δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.
(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 18238 (2°)

Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$ και $B(-3,5)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K του τμήματος AB .
(Μονάδες 7)
- β) Να αποδείξετε ότι $(KA) = \sqrt{5}$.
(Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB .
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 18239 (2°)

Δίνεται το σημείο $K(-3,1)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 4x - 3y + 5 = 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου K από την ευθεία (ε) είναι ίση με 2.
(Μονάδες 6)
- β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C που έχει κέντρο το σημείο K και εφάπτεται στην ευθεία (ε) .
(Μονάδες 9)
- γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τον κύκλο C και την ευθεία (ε) .
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 18241 (2°)

Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2 + y^2 = 25$. Να σχεδιάσετε στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων

- α) τον κύκλο C . (Μονάδες 9)
- β) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον yy' και να γράψετε τις εξισώσεις τους. (Μονάδες 8)
- γ) τις εφαπτόμενες του C που διέρχονται από τα σημεία τομής του C με τον xx' και να γράψετε τις εξισώσεις τους. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 18700 (2°)

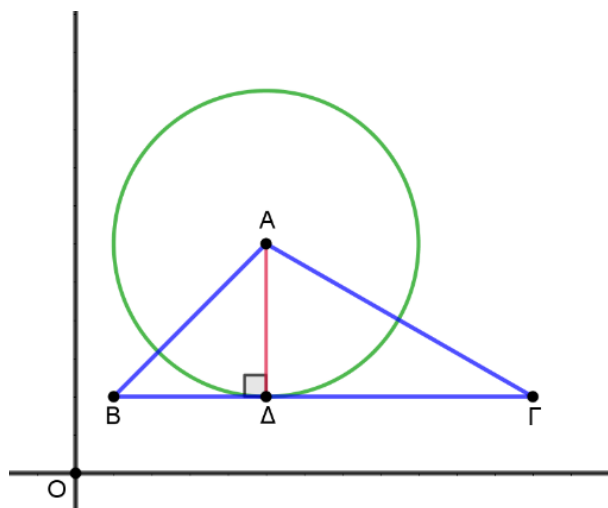
Δίνεται κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 5.

- α) Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου C και να τον σχεδιάσετε στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. (Μονάδες 10)
- β) Δίνεται το σημείο $A(3, -4)$.
 - i) Να αποδείξετε ότι το σημείο A ανήκει στον κύκλο C . (Μονάδες 05)
 - ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο σημείο A . (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 18749 (2°)

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ ώστε $A(5, 6)$, $B(1, 2)$, $\Gamma(12, 2)$ και το ύψος του $A\Delta$, όπου Δ σημείο της $B\Gamma$, όπως στο παρακάτω σχήμα.

- α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $B\Gamma$ και $A\Delta$. (Μονάδες 10)
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ . (Μονάδες 5)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο A , ο οποίος εφάπτεται της ευθείας $B\Gamma$ στο σημείο Δ . (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 18968 (2°)

Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$: (1).

- α) Να δείξετε ότι ο κύκλος C έχει κέντρο $K(3,4)$ και ακτίνα $\rho = 5$. (10 μονάδες)
- β) Να δείξετε ότι η απόσταση του κέντρου K του κύκλου από την ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y = 0$ ισούται με 5 μονάδες μήκους. (08 μονάδες)
- γ) Να δικαιολογήσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός: «Ο κύκλος C και η ευθεία ε εφάπτονται». (07 μονάδες)

ΘΕΜΑ 19039 (2°)

Δίνεται η εξίσωση $(x - 1)(x + 3) + (y + 1)(y - 3) = -4$ (1)

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1,1)$ και ακτίνα $R = 2$. (Μονάδες 9)
- β) i. Να βρείτε τα σημεία A και B του κύκλου (K,R) τα οποία έχουν τετμημένη ίση με -1 . (Μονάδες 8)
- ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B είναι αντιδιαμετρικά. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 20890 (2ο)

Δίνεται το τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία $A(3,-3)$, $B(2,-8)$ και $\Gamma(7,-3)$. Να βρείτε:

- α) την εξίσωση της πλευράς BΓ. (Μονάδες 10)
- β) την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το A και εφάπτεται στην πλευρά BΓ. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 21962 (2ο)

Δίνονται τα σημεία $A(0,3)$, $B(3,4)$ και $\Gamma(1,0)$.

- α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ είναι ορθή. (Μονάδες 13)
- β) Να βρείτε το μέσο K της υποτεινουσας BΓ του ορθογωνίου τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 5)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A, B και Γ. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 22056 (2ο)

Έστω Ω το σύνολο όλων των σημείων (x, y) του επιπέδου για τα οποία ισχύει:

$$x^2 + y^2 \leq 9.$$

α) Να σχεδιάσετε το σύνολο Ω σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy .

(Μονάδες 13)

β) Υπάρχει σημείο A στο σύνολο Ω τέτοιο ώστε $|\overrightarrow{OA}| = 4$, όπου O η αρχή των αξόνων;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 22147 (2°)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - x - y - \frac{7}{2} = 0$ (1)

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο

$K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $R = 2$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ είναι σημείο του κύκλου (K, R) .

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (K, R) στο A .

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 22172 (2°)

Θεωρούμε την ευθεία $\epsilon: 3x - 4y = 0$ και το σημείο $A(-2, 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου A από την ευθεία είναι 2.

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας (η) κάθετης στην (ϵ) που διέρχεται από το σημείο A .

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο A και εφάπτεται στην ευθεία (ϵ) .

(Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 22279 (2°)

Δίνεται η εξίσωση $(y - 1)^2 = (3 + x)(1 - x)$ (1)

Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-1, 1)$ και ακτίνα $R = 2$.

(Μονάδες 9)

β) Η αρχή $O(0, 0)$ των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (K, R) .

(Μονάδες 7)

γ) Η ευθεία $(\epsilon): x + y = 2$ είναι τέμνουσα του κύκλου (K, R) .

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4^ο**ΘΕΜΑ 14954 (4^ο)**

Θεωρούμε τις εξισώσεις $(\varepsilon_1): \mu x - y - \mu = 0$ και

$(\varepsilon_2): (\mu + 1)x + (\mu - 1)y - \mu + 1 = 0, \mu \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι οι (ε_1) και (ε_2) παριστάνουν εξισώσεις ευθειών για κάθε τιμή της παραμέτρου μ . (Μονάδες 6)
- β) Να αποδείξετε ότι η οξεία γωνία των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι 45° για κάθε τιμή της παραμέτρου μ . (Μονάδες 10)
- γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) ανήκουν στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 15030 (4^ο)

Δίνεται ο κύκλος $C: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$ και η ευθεία $\varepsilon: 2x + y + 5 = 0$.

- α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C . (Μονάδες 6)
- β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C και η ευθεία (ε) δεν έχουν κοινά σημεία. (Μονάδες 6)
- γ) Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ευθείες $(\eta_1), (\eta_2)$ που είναι παράλληλες στην ευθεία (ε) και εφάπτονται του κύκλου C και να βρείτε τις εξισώσεις τους. (Μονάδες 7)
- δ) Να βρείτε τη μεσοπαράλληλη των ευθειών $(\eta_1), (\eta_2)$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 15042 (4ο)

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο του επιπέδου M , τέτοιο ώστε:

$$\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0}$$

- α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία B, Γ, M είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι το M είναι το μέσο του $B\Gamma$. (Μονάδες 2)
- γ) Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ τέτοιοι ώστε $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = \kappa$ και $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = \lambda$.

Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι για τα μη παράλληλα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{AB}$ ισχύει ότι $\kappa \overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \overrightarrow{AB}$, τότε:

- i. Να αποδείξετε ότι $\kappa = \lambda = 0$. (Μονάδες 7)
- ii. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Να προσδιορίσετε την ορθή γωνία και τις πλευρές που είναι ίσες. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 15080 (4^ο)

Δίνονται οι εξισώσεις $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0(1)$ και $C_2: x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0(2)$.

α) Να δείξετε ότι οι (1) και (2) είναι εξισώσεις κύκλων, με κέντρα $K(1,0)$, $\Lambda(3,0)$ και ακτίνες $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 1$ αντίστοιχα. (Μονάδες 6)

β) i. Να βρείτε το μήκος της διακέντρου ($ΚΛ$). (Μονάδες 5)

ii. Να δείξετε ότι ο κύκλος C_2 εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου C_1 . (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ακτίνων του κύκλου C_1 που εφάπτονται στον κύκλο C_2 . (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 15081 (4^ο)

Δίνονται οι κύκλος $C_1: x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ και $C_2: x^2 + y^2 - 6\sqrt{2}x + 9 = 0$.

α) Να δείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 έχουν κέντρα $K(-\sqrt{2},0)$, $\Lambda(3\sqrt{2},0)$ και ακτίνες $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 3$ αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

β) i. Να δείξετε ότι από την αρχή των αξόνων διέρχονται δύο κοινές εφαπτόμενες των κύκλων C_1 και C_2 . (Μονάδες 10)

ii. Να σχεδιάσετε ένα πρόχειρο σχήμα όπου να φαίνονται οι κύκλοι και οι δύο αυτές εφαπτόμενες. (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 15082 (4^ο)

Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις:

$$C_1: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 8 \text{ και } C_2: (x-7)^2 + (y+2)^2 = 18.$$

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου ($ΚΛ$), όπου K, Λ τα κέντρα των κύκλων C_1, C_2 αντίστοιχα. Ακολουθώς να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά. (Μονάδες 5)

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $ΚΛ$. (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας $ΚΛ$ με τον κύκλο C_1 και το σημείο επαφής των δύο κύκλων. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης των κύκλων. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 15177 (4°)

Δίνονται τα σημεία $A(1,0)$ και $B(0,-1)$ και ο κύκλος c_1 με εξίσωση

$$c_1: \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.$$

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων $N(x,y)$ του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν τη σχέση $\overrightarrow{NA}^2 - \overrightarrow{NB}^2 = 4$, ανήκουν στην ευθεία (ε) με εξίσωση $y = -x - 2$. (Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων P του επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση $2x^2 + 2y^2 + 10x + 14y + 21 = 0$, ανήκουν σε κύκλο c_2 κέντρου $\Lambda\left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ και ακτίνας $R = 2\sqrt{2}$. (Μονάδες 06)

γ) i. Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι c_1 και c_2 εφάπτονται εξωτερικά και στη συνέχεια να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση των σημείων τους. (Μονάδες 06)

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) είναι κοινή εφαπτομένη των κύκλων c_1 και c_2 . (Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 15189 (4°)

Δίνονται τα σημεία $A(-2,0)$ και $B(2,-2)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου K και το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB . (Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι ο κύκλος C με διάμετρο AB έχει εξίσωση $C: x^2 + (y + 1)^2 = 5$. (Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι τα σημεία $M(x,y)$ του επιπέδου για τα οποία $(AMB) = 5$ ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1: x + 2y - 3 = 0$ και $\varepsilon_2: x + 2y + 7 = 0$. (Μονάδες 7)

δ) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 εφάπτονται του κύκλου C . (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 15272 (4°)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y = -1$.

α) Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(3, 2)$ βρίσκεται έξω από τον κύκλο. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το M . (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 15432 (4°)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4kx - 2ky + 4 = 0$ (1) με $k \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τις τιμές του $k \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο.
(Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κάθε κύκλου.
(Μονάδες 3)
- γ) Να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκουν τα κέντρα των παραπάνω κύκλων.
(Μονάδες 7)
- δ) Για $k = 1$ να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του αντίστοιχου κύκλου της εξίσωσης (1) στο σημείο $\Gamma(2,2)$.
(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 15628 (4°)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + (4 - 2k)x - 2(1 + k)y + 5 - 2k = 0$ (I), όπου $k \in (0, +\infty)$.

- α) Να αποδείξετε ότι η (I) παριστάνει κύκλο με κέντρο $M(k - 2, k + 1)$ και ακτίνα $k\sqrt{2}$ για κάθε $k > 0$.
(Μονάδες 10)
- β) Να αποδείξετε ότι το σημείο M ανήκει σε μια σταθερή ευθεία για κάθε $k > 0$.
(Μονάδες 7)
- γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $y = -x - 1$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου για κάθε $k > 0$.
(Μονάδες 8)

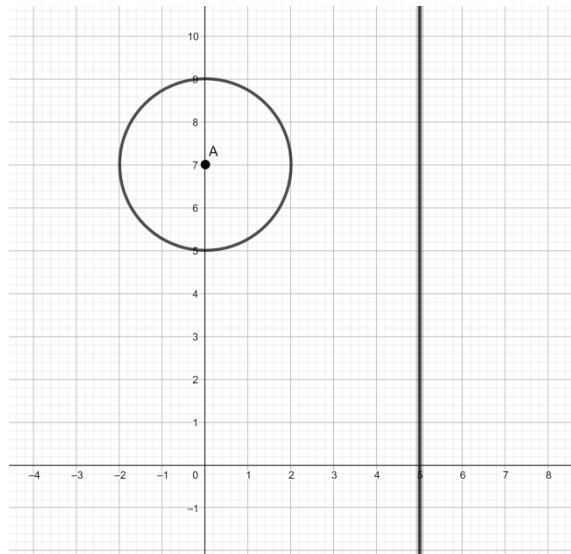
ΘΕΜΑ 15646 (4°)

Δίνονται οι κύκλοι $C_1: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$ και $C_2: (x-4)^2 + (y-4)^2 = 9$.

- α) Να δείξετε ότι τα κέντρα K, Λ των κύκλων C_1 και C_2 αντίστοιχα βρίσκονται στην διχοτόμο της γωνίας $\hat{xOy}$ του συστήματος συντεταγμένων.
(Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε τα σημεία τομής B, Γ των κύκλων C_1 και C_2 .
(Μονάδες 7)
- γ) Να βρείτε τα σημεία της ευθείας $y = x$ ώστε το τρίγωνο που σχηματίζεται με τα B, Γ να έχει εμβαδόν $\frac{21}{2}$ τ.μ.
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 15791 (4°)

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε σχεδιάσει κύκλο C_1 κέντρου A και την ευθεία $(\varepsilon): x = 5$.



α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_1 . (Μονάδες 3)

β) Έστω ένα σημείο του επιπέδου $B(x_1, y_1)$

i) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $B(x_1, y_1)$ και ακτίνα 2.

(Μονάδες 6)

ii) Να βρείτε το μήκος της διακέντρου AB σε συνάρτηση με τις συντεταγμένες του σημείου B

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε όλους τους κύκλους του ερωτήματος β)i. με ακτίνα 2, που εφάπτονται εξωτερικά στον C_1 και στην ευθεία (ε) . (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 15826 (4°)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2(\lambda + 1)x - 2\lambda y + 2\lambda + 1 = 0$ (1), όπου $\lambda \in \Gamma$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο και να γράψετε ως συνάρτηση του λ τις συντεταγμένες του κέντρου K και την ακτίνα ρ .

(Μονάδες 7)

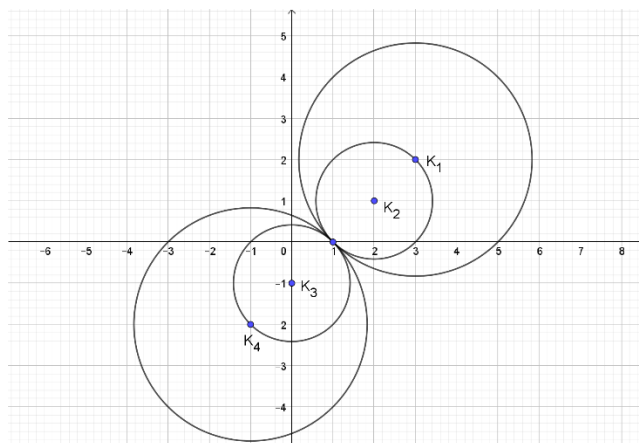
β) Τι παριστάνει η εξίσωση (1) για $\lambda = 0$;

(Μονάδες 3)

γ) Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται 4 κύκλοι με τα αντίστοιχα κέντρα τους K_1, K_2, K_3, K_4 που προκύπτουν από την (1) για 4 αντίστοιχες τιμές του λ .

Αξιοποιώντας το σχήμα,

- i) να αποδείξετε ότι τα κέντρα όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1) βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση. (Μονάδες 5)
- ii) να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 5)
- iii) να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x + y - 1 = 0$ είναι κοινή εφαπτομένη όλων των κύκλων που προκύπτουν από την (1). (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 15993 (4^ο)

Δίνεται η εξίσωση $(x - 2)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2 + 1$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (Μονάδες 03)
- β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία. (Μονάδες 10)
- γ) Αν $A(1,0)$ και $B(3,0)$ είναι τα μοναδικά σημεία από τα οποία διέρχονται όλοι οι κύκλοι, τότε να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής τους και να αποδείξετε ότι είναι κάθετη στην ευθεία που διέρχεται από τα κέντρα των κύκλων. (Μονάδες 07)
- δ) Αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ επαληθεύει την (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 0$. (Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 16191 (4^ο)

Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$, $B(5,5)$.

α) Αν για το σημείο $M(x, y)$ ισχύει $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 32$, να αποδείξετε ότι:

- i) Το σημείο M βρίσκεται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 10 = 0$ (1) (Μονάδες 08)
- ii) Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο. (Μονάδες 03)

β) Αν το κέντρο του κύκλου είναι το $K(3,3)$ και η ακτίνα του $\rho = 2\sqrt{2}$:

i) Να διερευνήσετε για ποιες τιμές του λ η ευθεία (ε): $\lambda x + \psi = 2$ εφάπτεται του κύκλου (1). (Μονάδες 07)

ii) Υπάρχει τιμή του λ για την οποία η ευθεία (ε) σχηματίζει με την AB γωνία 45° ; (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 18237 (4°)

Θεωρούμε τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(3, 2)$, $\Gamma(1, 4)$.

α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης της πλευράς $B\Gamma$. (Μονάδες 7)

Έστω ότι η μεσοκάθετη της πλευράς $B\Gamma$ είναι η ευθεία $\varepsilon: y = x + 1$.

γ) Να βρείτε σημείο K στην μεσοκάθετη της πλευράς $B\Gamma$ που ισαπέχει από τα A , B . (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 18247 (4°)

Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(\alpha,0)$ και $B(0,\beta)$, όπου $\alpha, \beta > 0$.

α) Να βρείτε συνάρτησι των α , β

i) τις συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB . (Μονάδες 5)

ii) την απόσταση (OM) . (Μονάδες 5)

β) Αν $(OM) = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $(OM) = \frac{(AB)}{2}$. (Μονάδες 5)

ii) να γράψετε την πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που έχει αποδειχθεί. (Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου OAB . (Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 18415 (4°)

Δίνεται η εξίσωση $(x - 3\lambda)^2 + (y + 2\lambda)^2 = 1$ (1) όπου $\lambda \in \Gamma$ και η ευθεία $\varepsilon: 2x + 3y = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \Gamma$ τα κέντρα των κύκλων που προκύπτουν από την (1) ανήκουν στην ευθεία ε . (Μονάδες 6)

- β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που απέχουν μεταξύ τους 2 μονάδες και έχουν μεσοπαράλληλη την ευθεία ε . (Μονάδες 7)
- γ) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) εφάπτονται σε δύο σταθερές ευθείες. (Μονάδες 6)
- δ) Να βρείτε το εμβαδόν ενός τετραγώνου του οποίου δύο απέναντι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 18416 (4^ο)

Δίνεται η εξίσωση $x(x-4) + y(y-2) = 2(x+y-4)(1)$.

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(3,2)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$ (Μονάδες 6)
- β) Δίνονται τα σημεία $A(4,4)$ και $B(2,0)$.
- i) Να δείξετε ότι τα σημεία A και B είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου. (Μονάδες 4)
- ii) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου οι οποίες είναι παράλληλες στην διάμετρο AB. (Μονάδες 9)
- γ) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε η ευθεία (η) με εξίσωση $y = \lambda x + 4$ να τέμνει τον παραπάνω κύκλο σε δύο σημεία Γ και Δ ώστε $(\Gamma\Delta) = \sqrt{20}$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 18467 (4ο)

Δίνεται η εξίσωση $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2(x+3)$: (1).

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(2,-2)$ και ακτίνα $\rho = 3$. (06 μονάδες)
- β) Να δείξετε ότι η αρχή O των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου. (04 μονάδες)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία A και B ώστε η αρχή των αξόνων να είναι το μέσο της χορδής AB. (08 μονάδες)
- δ) Αν η ευθεία (ε) του προηγούμενου ερωτήματος έχει εξίσωση $y = x$ τότε να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου KAB. (07 μονάδες)

ΘΕΜΑ 18521 (4°)

Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(2,4)$ και $\Gamma(3,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η $B\hat{A}\Gamma = 90^\circ$. (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου c , ο οποίος διέρχεται από τα σημεία A , B και Γ .

(Μονάδες 09)

γ) Αν ο κύκλος c έχει εξίσωση $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$, τότε να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του, οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 18567 (4°)

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 4$ και το σημείο $A(2\sqrt{2}, 0)$.

α) i. Να αποδείξετε ότι το σημείο A είναι εξωτερικό του κύκλου C . (Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου C που διέρχονται από το σημείο A και να αποδείξετε ότι είναι μεταξύ τους κάθετες. (Μονάδες 12)

β) Αν B , Γ τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαπτόμενες ευθείες από το σημείο A , να υπολογίσετε το εμβαδό του τετραπλεύρου $ABO\Gamma$. (Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 18569 (4ο)

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 1$.

α) Αν A και A' είναι τα σημεία τομής του κύκλου C με τους ημιάξονες Ox και Ox' αντίστοιχα, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων A και A' είναι $A(1,0)$ και $A'(-1,0)$. (Μονάδες 05)

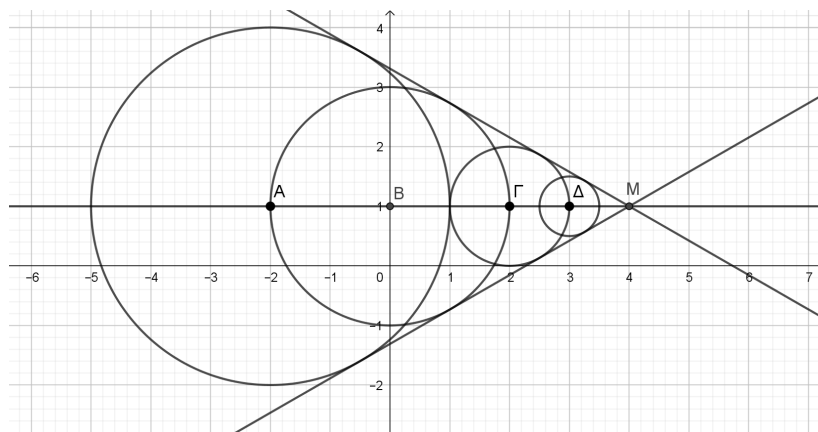
ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το A και σχηματίζει με τον άξονα x' γωνία 150° . (Μονάδες 06)

β) Αν η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C και στο σημείο B , να αποδείξετε ότι η χορδή AB έχει μήκος $\sqrt{3}$. (Μονάδες 08)

γ) Αν η ευθεία ε έχει εξίσωση $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ζ) που διέρχεται από τα σημεία A' και B . (Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 18745 (4ο)

Επιστήμονες προκειμένου να μελετήσουν υδρόβιο έντομο κατέγραψαν στιγμιότυπα από τους ομόκεντρους κύκλους με κέντρα τα σημεία A, B, Γ, Δ και ακτίνες $3, 2, 1, \frac{1}{2}$ αντίστοιχα, που σχηματίζονται σε κάθε προσγείωση του στο νερό. Η εικόνα από τις εναέριες λήψεις αποτυπώθηκαν σε σύστημα αξόνων όπως φαίνεται στο σχήμα. Το έντομο κινούμενο ευθύγραμμο περνάει από τα σημεία A, B, Γ, Δ για να καταγραφεί την στιγμή που καταλήγει στο σημείο M .



α) Να βρείτε την εξίσωση της πορείας του εντόμου. (Μονάδες 4)

β) i. Να δείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon_1): y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{3-4\sqrt{3}}{3}$ είναι κοινή εφαπτόμενη των

τεσσάρων κύκλων. (Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της άλλης κοινής εφαπτομένης. (Μονάδες 10)

γ) Με βάση το μοτίβο που ακολουθούν οι κινήσεις του εντόμου να βρείτε ότι η τελική θέση του εντόμου είναι το σημείο $M(4, 1)$. (Μονάδες 4)

Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

ΘΕΜΑ 18781 (4ο)

Δίνονται δύο κύκλοι με εξισώσεις $C_1: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ και $C_2: x^2 + y^2 = 1$.

α) Να δείξετε ότι:

i. Η εξίσωση του κύκλου C_1 γράφεται στη μορφή $(x - 3)^2 + y^2 = 4$. (Μονάδες 5)

ii. Οι κύκλοι C_1, C_2 εφάπτονται εξωτερικά. (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε:

- i. Το σημείο επαφής των δύο κύκλων C_1 και C_2 . (Μονάδες 6)
- ii. Την εξίσωση της εσωτερικής κοινής εφαπτομένης των δύο κύκλων C_1 και C_2 . (Μονάδες 4)
- γ) Αν τα σημεία M_1, M_2 διατρέχουν τους κύκλους C_1, C_2 αντίστοιχα, να βρείτε τη μέγιστη απόσταση ανάμεσα στα σημεία αυτά. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 18871 (4ο)

Δίνεται ο κύκλος (c) με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{5}$ και το σημείο $A(3,1)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου και να αποδείξετε ότι το σημείο A είναι εξωτερικό του κύκλου. (Μονάδες 07)

β) i. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που εφάπτονται στον κύκλο (c) και διέρχονται από το σημείο A έχουν εξισώσεις (ε_1): $2x - y = 5$ και (ε_2): $x + 2y = 5$.

(Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{BAG}$, όπου B και Γ είναι αντίστοιχα τα σημεία επαφής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) με τον κύκλο.

(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 20091 (4°)

Τα σημεία $A(-7, -1)$ και $B(3, -5)$ είναι σημεία ενός κύκλου C κέντρου K . Το σημείο M είναι το μέσο της χορδής AB και μία ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία K και M .

α) Να βρείτε:

i) Τις συντεταγμένες του σημείου M . (Μονάδες 04)

ii) Την εξίσωση της ευθείας KM . (Μονάδες 08)

β) Αν από το κέντρο K του κύκλου διέρχεται η ευθεία (δ): $x+y = -12$, τότε:

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου K . (Μονάδες 07)

ii) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C . (Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 20229 (4°)

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - (\lambda + 8)x + \lambda y + 7 = 0$ (1), με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα. (Μονάδες 6)

- β) Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινούνται τα κέντρα των κύκλων αυτών. (Μονάδες 7)
- γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, όλοι οι παραπάνω κύκλοι, διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, τα οποία και να βρεθούν. (Μονάδες 7)
- δ) Θεωρούμε τον κύκλο που ορίζεται από την (1) για $\lambda=0$. Να βρεθούν τα σημεία του κύκλου αυτού, που απέχουν από την αρχή των αξόνων την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 20650 (4ο)

- α) Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = x + 2$, $\varepsilon_2: y = x - 2$ και τα σημεία $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$ των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντίστοιχα.
- Να αποδειχθεί ότι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$. (Μονάδες 04)
 - Να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου M , του AB . (Μονάδες 02)
 - Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλου των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. (Μονάδες 06)
- β) Ο κύκλος (K, ρ) έχει την ιδιότητα να εφάπτεται των ευθειών ε_1 και ε_2 . Αν το κέντρο K του κύκλου (K, ρ) ανήκει στην ευθεία $(\eta): x = \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε:
- Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου K , συναρτήσει του λ . (Μονάδες 05)
 - Να αποδείξετε ότι η ακτίνα ρ είναι ανεξάρτητη του λ και να γράψετε την εξίσωση που παριστάνει όλους τους κύκλους (K, ρ) , για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 20651 (4ο)

Θεωρούμε τα σημεία $A(1, 1)$ και $B(2, 4)$.

- α) Να βρείτε όλα τα σημεία M στον άξονα y' ώστε το τρίγωνο MAB να είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την AB . (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε την εξίσωση κύκλου C με διάμετρο AB . (Μονάδες 7)
- γ) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος C διέρχεται από τα σημεία M που προσδιορίσατε στο ερώτημα (α). Κατόπιν, να το επιβεβαιώσετε γεωμετρικά. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 20700 (4ο)

Δίνεται το τετράγωνο MM_1OM_2 με $M(4, 4)$, $M_1(4, 0)$, $M_2(0, 4)$. Αν O η αρχή των αξόνων του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, τότε:

- α) Να δείξετε ότι ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές του τετραγώνου MM_1OM_2 έχει εξίσωση $C: (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$. (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x + y = 8$ είναι εφαπτομένη του παραπάνω κύκλου C (Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε το σημείο επαφής της ευθείας ε με τον κύκλο C . (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 20863 (4°)

Δίνονται τα σημεία $A(1,0)$ και $B(3,0)$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας (ζ) του ευθύγραμμου τμήματος AB . (Μονάδες 07)
- β) Αν K είναι ένα τυχαίο σημείο της ευθείας (ζ), να βρείτε την εξίσωση (c) όλων των κύκλων, οι οποίοι έχουν κέντρο K και διέρχονται από τα σημεία A και B , συναρτήσει μιας παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 08)
- γ) Αν η εξίσωση $(x - 2)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2 + 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, παριστάνει όλους τους κύκλους (c) του ερωτήματος β), τότε:
- i) Να σχεδιάσετε τον κύκλο, ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB . (Μονάδες 05)
- ii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $x + \lambda y - 1 = 0$ εφάπτεται σε όλους τους κύκλους (c) στο σημείο $A(1,0)$. (Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 21154 (4°)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4\alpha x - 4\alpha y = 0$ (1) όπου α είναι πραγματικός αριθμός.

- α) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο. (Μονάδες 8)
- β) Να προσδιορίσετε το κέντρο K και την ακτίνα R των κύκλων ως συνάρτηση του α . (Μονάδες 6)
- γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων για τις διάφορες τιμές του α του ερωτήματος (α). (Μονάδες 5)
- δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του α ώστε ο αντίστοιχος κύκλος που ορίζεται από την εξίσωση (1) να εφάπτεται στον άξονα $x'x$. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 21159 (4°)

Δίνονται τα σημεία $A(\alpha, 0)$ και $B(0, \beta)$ με $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha + \beta = 10$.

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση των κύκλων με διάμετρο την AB, για κάθε τιμή των α και β είναι $x^2 + y^2 - \alpha x - (10 - \alpha)y = 0$. (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι με διάμετρο την AB, για τις διάφορες τιμές των α και β διέρχονται από δύο σταθερά σημεία, την αρχή O των αξόνων και ένα σημείο P του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες. (Μονάδες 9)
- γ) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων όλων των κύκλων με διάμετρο την AB για τις διάφορες τιμές των α και β . (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 21276 (4°)

Σε μια σύγχρονη πόλη, κατασκευάζεται σιδηροδρομικό δίκτυο που περιλαμβάνει:

- τη γραμμή γ_1 , κάθε σημείο της οποίας στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων είναι της μορφής: $A(\lambda-1, 2\lambda+1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - τη γραμμή γ_2 , που περνάει από το σταθμό $\Sigma(-4, 2)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = (-1, 3)$.
- α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι γραμμές γ_1 και γ_2 . (Μονάδες 10)
- β) Η είσοδος του αθλητικού σταδίου μιας συνοικίας θα βρίσκεται στο σημείο $K(1, 1)$ του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων. Οι κατασκευαστές θέλουν να συνδέσουν την είσοδο του σταδίου απ' ευθείας με κάθετο δρόμο, με μια από τις γραμμές γ_1 και γ_2 . Να βρείτε με ποια από τις δύο γραμμές είναι πιο συμφέρουσα η σύνδεση. Δίνεται ότι το κόστος σύνδεσης ανά μονάδα μήκους, είναι το ίδιο και για τις δύο γραμμές. (Μονάδες 9)
- γ) Γύρω από το στάδιο θα δημιουργηθεί κυκλικό πάρκο. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, που θα ορίζει το πάρκο, αν το κέντρο του είναι το σημείο K και επιπλέον ο κύκλος αυτός εφάπτεται της γραμμής γ_1 . (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 21349 (4°)

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο O θεωρούμε κύκλο (C) και ευθεία (ε) με εξισώσεις $x^2 + y^2 - 9x - 3y + 10 = 0$ (1) και $4x + 3y - 10 = 0$ (2) αντίστοιχα.

- α) i. Να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα R του κύκλου (C). (Μονάδες 5)
- ii. Να υπολογίσετε την απόσταση του κέντρου K από την ευθεία (ε) και να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (C) σε δύο σημεία. (Μονάδες 4)

- iii. Να προσδιορίσετε τα σημεία A και B στα οποία η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (C). (Μονάδες 5)

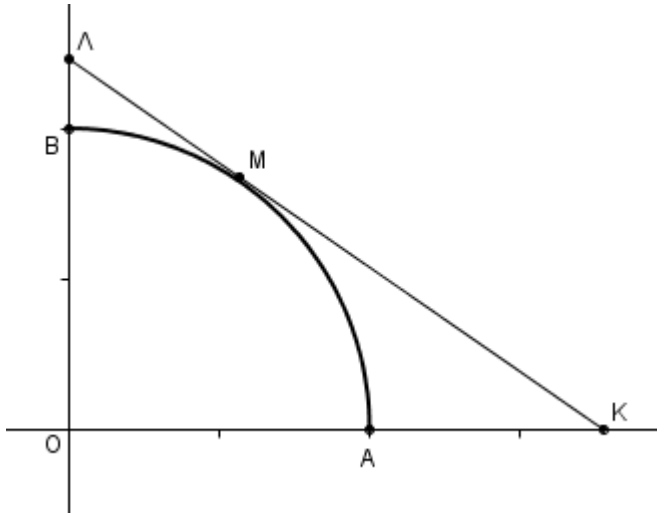
β) Αν είναι $A(1,2)$ και $B(4, -2)$, τότε:

- i. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$. (Μονάδες 5)
- ii. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο AB διέρχεται από το σημείο O. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 21683 (4°)

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται το πρώτο τεταρτημόριο του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ και το τυχαίο σημείο του $M(x_1, y_1)$, $0 < x_1 < 2$ ανάμεσα στα A, B.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του στο M και τις συντεταγμένες των σημείων τομής της K, Λ με τους άξονες. (Μονάδες 6)



- β) Να αποδείξετε ότι το μήκος d του τμήματος KΛ είναι $d = \frac{8}{x_1 y_1}$. (Μονάδες 7)
- γ) Να βρείτε το μήκος d_0 του τμήματος KΛ όταν $x_1 = \sqrt{2}$. (Μονάδες 5)
- δ) Να αποδείξετε ότι, όταν το M κινείται στο τεταρτοκύκλιο, τότε: $d \geq d_0$ (Μονάδες 7)

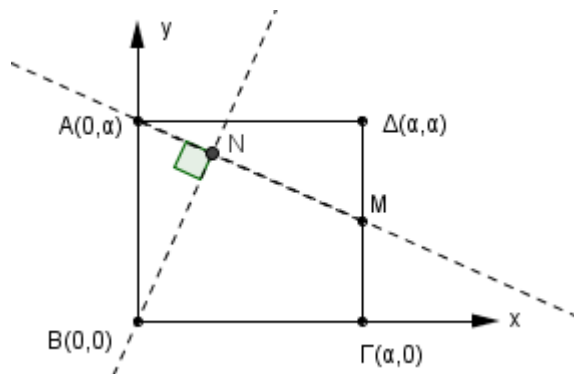
ΘΕΜΑ 21696 (4°)

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, (1) και η ευθεία $\varepsilon: x - 2y + 3 = 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα ρ. (Μονάδες 5)
- β) Να εξετάσετε αν η ευθεία ε έχει κοινά σημεία με τον κύκλο C. (Μονάδες 5)
- γ) Να βρείτε τις εφαπτόμενες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ του κύκλου C που είναι κάθετες στην ευθεία ε. (Μονάδες 7)
- δ) Να αποδείξετε ότι $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 2\rho$. Πως αιτιολογείται γεωμετρικά το συμπέρασμα αυτό; (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 22061 (4°)

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με μήκος πλευράς α ($\alpha > 0$) και κορυφές $A(0, \alpha)$, $B(0, 0)$, $\Gamma(\alpha, 0)$ και $\Delta(\alpha, \alpha)$. M είναι το μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$ και το τμήμα BN είναι κάθετο στο τμήμα AM , όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών:

i. AM

(Μονάδες 5)

ii. BN

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου N .

(Μονάδες 5)

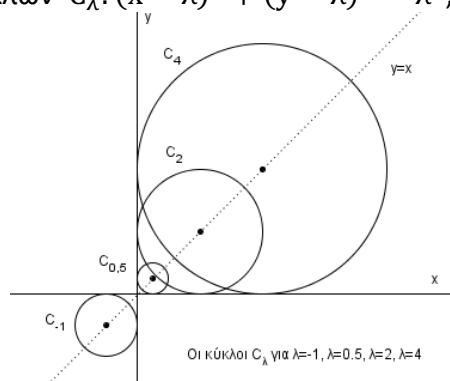
γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο N ανήκει σε κύκλο με κέντρο Γ και ακτίνα ίση με α .

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου αυτού.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 22062 (4^ο)

Δίνεται η οικογένεια κύκλων $C_\lambda: (x - \lambda)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2$, με $\lambda \neq 0$.



Οι κύκλοι C_λ για $\lambda = -1, \lambda = 0.5, \lambda = 2, \lambda = 4$

α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα κάθε κύκλου C_λ , $\lambda \neq 0$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το κέντρο κάθε κύκλου C_λ βρίσκεται στην ευθεία $y = x$.

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x = 0$ εφάπτεται σε όλους τους κύκλους C_λ , $\lambda \neq 0$. Να εξηγήσετε με συντομία ότι το ίδιο συμβαίνει και για την ευθεία $y = 0$.

(Μονάδες 5)

δ) Έστω $\alpha \neq 0$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x = \alpha$ εφάπτεται σε ένα, και μόνο ένα, από τους κύκλους C_λ . Να εξηγήσετε με συντομία ότι το ίδιο συμβαίνει και για την ευθεία $y = \alpha$.

(Μονάδες 5)

ε) Έστω $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\alpha x + \beta y = 1$ εφάπτεται σε δύο, και μόνο δύο, από τους κύκλους C_λ .

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 22066 (4°)

Θεωρούμε το σημείο $A = (\cos\theta, \sin\theta)$ και το σημείο $B = (\cos\theta - \sin\theta, \sin\theta + \cos\theta)$, όπου $\theta \in [0, 2\pi)$.

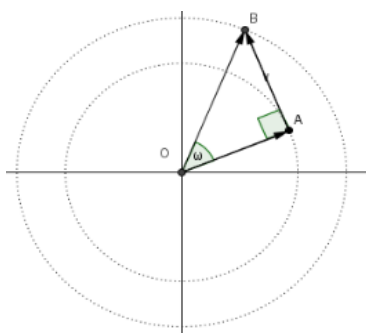
α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A και B ανήκουν σε δύο κύκλους με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$. Να βρείτε τις ακτίνες των δύο κύκλων.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$.

(Μονάδες 8)

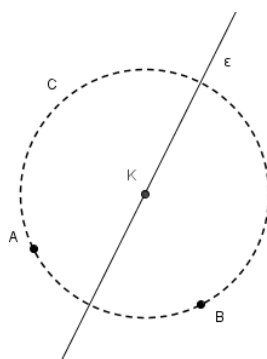
γ) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας ω μεταξύ των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$.



(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 22069 (4°)

Τα σημεία $A(3, 2)$ και $B(6, 1)$ βρίσκονται πάνω σε έναν κύκλο C από το κέντρο K του οποίου διέρχεται η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 7$. Να βρείτε:



α) τις συντεταγμένες του κέντρου K του κύκλου C .

(Μονάδες 12)

β) την ακτίνα R του κύκλου C .

(Μονάδες 8)

γ) την εξίσωση του κύκλου C.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 22214 (4°)

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $M(x,y)$, $A(-1,0)$, $B(1,0)$ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AM}^2 + \overrightarrow{BM}^2 = 9|\overrightarrow{AB}|$.

α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 8$. (Μονάδες 10)

β) Έστω Γ και Δ δύο σημεία του κύκλου τέτοια ώστε $\Gamma\Delta^2 = 32$.

i. Να δείξετε ότι τα σημεία Γ και Δ και η αρχή των αξόνων είναι συνευθειακά σημεία. (Μονάδες 08)

ii. Αν το σημείο M κινείται στον κύκλο, να υπολογίσετε το $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MD}$ (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 22223 (4°)

Σε τρίγωνο ABΓ είναι $\overrightarrow{AB} = (\lambda, \lambda + 1)$, $\overrightarrow{AG} = (3\lambda, \lambda - 1)$ και το σημείο M είναι το μέσο της BΓ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM} = (2\lambda, \lambda)$ (Μονάδες 08)

β) Δίνεται επιπλέον ότι η γωνία $\widehat{BAG} = 90^\circ$.

i. Να υπολογίσετε το λ. (Μονάδες 08)

ii. Αν $\lambda = \frac{1}{2}$ και $A(2, \frac{3}{2})$ να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 22239 (4°)

Σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων Oxy η εξίσωση $3x + 4y = 25$ περιγράφει τη θέση ενός αγωγού ύδρευσης. Σε αυτό το σύστημα θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα κυκλικό σιντριβάνι με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα 2.

α) i. Ποια είναι η εξίσωση του κύκλου που περιγράφει την θέση του σιντριβανιού; (Μονάδες 04)

ii. Να εξετάσετε αν ο αγωγός ύδρευσης διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, προκειμένου να ενωθεί με αυτό. (Μονάδες 05)

iii. Αν ο αγωγός ύδρευσης δεν διέρχεται από το κέντρο του σιντριβανιού, ποιο σημείο του αγωγού ύδρευσης πρέπει να ενωθεί με το κέντρο του σιντριβανιού

ώστε να έχουμε την μικρότερη δυνατή απόσταση, άρα και οικονομικότερη κατασκευή; (Μονάδες 08)

- β) Ο μηχανικός που θέλει να χαράξει έναν ευθύγραμμο δρόμο, κατέληξε στην εξίσωση $\lambda x + y + \lambda - 2 = 0$, με $\lambda \neq 0$. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να βρει για ποια τιμή του λ ο δρόμος αυτός εφάπτεται του σιντριβανιού; (Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 22264 (4°)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x + \lambda y + \lambda - 1 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1), παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που ορίζεται από την εξίσωση (1), ο οποίος εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon: x + y + 2 = 0$. (Μονάδες 9)
- γ) Για $\lambda = 1$, στον κύκλο που προκύπτει από την εξίσωση (1), να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του, που διέρχονται από το σημείο $M(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 22280 (4°)

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή το σημείο $O(0,0)$ θεωρούμε τους κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) με εξισώσεις $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ (1) και $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ (2) αντίστοιχα.

- α) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των δύο κύκλων. (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι οι δύο κύκλοι βρίσκονται ο ένας εξωτερικά του άλλου. (Μονάδες 08)
- γ) Έστω M, N τυχαία σημεία των κύκλων (K, R) και (Λ, ρ) αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση των σημείων M και N . (Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 22508 (4°)

Οι κορυφές A, Γ ενός τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ είναι τα σημεία $(1, 4)$ και $(3, 0)$ αντιστοίχως.

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος $A\Gamma$ γράφεται στη μορφή $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 2)$. (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου, ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα $A\Gamma$ γράφεται στη μορφή $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 5$. (Μονάδες 8)
- γ) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των δύο άλλων κορυφών B, Δ του τετραγώνου. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 33696 (4^ο)

Το κέντρο K ενός κύκλου (c) βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και είναι σημείο της ευθείας (ϵ) : $y=2x-1$. Ο κύκλος (c) έχει ακτίνα $\rho=3\sqrt{2}$ και η ευθεία (ζ) : $x+y-2=0$ εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο A .

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου (c) είναι $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 18$.

(Μονάδες 09)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Η εξίσωση της ευθείας KA είναι $x-y+2=0$.

(Μονάδες 05)

ii. Οι συντεταγμένες του A είναι $(0,2)$.

(Μονάδες 04)

γ) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τριγώνου ALM , όπου M και L είναι τα σημεία τομής της ευθείας (ϵ) με τον κύκλο (c) .

(Μονάδες 07)