

ΦΥΛΛΟ 7

1. Να βρεθεί η εξίσωση κύκλου ο οποίος έχει κέντρο $K(6, 4)$ και διέρχεται από το σημείο $A(2, 1)$.
2. Να βρεθεί η εξίσωση κύκλου ο οποίος έχει διάμετρο AB με $A(7, 5)$ και $B(1, -3)$.
3. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου, ο οποίος έχει ακτίνα $\rho=10$, διέρχεται από το σημείο $A(2, 1)$ και το κέντρο του είναι σημείο της ευθείας $\varepsilon: x-y+1=0$.
4. Να βρεθεί η εξίσωση κύκλου ο οποίος διέρχεται από τα σημεία $A(3, 1)$ και $B(-1, 3)$ και το κέντρο του ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: 3x-y-2=0$.
5. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου, ο οποίος διέρχεται από το σημείο $A(-3, 0)$ και εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon: x+2y=7$ στο σημείο $B(3, 2)$.
6. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος περνά από το σημείο $A(-2, 3)$ και εφάπτεται του άξονα $x'x$ στο σημείο $B(-1, 0)$.
7. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου, ο οποίος εφάπτεται των αξόνων $x'x$ και $y'y$, καθώς και της ευθείας $\varepsilon: y=-\frac{3}{4}x+5$.
8. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται των ευθειών $\varepsilon_1: 2x+y-5=0$ και $\varepsilon_2: 2x+y+15=0$ και το ένα σημείο επαφής είναι το $A(2, 1)$.
9. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου, ο οποίος έχει κέντρο το σημείο $K(1, 3)$ και ορίζει πάνω στην ευθεία $\varepsilon: 3x-4y+14=0$ χορδή μήκους 6.
10. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x - 2y - 2\lambda + 1 = 0$ παριστάνει κύκλο, του οποίου το κέντρο ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: x-2y=3$.
11. Να βρείτε τις σχετικές θέσεις του κύκλου $C: x^2 + y^2 = 5$ και της ευθείας $\varepsilon: y = x + \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.
12. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει ακτίνα $\rho=2$ και εφάπτεται του κύκλου $C_1: x^2 + y^2 = 1$ στο σημείο του $A(1, 0)$.
13. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων, οι οποίοι έχουν ακτίνα $\rho=3$ και εφάπτονται εσωτερικά του κύκλου $C_1: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$.

14. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $C: x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = 0$ στο σημείο του $A(3, 2)$.
15. Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $C: x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$ η οποία :
- i) Είναι παράλληλη στην ευθεία $2x + y = 15$.
 - ii) Είναι κάθετη στην ευθεία $x + 2y = -4$.
16. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $C: x^2 + y^2 = 16$ η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 120^\circ$.
17. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$ και $C_2: x^2 + (y+1)^2 = 9$.
- i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C_1 στο σημείο $A(5, -1)$.
 - ii) Να αποδείξετε ότι η ε εφάπτεται και του κύκλου C_2 .
18. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου $C: x^2 + y^2 - 8x + 8 = 0$ που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Να βρείτε ότι αυτές είναι κάθετες μεταξύ τους.
19. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 10$ και το σημείο $M(4, 2)$. Να βρεθούν :
- i) η θέση του σημείου ως προς τον κύκλο,
 - ii) οι εξισώσεις των εφαπτομένων από το σημείο M προς τον κύκλο,
 - iii) η γωνία των εφαπτομένων.
20. Να βρεθούν οι κοινές εφαπτομένες των κύκλων $C_1: x^2 + y^2 = 9$ και $C_2: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$.
21. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 = 1$ και $C_2: x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$ εφάπτονται εξωτερικά. Να βρείτε το σημείο επαφής και τις εξισώσεις όλων των κοινών τους εφαπτομένων.
22. Δίνεται ο κύκλος $C: (x+3)^2 + (y-5)^2 = 10$ και το σημείο $A(5, -6)$. Να βρείτε το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος AB που άγεται από το A προς τον κύκλο.
23. Δίνεται κύκλος $C: x^2 + y^2 = 5$ και το σημείο $A(3, 1)$. Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας η οποία ορίζεται από τα σημεία επαφής των εφαπτομένων που φέρνουμε από το A προς τον C . Στη συνέχεια να βρείτε την απόσταση του σημείου A από τη χορδή αυτή.
24. Να βρεθεί σημείο M της ευθείας $\varepsilon: x + y = 16$ τέτοιο, ώστε τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το M προς τους κύκλους $C_1: (x-1)^2 + (y-4)^2 = 9$ και $C_2: (x-5)^2 + y^2 = 1$ να είναι ίσα.
25. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M ώστε το εφαπτόμενο τμήμα από το M στον κύκλο να έχει μήκος 5.

26. Δίνεται η εξίσωση $C: x^2 + y^2 - 4\kappa x - 2y + 4\kappa = 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$.
- i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
 - ii) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων C .
 - iii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ όλοι οι κύκλοι C διέρχονται από σταθερό σημείο.
27. Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων $C: x^2 + y^2 - \chi\eta\mu\theta + \gamma\sigma\upsilon\nu\theta - 10 = 0$ ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του.
28. Θεωρούμε τα σταθερά σημεία O και A με $(OA) = 3$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου για τα οποία $\overrightarrow{OM}(\overrightarrow{OM} - 2\overrightarrow{OA}) = 7$.
29. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των χορδών του κύκλου $C: (x-5)^2 + (y+3)^2 = 20$, οι οποίες έχουν ως ένα άκρο τους το σημείο $A(3, 1)$ του C , ανήκουν σε άλλο κύκλο του οποίου να βρείτε την εξίσωση.
30. Θεωρούμε τον κύκλο $C: x^2 + y^2 = 50$ και το σημείο $M(6, -2)$.
- i) Να αποδείξετε ότι το M είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου C .
 - ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε , η οποία ορίζει στον κύκλο C χορδή με μέσο M .