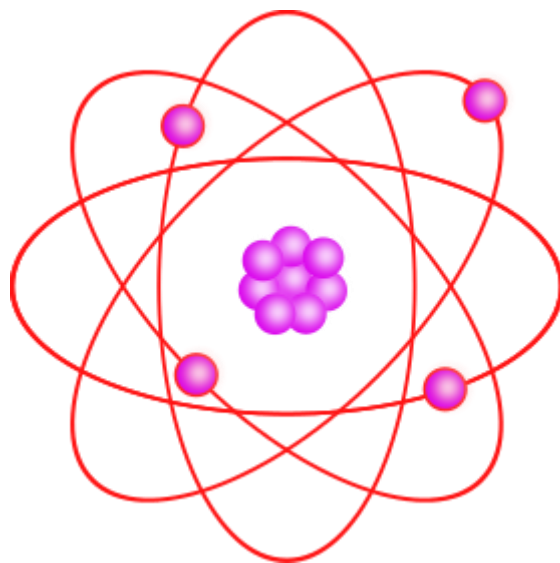


Leo Kastanas

**Ζητήματα Θεωρίας
στη Φυσική της
Γ Λυκείου**

Αποδείξεις τύπων και όχι μόνο



Αθήνα 2024

Αποδείξεις των τύπων της θεωρίας

Τα θέματα που έχουν το τριφυλλάκι (♣) δεν υπάρχουν ως θεωρία στο σχολικό βιβλίο αλλά εκπορεύονται άμεσα ή έμμεσα από αυτήν. Συνεπώς.....

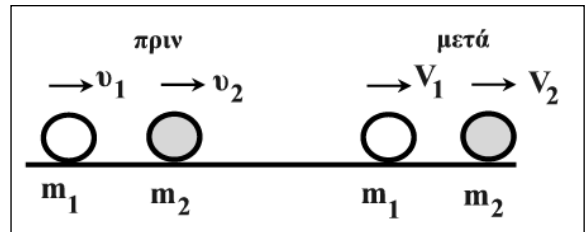
1. ΚΡΟΥΣΕΙΣ

1.1 Δύο σφαίρες με μάζες m_1 και m_2 κινούνται μεταφορικά στην ίδια ευθεία με ταχύτητες v_1 και v_2 . Οι σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά.

I. Να αποδείξετε τις σχέσεις που δίνουν τις ταχύτητες V_1 και V_2 μετά την κρούση.

II. Τι συμβαίνει αν οι μάζες των σφαιρών είναι ίσες;

III. Πως διαμορφώνονται οι τύποι αν η σφαίρα m_2 είναι αρχικά ακίνητη;



Απόδειξη

I. Η κρούση είναι κεντρική και ελαστική και διατηρούνται η ορμή και η κινητική ενέργεια του συστήματος.

$$p_{\sigma, \pi\rho\sigma} = p_{\sigma, \mu\epsilon\tau\alpha} \quad (1)$$

$$K_{\sigma, \pi\rho\sigma} = K_{\sigma, \mu\epsilon\tau\alpha} \quad (2)$$

$$\text{ΑΔΟ: } m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \rightarrow m_1(v_1 - V_1) = m_2(V_2 - v_2) \quad (1)$$

$$\text{ΑΔΚΕ: } \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 V_1^2 + \frac{1}{2}m_2 V_2^2 \rightarrow m_1(v_1 - V_1)(v_1 + V_1) = m_2(V_2 - v_2)(V_2 + v_2) \quad (2)$$

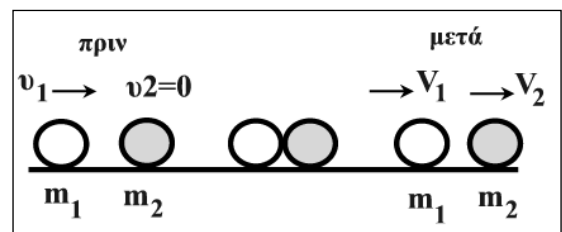
$$\frac{(1)}{(2)} \rightarrow v_1 + V_1 = V_2 + v_2 \rightarrow V_2 = v_1 + V_1 - v_2 \quad (3)$$

$$\text{Από (1)(3)} \rightarrow V_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (4) \quad \text{και από (1)\&(4)} \rightarrow V_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad (5)$$

II. Αν $m_1 = m_2$, τότε τα σώματα **ανταλλάσσουν ταχύτητες**: $V_1 = v_2$ και $V_2 = v_1$

III. Αν $v_2 = 0$, δηλαδή το m_2 είναι ακίνητο πριν την κρούση, τότε μετά την κρούση από τις (1) και (2) έχουμε:

$$V_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} \quad V_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$



i. Αν $m_1 = m_2$, τότε τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες:

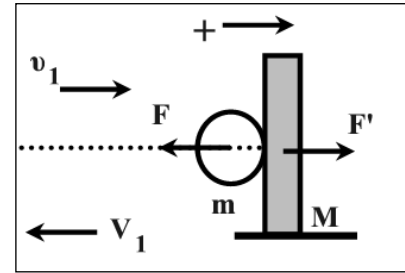
$$V_1 = 0 \quad \text{και} \quad V_2 = v_1$$

ii. Αν $m_1 \gg m_2$ τότε $V_1 = v_1$ και $V_2 = 2v_1$, δηλαδή το βαρύτερο συνεχίζει με την ίδια ταχύτητα και το πολύ ελαφρύτερο αποκτά τη διπλάσια ταχύτητα του m_1 .

iii. Αν $m_1 \ll m_2$ τότε $V_1 = -v_1$ και $V_2 = 0$, δηλαδή το ελαφρύτερο γυρίζει πίσω με την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα και το βαρύτερο μένει ακίνητο.

1.2 Ελαστική μετωπική κρούση με τοίχο

Θεωρούμε ότι συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά η σφαίρα μάζας m με τον ακίνητο κατακόρυφο τοίχο. Η ταχύτητα της σφαίρας μόλις πριν την κρούση είναι v_1 . Να αποδείξετε ότι η ταχύτητα της σφαίρας αμέσως μετά την κρούση έχει μέτρο $|V_1| = v_1$.



Απόδειξη

Η σύγκρουση είναι μεταξύ της σφαίρας μάζας m και της Γης στην οποία είναι ενσωματωμένος ο τοίχος με μάζα $M \gg m$. Η Γη θεωρείται ακίνητη ως προς τη σφαίρα. Από τη διατήρηση της ορμής και της κινητικής ενέργειας του μονωμένου συστήματος σφαίρας-Γης, με δεδομένο ότι $m \approx 0$, έχουμε

$$\text{Τότε: } V_1 = \frac{m-M}{m+M}v_1 \rightarrow V_1 = \frac{-M}{M}v_1 \rightarrow V_1 = -v_1 \rightarrow |V_1| = v_1$$

- Η ταχύτητα της Γης μετά την κρούση είναι $V_2 = \frac{2m}{m+M}v_1 \approx 0 \rightarrow V_2 = 0$

1.3 Πλάγια ελαστική κρούση με το λείο πάτωμα.

Μια σφαίρα μάζας m , με ορμή $p_1 = p = mv_1$ συγκρούεται πλάγια και ελαστικά με χαλύβδινη λεία οριζόντια επιφάνεια υπό γωνία φ ως προς την κατακόρυφο που διέρχεται από το σημείο κρούσης και ανακλάται. **I.** Να αποδείξετε ότι το μέτρο της ταχύτητας πρόσπτωσης είναι ίσο με το μέτρο της ταχύτητας ανάκλασης και η γωνία πρόσπτωσης ίση με τη γωνία ανάκλασης.

♣ **II.** Αν ο χρόνος κρούσης είναι Δt να αποδείξετε τη σχέση που δίνει τη δύναμη που ασκεί το πάτωμα στη σφαίρα

Απόδειξη

I. Η σφαίρα προσκρούει στο πάτωμα με ταχύτητα v_1 υπό γωνία φ και ανακλάται με ταχύτητα v_2 υπό τη γωνία, θ . Ο προσανατολισμός των αξόνων φαίνεται στο σχήμα.

Στον άξονα x , η $\Sigma F_{\varepsilon_{x,x}} = 0 \rightarrow p_{1x} = p_{2x} \rightarrow mv_{1x} = mv_{2x} \rightarrow v_{1x} = v_{2x}$ (1)

Στον άξονα y θεωρούμε ότι συγκρούονται ελαστικά η σφαίρα μάζας, m με την ακίνητη Γη μάζας, $M \gg m$. Η σφαίρα ανακλάται στον άξονα y με ταχύτητα:

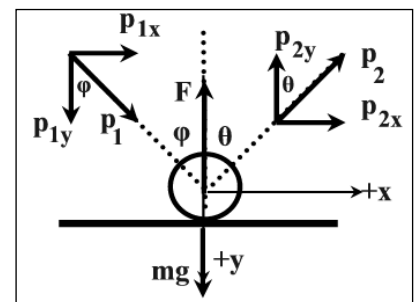
$$v_{2y} = \frac{m-M}{m+M}v_{1y} \rightarrow v_{2y} = -v_{1y} \quad (2)$$

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} \quad \text{και} \quad v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} \quad (3)$$

Από (1)(2)(3) $\rightarrow v_1 = v_2 = v$ (3)

Και από την ΑΔΟ στον οριζόντιο άξονα x

$$p_{1x} = p_{2x} \rightarrow mv_{1x} = mv_{2x} \rightarrow v_1 \eta \mu \varphi = v_2 \eta \mu \theta \xrightarrow{(3)} \varphi = \theta$$



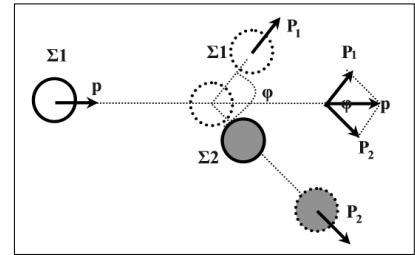
♣ **II.** Η μεταβολή ορμής ισούται με τη μεταβολή ορμής μόνο στον άξονα των y άρα:

$$\Delta p = \Delta p_y = p_{2y} - p_{1y} = mv_{2y} - mv_{1y} = -2mv_{1y} = -2mv_1 \sin \varphi$$

Στον άξονα y ισχύει: $\Sigma F_y = \frac{\Delta p_y}{\Delta t} \rightarrow F + mg = -\frac{2mv_1 \sin \varphi}{\Delta t} \rightarrow F = -mg - \frac{2mv_1 \sin \varphi}{\Delta t}$

Κατά μέτρο: $|F| = mg + \frac{2mv_1 \sin \varphi}{\Delta t}$

♣1.4 Πλάγια ελαστική κρούση: Σφαίρα Σ_1 , μάζας m_1 κινείται με ταχύτητα u και συγκρούεται έκκεντρα και ελαστικά με άλλη σφαίρα Σ_2 , ίσης μάζας $m_2=m_1=m$, που αρχικά είναι ακίνητη. Μετά την κρούση οι δύο σφαίρες κινούνται με ταχύτητες V_1, V_2 . Να αποδείξετε ότι οι ταχύτητες μετά την κρούση σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $\varphi=90^\circ$.



Απόδειξη

$$\text{Από την ΑΔΚΕ} \rightarrow \frac{1}{2}m_1u^2 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 \rightarrow u^2 = V_1^2 + V_2^2 \quad (1)$$

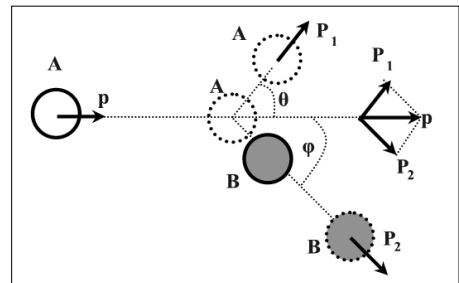
Από την ΑΔΟ ισχύει η διανυσματική σχέση $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$.

Από αυτήν ισχύει η σχέση των μέτρων έχουμε:

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\varphi \rightarrow u^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos\varphi \rightarrow 2V_1V_2\cos\varphi = 0 \rightarrow \varphi = 90^\circ$$

Διότι αν ήταν $V_1=0$ η κρούση θα ήταν κεντρική.

♣1.5 Σφαίρα Σ_1 , μάζας m_1 κινείται με ταχύτητα u_1 και συγκρούεται έκκεντρα και ελαστικά με άλλη σφαίρα Σ_2 , μάζας m_2 , που αρχικά είναι ακίνητη. Μετά την κρούση οι δύο σφαίρες κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις με ταχύτητες V_1, V_2 . Να αποδείξετε ότι οι μάζες των σφαιρών είναι ίσες.



Απόδειξη

$$\text{Η ορμή του συστήματος διατηρείται: } \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \rightarrow p^2 = p_1^2 + p_2^2 \quad (1)$$

Η κρούση είναι ελαστική, άρα η κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή.

$$K_{\text{προ}} = K_{\text{μετα}} \rightarrow K = K_1 + K_2 \rightarrow \frac{p^2}{2m_1} = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} \rightarrow \frac{p^2}{2m_1} - \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_2^2}{2m_2} \rightarrow \frac{p^2 - p_1^2}{m_1} = \frac{p_2^2}{m_2} \quad (2)$$

$$\text{Από (1)(2)} \rightarrow m_1 = m_2$$

2. Κίνηση στερεού σώματος

2.1 Τροχός κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει) με ταχύτητα κέντρου μάζας (cm) v_{cm} . Να αποδείξετε τις συνθήκες κύλισης και να υπολογίσετε τις ταχύτητες των σημείων A, B, Γ, Δ συναρτήσει της ταχύτητας v_{cm} του κέντρου μάζας.

Απόδειξη

Στην κύλιση (ΧΟ) τα σημεία της περιφέρειας ενός τροχού ακτίνας R, διαγράφουν σε χρόνο dt, τόξο $ds=R \cdot d\theta$ ίσο με τη μετατόπιση dx_{cm} του κέντρου μάζας, $dx_{cm}=ds$.

Οι τρεις συνθήκες της κύλισης:

1^η: Η μετατόπιση του cm είναι ίση με το μήκος του τόξου περιστροφής:

$$dx_{cm}=R \cdot d\theta$$

2^η: Η ταχύτητα του cm: $v_{cm}=\frac{ds}{dt}=\frac{R \cdot d\theta}{dt} \rightarrow v_{cm}=\omega R$

3^η: Η επιτάχυνση του cm: $a_{cm}=\frac{dv_{cm}}{dt}=\frac{R d\omega}{dt} \rightarrow a_{cm}=a_{\gamma v} \cdot R$

Το κέντρο μάζας του στερεού είναι το μόνο σημείο που κάνει μόνο μεταφορική κίνηση και η ταχύτητα του είναι η v_{cm} . Όλα τα άλλα σημεία μεταφέρονται με ταχύτητα v_{cm} και ταυτόχρονα περιστρέφονται με γωνιακή ταχύτητα ω . Τα σημεία αυτά έχουν και γραμμική ταχύτητα λόγω περιστροφής $v=\omega r$, όπου r η απόστασή τους από το cm.

Η ταχύτητα $\vec{v}$ κάθε τυχαίου σημείου του τροχού είναι :

$$\vec{v}=\vec{v}_{cm}+\vec{\omega} \cdot \vec{r}$$

Το μέτρο της ταχύτητας του κάθε σημείου είναι : $v=\sqrt{v_{cm}^2+(\omega r)^2+2v_{cm}(\omega r)\cos\theta}$

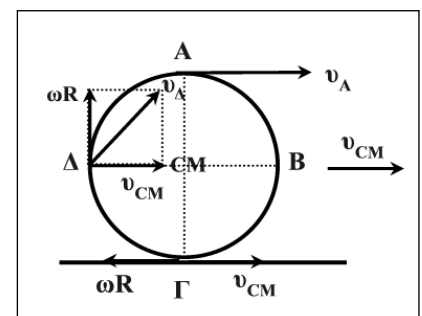
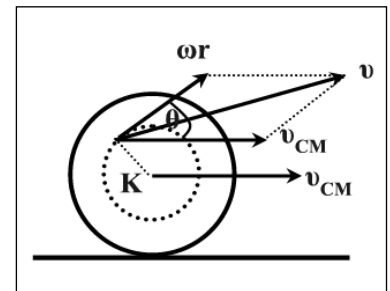
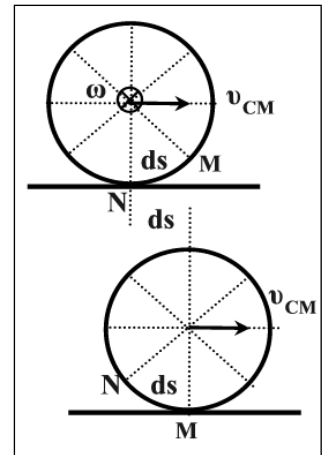
όπου θ η γωνία που σχηματίζουν οι ταχύτητες $\vec{v}_{cm}$ και $\vec{\omega} \cdot \vec{r}$

• Οι ταχύτητες τεσσάρων χαρακτηριστικών σημείων είναι:

$$v_A=v_{cm}+\omega R=2v_{cm} \rightarrow v_A=2v_{cm}$$

$$v_{\Gamma}=v_{cm}-\omega R=0 \rightarrow v_{\Gamma}=0$$

$$v_{\Delta}=v_B=\sqrt{v_{cm}^2+(\omega R)^2}=\sqrt{v_{cm}^2+v_{cm}^2}=v_{cm}\sqrt{2} \rightarrow v_{\Delta}=v_B=v_{cm}\sqrt{2}$$



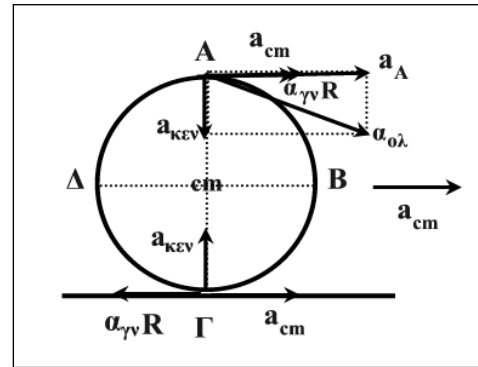
❖ 2.2 Τροχός ακτίνας R , κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει) σε οριζόντιο επίπεδο με επιτάχυνση κέντρου μάζας (cm) a_{cm} . Κάποια χρονική στιγμή που ο τροχός έχει γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ να γράψετε τους τύπους που δίνουν τις επιταχύνσεις (i) του σημείου A που απέχει απόσταση $2R$ από το οριζόντιο έδαφος και (ii) του σημείου Γ που βρίσκεται σε επαφή με το έδαφος.

Απόδειξη

Το cm είναι το μόνο σημείο που έχει μόνο μεταφορική επιτάχυνση a_{cm} . Τα άλλα έχουν τη μεταφορική a_{cm} , την επιτρόχια λόγω περιστροφής $a_{\gamma\Gamma}$ και την κεντρομόλο εφόσον ο τροχός κινείται και έχει γωνιακή ταχύτητα, ω , διότι $a_{κεν} = \omega^2 r$. Μόνο η επιτρόχια επιτάχυνση των σημείων της περιφέρειας λόγω στροφικής κίνησης έχει ίδιο μέτρο με την επιτάχυνση a_{cm} κέντρου μάζας cm.

Η επιτάχυνση $\vec{a}$ κάθε τυχαίου σημείου του τροχού είναι :

$$\vec{a} = \vec{a}_{cm} + \vec{a}_{\gamma\Gamma} + \vec{a}_{κεν}$$



Στο σημείο A η επιτρόχια επιτάχυνση είναι $a_A = a_{cm} + a_{\gamma\Gamma} R = 2a_{cm}$

Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι $a_{κεν} = \omega^2 R$, όπου ω η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα.

Η σύνθεση των a_A και $a_{κεν}$ δίνει τη στιγμιαία επιτάχυνση του σημείου A που απέχει απόσταση $2R$ από το επίπεδο κύλισης, $a_{ολ,A} = \sqrt{a_A^2 + a_{κεν}^2} \rightarrow a_{ολ,A} = \sqrt{4a_{cm}^2 + (\omega^2 R)^2} \rightarrow a_{ολ,A} = \sqrt{4a_{cm}^2 + \omega^4 R^2}$

Στο σημείο Γ η επιτρόχια επιτάχυνση είναι $a_{\Gamma} = a_{cm} - a_{\gamma\Gamma} R = 0$.

Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι $a_{κεν} = \omega^2 R$, όπου ω η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα. Η σύνθεση των a_{Γ} και $a_{κεν}$ δίνει τη στιγμιαία επιτάχυνση του σημείου Γ που εφάπτεται κάθε φορά στο επίπεδο κύλισης, $a_{ολ,\Gamma} = a_{κεν} = \omega^2 R$.

2.3 Σε ένα σώμα δρουν δύο δυνάμεις F_1 και F_2 με ίσα μέτρα $F_1 = F_2 = F$, παράλληλες διευθύνσεις, αντίθετες φορές και διαφορετικά σημεία εφαρμογής. Δυο τέτοιες δυνάμεις αποτελούν ζεύγος δυνάμεων. Αν η απόσταση των φορέων των δυο δυνάμεων είναι d . Να αποδείξετε ότι η αλγεβρική τιμή της ροπής του ζεύγους ως προς κάποιο σημείο A που απέχει απόσταση x_1 από τον φορέα της δύναμης F_1 και x_2 από τον φορέα της δύναμης F_2 , θα είναι

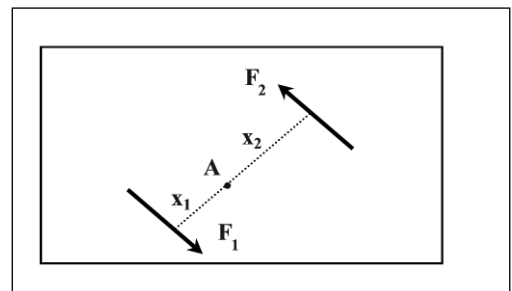
$$\tau = F \cdot d$$

Απόδειξη

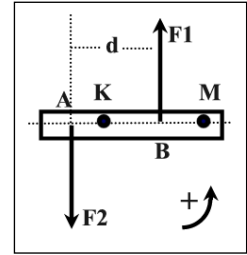
Υπολογίζουμε τη συνολική ροπή ως προς το σημείο A που απέχει αποστάσεις x_1 και x_2 από τους φορείς των δύο δυνάμεων

$$\tau = \Sigma \tau_A = F_1 x_1 + F_2 x_2 = F(x_1 + x_2) \rightarrow \tau = F \cdot d$$

• Το ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε και ως προς οποιοδήποτε άλλο σημείο. Επομένως, η ροπή ζεύγους δυνάμεων είναι ίδια ως προς οποιοδήποτε σημείο, δηλαδή είναι ανεξάρτητη από τη θέση του άξονα περιστροφής.



♣2.4 Στη ράβδο του σχήματος ασκούνται δύο παράλληλες δυνάμεις F_1 και F_2 στα σημεία A και B που απέχουν απόσταση $AB=d$. Οι δυνάμεις έχουν ίσα μέτρα $F_1=F_2=F$ και αντίθετες κατευθύνσεις. Να αποδείξετε ότι η συνολική ροπή των δύο δυνάμεων είναι ίδια ως προς τα σημεία K και M.



Απάντηση

Υπολογίζω τη συνολική ροπή ως προς το K:

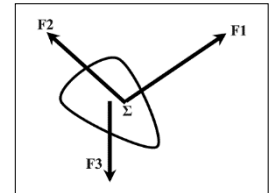
$$\tau_K = F_1(KB) + F_2(KA) = F[(KA) + (KB)] = F(AB) = Fd \rightarrow \tau_K = Fd \quad (1)$$

Υπολογίζω τη συνολική ροπή ως προς το M:

$$\tau_M = F_2(MA) - F_1(MB) = F[(MA) - (MB)] = F(AB) = Fd \rightarrow \tau_M = Fd \quad (2)$$

Άρα η ροπή του ζεύγους των δυνάμεων είναι το ίδιο για κάθε σημείο.

♣2.5 Σε ένα στερεό σώμα που ισορροπεί ασκούνται μόνο τρεις (3) δυνάμεις. Να αποδείξετε ότι οι φορείς και των τριών δυνάμεων διέρχονται από το ίδιο σημείο.

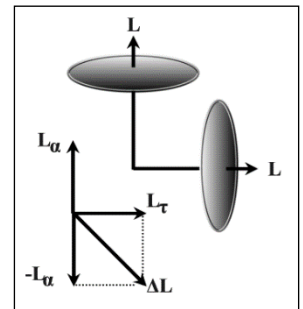


Απόδειξη

Το σώμα ισορροπεί συνεπώς $\Sigma \tau = 0 \rightarrow \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$. Αν πάρουμε τις ροπές των δύο δυνάμεων ως προς το σημείο τομής τους, Σ , τότε αυτές είναι μηδενικές. Άρα πρέπει και η ροπή της τρίτης δύναμης να είναι μηδέν, δηλαδή $\tau_3 = 0$, ώστε να επαληθεύεται η συνθήκη $\Sigma \tau = 0$. Οπότε θα πρέπει και ο φορέας της τρίτης δύναμης να διέρχεται από το ίδιο σημείο, Σ .

♣ 2.6 Δεν είναι τύπος της θεωρίας αλλά δείχνει τον διανυσματικό χαρακτήρα της στροφορμής. Ο δίσκος του σχήματος στρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονα με στροφομή σταθερού μέτρου L . Αν στρέψουμε τον άξονα περιστροφής του κατά 90° χωρίς να μεταβάλλουμε το μέτρο της στροφορμής του, πόσο θα είναι

- (i) η μεταβολή του μέτρου της στροφορμής και
- (ii) το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής;



Απόδειξη

- (i) Το μέτρο της στροφορμής παραμένει αναλλοίωτο ίση με L , συνεπώς $\Delta|L| = 0$.
- (ii) Η μεταβολή της στροφορμής (διανυσματικά) θα είναι:

$$\vec{\Delta L} = \vec{L}_\tau - \vec{L}_\alpha = \vec{L}_\tau + (-\vec{L}_\alpha)$$

Από το σχήμα φαίνεται ότι το μέτρο μεταβολής της στροφορμής θα είναι η συνισταμένη των μέτρων των $\vec{L}_\tau$ και του $-\vec{L}_\alpha$ που αμφότερα είναι ίσα με L . Η μεταβολή του μέτρου της στροφορμής είναι $\Delta|L| = 0$.

Το μέτρο της μεταβολής είναι: $|\Delta L| = \sqrt{|\vec{L}_\alpha|^2 + |\vec{L}_\tau|^2} = \sqrt{L^2 + L^2} = L\sqrt{2} \rightarrow |\Delta L| = L\sqrt{2}$

3. Ταλαντώσεις

3.1 Υλικό σημείο μάζας m εκτελεί ΑΑΤ.

I. Να αποδείξετε τη σχέση που δίνει τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο υλικό σημείο κατά μήκος της τροχιάς του σε συνάρτηση με το χρόνο και σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας και να κάνετε τη γραφική παράσταση της δύναμης σε σχέση με την απομάκρυνση.

II. Να αποδείξετε τη σχέση που δίνει την περίοδο της ΑΑΤ σε σχέση με τη μάζα m και τη σταθερά επαναφοράς D .

Απόδειξη

Η εξίσωση απομάκρυνσης είναι $x=A\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$ και η εξίσωση επιτάχυνσης $a=-a_0\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$.

Η δύναμη επαναφοράς είναι η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο υλικό σημείο που κάνει ΑΑΤ στην διεύθυνση της κίνησης. Έχει κατεύθυνση πάντοτε προς τη θέση ισορροπίας και είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου με την ίδια φάση με την επιτάχυνση.

$$\Sigma F=ma=m[-a_0\eta\mu(\omega t+\varphi_0)]=-ma_0\eta\mu(\omega t+\varphi_0)\rightarrow \Sigma F=-\Sigma F_0\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_0)$$

όπου $|\Sigma F_0|=ma_0=m\cdot A\cdot\omega^2$, το πλάτος δύναμης ή μέγιστη τιμή δύναμης

Η δύναμη επαναφοράς είναι και γραμμική συνάρτηση της απομάκρυνσης x :

$$\Sigma F=-\Sigma F_0\cdot\eta\mu(\omega t+\varphi_0)=-mA\cdot\omega^2\eta\mu(\omega t+\varphi_0)=-m\omega^2x=-Dx\rightarrow \Sigma F=-Dx$$

Όπου $D=m\cdot\omega^2$ η σταθερά επαναφοράς του ταλαντωτή.

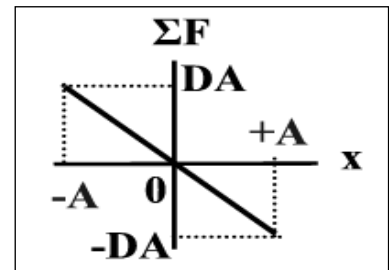
Το πρόσημο (-) δείχνει ότι η δύναμη είναι πάντα αντίθετη της απομάκρυνσης, x .

Η γραφική παράσταση της δύναμης επαναφοράς ως προς x .

Όταν $x=0$ $\Sigma F=0$

Όταν $x=+A$ $\Sigma F=-DA=-\Sigma F_0$

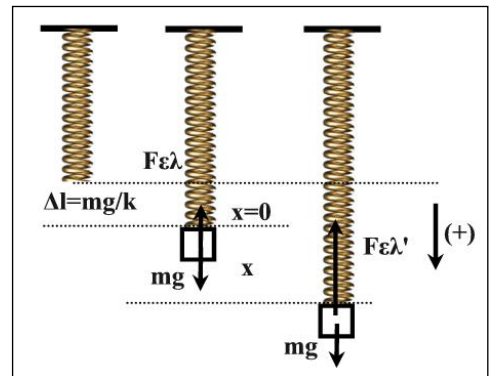
Όταν $x=-A$ $\Sigma F=+DA=+\Sigma F_0$



II. Η σταθερά επαναφοράς ισούται με: $D=m\omega^2\rightarrow\omega=\sqrt{\frac{D}{m}}$ και η συχνότητα $f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$

Η περίοδος της ΑΑΤ: $T=\frac{2\pi}{\omega}\rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$

3.2 I. Σώμα μάζας m ισορροπεί δεμένο στο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k , το άλλο άκρο του οποίου έχει στερεωθεί ακλόνητα σε οροφή. Απομακρύνουμε το σώμα προς τα κάτω από τη θέση ισορροπίας του και το αφήνουμε ελεύθερο χωρίς αρχική ταχύτητα. Να αποδείξετε ότι κάνει ΑΑΤ και να υπολογίσετε την περίοδο της.



Απόδειξη

Στη θέση ισορροπίας η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι, $\Delta\ell$,

και η δύναμη του ελατηρίου, $F_{ελ}=k\Delta\ell$

Από τη συνθήκη ισορροπίας $\Sigma F=0\rightarrow mg-k\Delta\ell=0\rightarrow$

$$\rightarrow mg=k\Delta\ell \quad (1)$$

Σε τυχαία θετική απομάκρυνση x από τη ΘΙ η δύναμη του ελατηρίου είναι $F_{ελ'}=k(\Delta\ell+x)$

Ισχύει: $\Sigma F=mg-F_{ελ'}\rightarrow \Sigma F=mg-k(\Delta\ell+x)\rightarrow \Sigma F=-kx$ όπου $D=k$

Η περίοδος είναι $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}\rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

II. Αν το σύστημα ταλαντώνεται σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ να δείξετε ότι η σταθερά επαναφοράς είναι και πάλι $D=k$.

Απόδειξη

Από τη συνθήκη ισορροπίας $\Sigma F_x = 0 \rightarrow mg\eta\mu\varphi - k\Delta\ell = 0 \rightarrow mg\eta\mu\varphi = k\Delta\ell$ (1)

Σε τυχαία θετική απομάκρυνση x από τη ΘΙ η δύναμη του ελατηρίου είναι $F_{ελ'} = k(\Delta\ell + x)$

Ισχύει : $\Sigma F = mg\eta\mu\varphi - F_{ελ'} \rightarrow \Sigma F = mg\eta\mu\varphi - k(\Delta\ell + x) \rightarrow \Sigma F = -kx$ όπου $D=k$

3.3 Υλικό σημείο είναι δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς k το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Ασκούμε οριζόντια δύναμη F και απομακρύνουμε το σώμα αργά από τη θέση ισορροπίας του κατά $x_1 = A$. Να αποδείξετε ότι η ενέργεια της ταλάντωσης είναι $E = \frac{1}{2}kA^2$

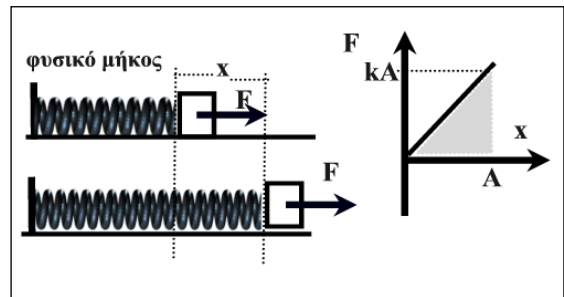
Απόδειξη

Η δύναμη F που ασκούμε επιμηκύνει αργά το ελατήριο κατά x . Συνεχώς ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \rightarrow F = F_{ελ} = kx, \text{ για } 0 \leq x \leq +A$$

Το έργο που κάνει η F αποθηκεύεται στο ελατήριο ως δυναμική ενέργεια ελατηρίου και ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου στη γραφική παράσταση ($F-x$). Όταν αφήσουμε το σύστημα να κάνει ΑΑΤ ξεκινάει με αυτήν την ενέργεια ταλάντωσης η οποία διατηρείται ως ποσότητα σταθερή:

$$W = E = \frac{1}{2}kA \cdot A = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow E = \frac{1}{2}kA^2$$



3.4 Σε μια ΑΑΤ με γωνιακή συχνότητα ω και πλάτος A να δείξετε ότι η ταχύτητα v κάποια χρονική στιγμή που η απομάκρυνση είναι x , δίνεται από την εξίσωση $v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$

Απόδειξη

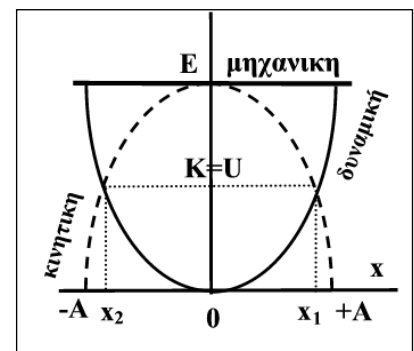
Από την ΑΔΕ ταλαντωτή : $\frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow m\omega^2A^2 = m\omega^2x^2 + mv^2 \rightarrow v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$

3.5 Υλικό σημείο κάνει ΑΑΤ σταθεράς επαναφοράς D με πλάτος A . Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των ενεργειών E , U και K ως προς την απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας.

Ενέργεια της ΑΑΤ: $E = K + U = \frac{1}{2}DA^2 = \text{σταθερή}$

Δυναμική ενέργεια: $U = \frac{1}{2}Dx^2$ ($x=0$ $U=0$, $x=\pm A$, $U=E$)

Κινητική ενέργεια : $K = E - \frac{1}{2}Dx^2$, ($x=0$ $K=E$, $x=\pm A$, $K=0$)



Οι δύο παραβολές τέμνονται εκεί όπου $K=U$, δηλαδή σε δύο θέσεις που είναι $x_1 = +A\sqrt{2}/2$ και $x_2 = -A\sqrt{2}/2$

3.6 Υλικό σημείο κάνει ΑΑΤ σταθεράς επαναφοράς D με πλάτος A . Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των ενεργειών E , U και K ως προς το χρόνο t και χρονικό διάστημα $[0, T]$, όπου T η περίοδος. Δίνεται ότι για $t=0$ $x=0$ και $v>0$.

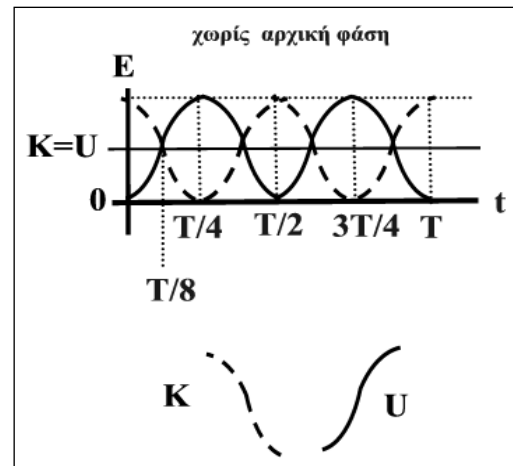
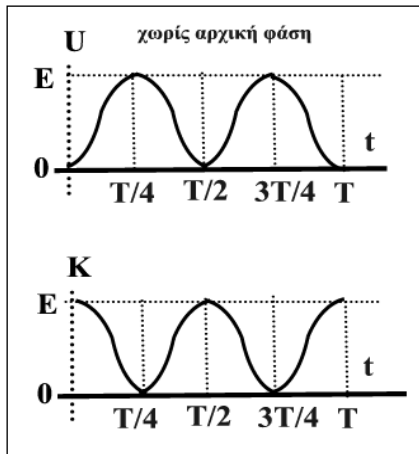
Δυναμική ενέργεια: $U = \frac{1}{2}Dx^2 \rightarrow U = \frac{1}{2}DA^2\eta\mu^2(\omega t + \phi_0) \rightarrow U = E \cdot \eta\mu^2(\omega t + \phi_0)$

Κινητική ενέργεια: $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\nu_0^2\sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \phi_0) \rightarrow K = E \cdot \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \phi_0)$

Οι γραφικές παραστάσεις ως προς το χρόνο για $\phi_0=0$

$$U = E \cdot \eta\mu^2(\omega t)$$

$$K = E \cdot \sigma\upsilon\nu^2(\omega t)$$



♣3.7 Σώμα μάζας m ισορροπεί δεμένο στο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k , το άλλο άκρο του οποίου έχει στερεωθεί ακλόνητα σε οροφή. Απομακρύνουμε το σώμα προς τα κάτω από τη θέση ισορροπίας του κατά A και το αφήνουμε ελεύθερο, χωρίς αρχική ταχύτητα να κάνει ΑΑΤ. Δείξτε ότι το έργο της δύναμης, F , που ασκήσαμε ισούται με την ενέργεια της ταλάντωσης.

Απόδειξη

I. Το σώμα ισορροπεί με το ελατήριο ανοιγμένο κατά, d , όπου: $\Sigma F=0 \rightarrow mg - kd=0 \rightarrow d=mg/k$. (1)

Κατά τη μετατόπιση του σώματος προς τα κάτω από τη θέση ισορροπίας του κατά A , ασκούνται, η μεταβλητή δύναμη F του χεριού μας, το βάρος mg και η δύναμη του ελατηρίου $F_{ελ}$. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι μηδέν. Γράφουμε το ΘΜΚΕ για να υπολογίσουμε το έργο W_F , της δύναμης F .

$$W_F + W_{mg} + W_{ελ} = \Delta K \quad (2)$$

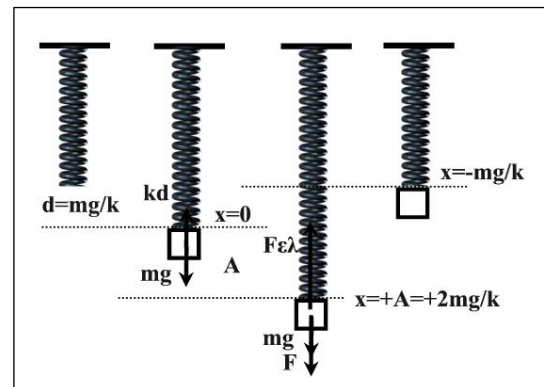
$$W_{mg} = mg \cdot A \quad (3)$$

$$W_{ελ} = U_{ελ, αρχ} - U_{ελ, τελ} = \frac{1}{2}kd^2 - \frac{1}{2}k(d+A)^2 \quad (4)$$

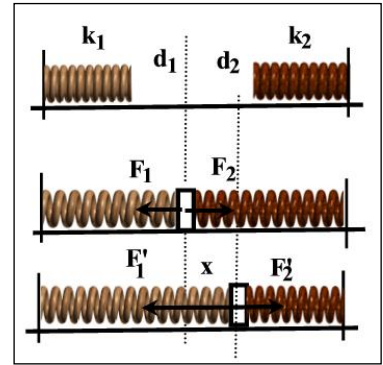
$$\Delta K = 0 \quad (5)$$

$$(1)(2)(3)(4)(5): W_F + mgA + \frac{1}{2}kd^2 - \frac{1}{2}k(d+A)^2 = 0 \rightarrow W_F + mgA + \frac{1}{2}kd^2 - \frac{1}{2}kd^2 - kdA - \frac{1}{2}kA^2 = 0 \rightarrow$$

$$W_F = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow W_F = E$$



♣3.8 Δύο ελατήρια με σταθερές k_1, k_2 είναι οριζόντια και στερεωμένα σε ακλόνητα σημεία. Επιμηκύνουμε τα ελατήρια και συνδέουμε μεταξύ τους σώμα Σ που μπορεί να κινείται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές. Το σύστημα αρχικά ισορροπεί. Απομακρύνουμε το σώμα από τη θέση ισορροπίας και το αφήνουμε ελεύθερο να ταλαντωθεί. Δείξτε ότι οι ταλαντώσεις είναι απλές αρμονικές και η σταθερά επαναφοράς, D , ίση με $D=k_1+k_2$.



Απόδειξη

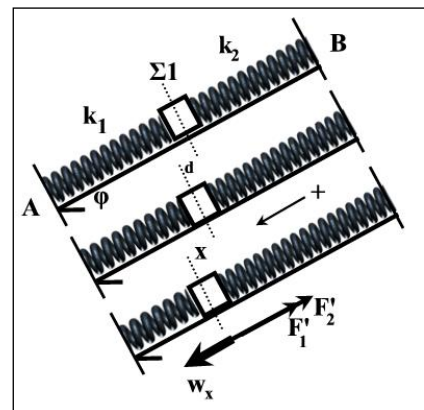
Το σώμα ισορροπεί με τα ελατήρια να είναι ανοιγμένα κατά d_1 και d_2 αντίστοιχα. Το σώμα δέχεται δύο αντίθετες δυνάμεις από τα ελατήρια, τις $F_1=k_1d_1$ και $F_2=k_2d_2$.

$$\Sigma F=0 \rightarrow F_2-F_1=0 \rightarrow k_2d_2=k_1d_1 \quad (1)$$

Θεωρούμε ως θετική τη φορά προς τα δεξιά. Σε μια τυχαία θετική απομάκρυνση, x , ($x < d_2$) το σώμα δέχεται από τα ελατήρια τις δυνάμεις F_1' και F_2' . Και τα δύο ελατήρια είναι ανοιγμένα. Το k_1 είναι ανοιγμένο προς τα δεξιά κατά d_1+x και ασκεί δύναμη προς τα αριστερά, μέτρου $F_1'=k_1(d_1+x)$. Το ελατήριο k_2 είναι ανοιγμένο προς τα αριστερά κατά d_2-x και ασκεί δύναμη προς τα δεξιά μέτρου $F_2'=k_2(d_2-x)$.

$$\Sigma F = F_2' - F_1' = k_2(d_2-x) - k_1(d_1+x) = k_2d_2 - k_2x - k_1d_1 - k_1x \xrightarrow{(1)} \Sigma F = -(k_1+k_2)x \rightarrow D=k_1+k_2.$$

♣3.9 Λείο κεκλιμένο επίπεδο έχει γωνία κλίσης, φ . Στα σημεία A και B στερεώνουμε τα άκρα δύο ιδανικών ελατηρίων με σταθερές k_1 και k_2 αντίστοιχα. Στα ελεύθερα άκρα των ελατηρίων, δένουμε σώμα Σ_1 , μάζας M και το κρατάμε στη θέση όπου τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος (όπως φαίνεται στο σχήμα). Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ αφήνουμε το σώμα Σ_1 ελεύθερο. Ως θετική θεωρούμε τη φορά από το B προς το A. Να αποδείξετε ότι το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D=k_1+k_2$.



Απόδειξη

Στη θέση ισορροπίας τα ελατήρια είναι παραμορφωμένα κατά d , σε σχέση με τα φυσικά τους μήκη. Το k_1 συσπειρωμένο και το k_2 ανοιγμένο με τις δυνάμεις του ελατηρίου $F_1=k_1d$ και $F_2=k_2d$ αντίστοιχα.

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow Mg\eta\mu\varphi - F_1 - F_2=0 \rightarrow Mg\eta\mu\varphi - k_1d - k_2d=0 \rightarrow Mg\eta\mu\varphi = (k_1+k_2)d \quad (1)$$

Σε τυχαία θετική απομάκρυνση x οι δυνάμεις των ελατηρίων έχουν γίνει $F_1'=k_1(d+x)$ και $F_2=k_2(d+x)$.

$$\Sigma F_x = Mg\eta\mu\varphi - F_1' - F_2' = Mg\eta\mu\varphi - k_1(d+x) - F_2 = k_2(d+x) \xrightarrow{(1)} \Sigma F_x = -(k_1+k_2)x.$$

Άρα κάνει ΑΑΤ με σταθερά επαναφοράς $D=k_1+k_2$.

♣3.10 Σύστημα εκτελεί φθίνουσες ταλαντώσεις υπό την επίδραση εξωτερικής δύναμης απόσβεσης που δίνεται από τη σχέση $F=-bv$, όπου b η σταθερά απόσβεσης. Το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται εκθετικά με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $A_k=A_0 e^{-\Lambda t}$, με $t=kT$ και $k=0,1,2..$ Να αποδείξετε ότι ο λόγος δύο διαδοχικών μέγιστων απομακρύνσεων προς την ίδια κατεύθυνση είναι σταθερός και ίσος με, $\frac{A_k}{A_{k+1}} = e^{\Lambda T}$.

Απόδειξη

Ο λόγος απόσβεσης είναι ο λόγος δύο διαδοχικών πλατών προς την ίδια πλευρά, δηλαδή

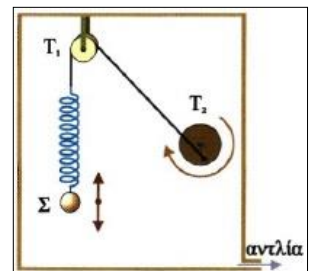
$$\frac{A_0}{A_1} = \dots = \frac{A_k}{A_{k+1}}$$

Για k πλήθος ταλαντώσεων, το πλάτος είναι: $A_k = A_0 e^{-\Lambda k T}$

Για $k+1$ πλήθος ταλαντώσεων, το πλάτος είναι: $A_{k+1} = A_0 e^{-\Lambda(k+1)T}$

$$\frac{A_k}{A_{k+1}} = \frac{A_0 e^{-\Lambda k T}}{A_0 e^{-\Lambda(k+1)T}} = e^{-\Lambda k T + \Lambda k T + \Lambda T} \rightarrow \frac{A_k}{A_{k+1}} = e^{\Lambda T} > 1$$

♣3.11 Σώμα μάζας m είναι δεμένο στην άκρη ελατηρίου σταθεράς k και κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση με μικρή αλλά όχι μηδενική απόσβεση, b . Η συχνότητα του διεγέρτη είναι $f_d > f_0$, όπου f_0 η ιδιοσυχνότητα του συστήματος $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/m}$. Πως πρέπει να μεταβάλλουμε τη συχνότητα του διεγέρτη για να φέρουμε το σύστημα σε συντονισμό.



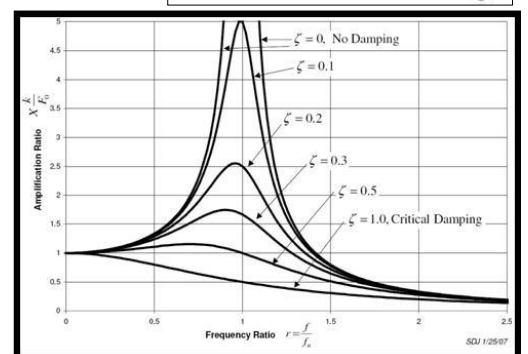
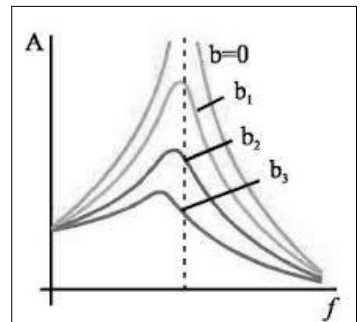
Απόδειξη

Όταν η ταλάντωση έχει απόσβεση $b > 0$ η συχνότητα αυτής (δηλαδή της φθίνουσας) είναι λίγο μικρότερη από την ιδιοσυχνότητα του συστήματος. Συνεπώς για να συντονιστεί ένα τέτοιο σύστημα πρέπει η συχνότητα του διεγέρτη να γίνει ίση με την $\omega_{\phi\theta}$ ($\omega_d = \omega_{\phi\theta}$) και όχι με την ιδιοσυχνότητα, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Όσο η απόσβεση b είναι μεγαλύτερη τόσο ο συντονισμός προκύπτει για μικρότερες τιμές της συχνότητας του διεγέρτη ενώ το μέγιστο πλάτος μειώνεται (βλέπε και γραφική παράσταση).

Συνεπώς θα πρέπει να μειώσουμε τη συχνότητα του διεγέρτη από την τιμή $f_0 = \omega_0/2\pi$ που είναι τώρα στην τιμή $f_{\phi\theta} = \omega_{\phi\theta}/2\pi$ για να δούμε συντονισμό, δηλαδή μεγιστοποίηση του πλάτους.

Σημ: Στη γραφική παράσταση βλέπουμε τα πλάτη μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης για διαφορετικές τιμές απόσβεσης και το λόγο f_d/f_0 , δηλαδή της συχνότητας του διεγέρτη προς την ιδιοσυχνότητα του συστήματος. Το γράμμα (ζ) είναι το αντίστοιχο (b) δηλαδή ο συντελεστής απόσβεσης. Για πολύ μεγάλες τιμές της σταθεράς ο συντονισμός δεν γίνεται αντιληπτός.



► Η συχνότητα της φθίνουσας ταλάντωσης είναι $\omega_{\phi\theta} = \sqrt{\omega_0^2 - (b/2m)^2}$ (εκτός ύλης)

4. Κύματα

4.1 Να αποδείξετε την εξίσωση του τρέχοντος κύματος . Δίνεται ότι το σημείο με $x=0$, αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t=0$ με εξίσωση απομάκρυνσης $y=A\eta\mu(\omega t)$ και το κύμα οδεύει κατά τη θετική φορά του άξονα $x'Ox$.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η πηγή αρμονικής διαταραχής O αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ και ότι η ταλάντωσή της περιγράφεται από τη σχέση $y = A\eta\mu\omega t$. Ένα σημείο M του ελαστικού μέσου θα αρχίσει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_1 = x/v$. Επομένως τη χρονική στιγμή t , το σημείο M θα ταλαντώνεται επί χρόνο $t - t_1 = (t - x/v)$ και, με την προϋπόθεση ότι το πλάτος της ταλάντωσης του M είναι ίσο με το πλάτος ταλάντωσης του O , η εξίσωση της κίνησής του, δηλαδή η εξίσωση του κύματος θα είναι:

$$y = A\eta\mu [\omega(t - \frac{x}{v})] \rightarrow y = A\eta\mu\frac{2\pi}{T}(t - \frac{x}{v}) \rightarrow y = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{v \cdot T}) \rightarrow y = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$$

♣ 4.2 Γιατί δεν μπορεί η φάση ενός αρμονικού κύματος μια δεδομένη χρονική στιγμή και για μια δεδομένη θέση x_1 να έχει αρνητική αλγεβρική τιμή;

Απόδειξη

Έστω η εξίσωση ενός αρμονικού κύματος που οδεύει προς τη θετική φορά $y=A\eta\mu(\omega t-2\pi x/\lambda)$. Αν υποθέσω ότι το σημείο x_1 έχει τη χρονική στιγμή t_1 φάση $\varphi_1 < 0$ πρέπει

$$\omega t_1 - 2\pi x_1/\lambda < 0 \rightarrow \frac{2\pi t_1}{T} < \frac{2\pi x_1}{\lambda} \rightarrow x_1 > \frac{\lambda t_1}{T} \rightarrow x_1 > v t_1$$

Το γινόμενο $v t_1 = \Delta x$ εκφράζει την απόσταση Δx που έχει διανύσει το κύμα στο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_1$. Άρα η θέση x_1 είναι μακρύτερα από εκεί που έχει φτάσει το κύμα τη δεδομένη χρονική στιγμή πράγμα που είναι άτοπο. Συνεπώς αρνητική φάση δεν υπάρχει.

Το σημείο στο οποίο φτάνει το κύμα κάποια χρονική στιγμή έχει φάση $\varphi=0$. Όλα τα προηγούμενα σημεία έχουν $\varphi > 0$. Αν κάπου υπολογίσουμε για κάποιο σημείο $\varphi < 0$, αυτό θα σημαίνει ότι τη δεδομένη χρονική στιγμή το κύμα δεν έχει ακόμα φτάσει στο σημείο αυτό.

♣ 4.3 I. Να αποδείξετε την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής $v=\lambda \cdot f$

II. Να Δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της φάσης ενός κύματος είναι η γωνιακή συχνότητα;

Απόδειξη

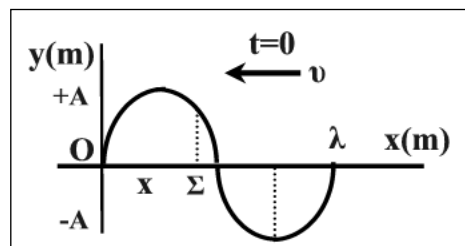
Σε ένα ελαστικό μέσο το κύματα διαδίδεται με σταθερή ταχύτητα και σε χρόνο μιας περιόδου T , το μέτωπο του κύματος μετατοπίζεται κατά ένα μήκος κύματος, δηλαδή η κυματική εικόνα επαναλαμβάνεται . Συνεπώς

$$\Delta x = v \cdot \Delta t \rightarrow \lambda = v \cdot T \rightarrow v = \frac{\lambda}{T} \rightarrow v = \lambda \cdot f$$

II. Οι φάσεις του ίδιου σημείου ενός κύματος σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές t_1, t_2 με $t_2 > t_1$ είναι $\varphi_1 = \omega t_1 - 2\pi x/\lambda$ και $\varphi_2 = \omega t_2 - 2\pi x/\lambda$

Άρα $\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \omega(t_2 - t_1) \rightarrow \Delta \varphi = \omega \Delta t \rightarrow \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \omega$, δηλαδή η γωνιακή συχνότητα

4.4 Στο σχήμα φαίνεται στιγμιότυπο αρμονικού κύματος τη χρονική στιγμή, $t=0$. Το κύμα οδεύει προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα. Αν A το πλάτος, λ το μήκος κύματος και T η περίοδος, τότε ποια είναι η εξίσωση του κύματος;



Απόδειξη

Το κύμα φτάνει στο (O) τη χρονική στιγμή $t=0$. Η εξίσωση απομάκρυνση του σημείου O ($x=0$) είναι $y=A\eta\mu\omega t$. Ένα σημείο Σ που απέχει απόσταση (OΣ)= x από το O, αρχίζει να ταλαντώνεται πριν από χρόνο, $t'=x/v=T\cdot x/\lambda$, όπου t' ο χρόνος που θέλει το μέτωπο του κύματος να διανύσει την απόσταση (ΣO)= x . Η φάση του Σ προηγείται της φάσης του (O) κατά $\omega t'$. Συνεπώς η εξίσωση απομάκρυνσης του τυχαίου σημείου Σ είναι:

$$y=A\eta\mu(\omega t+\omega t')=A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}+\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T x}{\lambda}\right)\rightarrow y=A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}+\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

4.5 Να αποδείξετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος .

Δίνεται η σχέση της τριγωνομετρίας $\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta=2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\eta\mu\frac{\alpha-\beta}{2}$,

Απόδειξη

Έστω ότι ένα κύμα με εξίσωση $y_1=A\eta\mu(\omega t-2\pi x/\lambda)$ που οδεύει προς τη θετική φορά του άξονα $x'Ox$ και ένα δεύτερο κύμα με το ίδιο πλάτος και την ίδια συχνότητα οδεύει κατά την αντίθετη κατεύθυνση με εξίσωση $y_2=A\eta\mu(\omega t+2\pi x/\lambda)$. Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας η απομάκρυνση y ενός σημείου Μ που απέχει από την αρχή του άξονα απόσταση x τη χρονική στιγμή t , θα είναι

$$y=y_1+y_2\rightarrow y=y_1+y_2=A\cdot\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}+\frac{2\pi x}{\lambda}\right)+A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}-\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\rightarrow y=[2A\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}]\cdot\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

όπου $A'=2A\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}$ το πλάτος του στάσιμου κύματος

► Η εξίσωση αυτή του στάσιμου ισχύει υπό 2 προϋποθέσεις:

1. Το σημείο O που θεωρούμε ως αρχή των αποστάσεων να είναι κοιλία.
2. Τη χρονική στιγμή $t=0$ έχει ολοκληρωθεί η συμβολή των δύο αντίθετων κυμάτων και το σημείο O βρίσκεται στη θέση ισορροπίας ($y=0$) με θετική ταχύτητα.

4.6 Να αποδείξετε τις σχέσεις που δίνουν της αποστάσεις των κοιλιών και των δεσμών ενός στάσιμου κύματος από την αρχή του άξονα $x'Ox$.

Απόδειξη

Οι κοιλίες είναι σημεία που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος $|A'|=2A$

$$A'=2A\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}=2A\rightarrow\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}=1\rightarrow\frac{2\pi x}{\lambda}=\kappa\pi\rightarrow x=\frac{\kappa\lambda}{2}\text{ όπου }\kappa=0,1,2,\dots$$

Οι δεσμοί είναι σημεία ακίνητα δηλ. με μηδενικό πλάτος, $A'=0$:

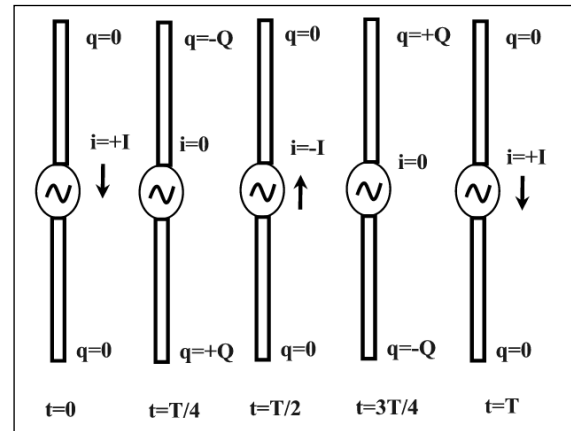
$$A'=2A\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}=0\rightarrow\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}=0\rightarrow\frac{2\pi x}{\lambda}=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\rightarrow x=(2\kappa+1)\frac{\lambda}{4}\text{ όπου }\kappa=0,1,2,\dots$$

- Η απόσταση δύο διαδοχικών δεσμών ή κοιλιών είναι $\lambda/2$
- Η απόσταση δεσμού από την αμέσως επόμενη κοιλία είναι $\lambda/4$

4.7 Να περιγράψετε τον μηχανισμό παραγωγής ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος

Απάντηση

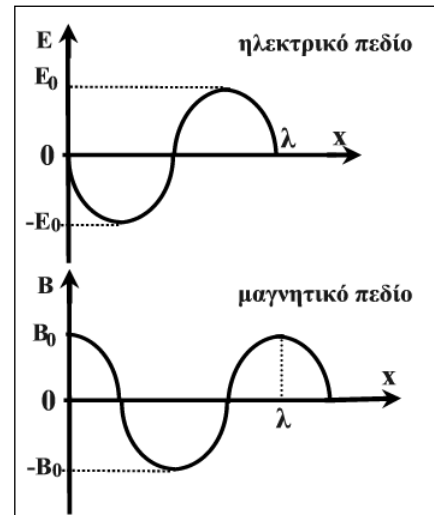
Το παλλόμενο ηλεκτρικό δίπολο είναι δύο μεταλλικές ράβδοι συνδεδεμένες με μια γεννήτρια εναλλασσόμενου (ημιτονοειδούς ρεύματος). Οι ράβδοι αποκτούν ετερόσημα ηλεκτρικά φορτία και αυτά δημιουργούν ένα ημιτονοειδώς μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο. Καθώς τα φορτία των ράβδων εναλλάσσονται το χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο απομακρύνεται από το δίπολο με την ταχύτητα του φωτός c . Ταυτόχρονα όμως η εναλλαγή του φορτίου δημιουργεί εναλλασσόμενο ρεύμα. Αυτό συνεπάγεται ότι γύρω από το δίπολο δημιουργείται και ένα χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο σε επίπεδο κάθετο στην ένταση του ρεύματος άρα και στο δίπολο. Καθώς η ένταση του ρεύματος εναλλάσσεται το μαγνητικό πεδίο απομακρύνεται από το δίπολο σε επίπεδο όμως κάθετο στο ηλεκτρικό, με την ταχύτητα του φωτός, c . Όταν τα φορτία είναι μηδενικά και η ένταση E του ηλεκτρικού πεδίου $E=0$, το ρεύμα έχει μέγιστη κατά μέτρο τιμή και το μαγνητικό πεδίο, $B=B_0$ και αντίστροφα. Όταν το $E=E_0$ το $I=0$ και το $B=0$.



t	0	T/4	T/2	3T/4	T
q	0	-Q,+Q	0	+Q,-Q	0
E	0	E_0	0	$-E_0$	0
i	+I	0	-I	0	+I
B	$+B_0$	0	$-B_0$	0	$+B_0$

Μετά από χρόνο μιας περιόδου το σύστημα αυτών των δύο κυμάτων θα έχει μετατοπιστεί κατά λ και τα στιγμιότυπα των κυμάτων φαίνονται στο διπλανό σχήμα. **Απλώς το μαγνητικό είναι σε επίπεδο κάθετο στο ηλεκτρικό.** Ακόμα φαίνεται και η διαφορά φάσης των δύο πεδίων κατά $\pi/2$ rad, κατά την παραγωγή.

Με το μηχανισμό που περιγράψαμε λειτουργεί η κεραία εκπομπής ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων ραδιοφώνου ή TV, αν θέλουμε μια απλή ερμηνεία των πραγμάτων. Ο Hertz επιβεβαίωσε την πρόβλεψη του Maxwell, όταν το 1887 παρήγαγε και ανίχνευσε ηλεκτρομαγνητικά κύματα.



5. Ηλεκτρομαγνητισμός

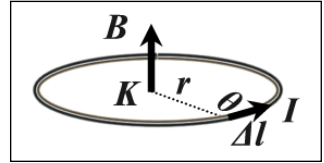
5.1 Να αποδείξετε τη σχέση που δίνει την ένταση μαγνητικού πεδίου στο κέντρο, Κ κυκλικού αγωγού ακτίνας r.

Απόδειξη

Εφαρμόζουμε το νόμο των Biot Savart. Η γωνία μεταξύ της απόστασης r και του κάθε στοιχειώδους τμήματος Δℓ του κυκλικού αγωγού είναι $\theta=90^\circ$.

$$B_K = \Sigma \Delta B = \Sigma \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot \Delta \ell}{r^2} \cdot \eta_{\mu\theta} \right) \rightarrow B_K = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot (\Sigma \Delta \ell)}{r^2} = \frac{\mu_0 I \cdot 2\pi r}{4\pi r^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow B_K = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi I}{r} \rightarrow B_K = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

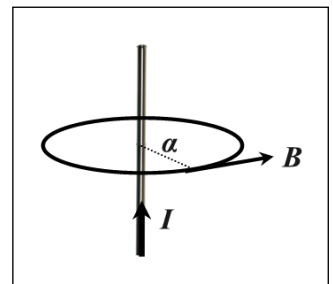


5.2 Να αποδείξετε τη σχέση που δίνει την ένταση μαγνητικού πεδίου σε απόσταση a από ευθύγραμμο αγωγό απείρου μήκους.

Απόδειξη

Εφαρμόζουμε το νόμο του Ampere για μια κυκλική διαδρομή ακτίνας a

$$\Sigma B \Delta \ell \cdot \sin \theta = \mu_0 I \rightarrow B \cdot \Sigma \Delta \ell = \mu_0 I \rightarrow B \cdot 2\pi a = \mu_0 I \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

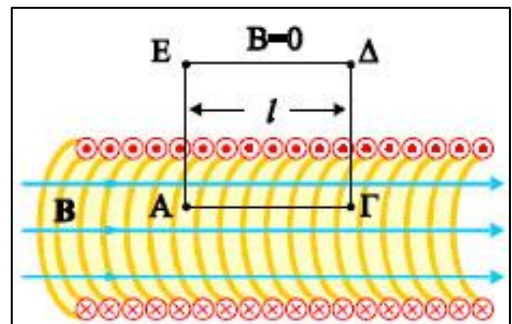


5.3 Να αποδείξετε τη σχέση που δίνει την ένταση μαγνητικού πεδίου σωληνοειδούς, απείρου μήκους, που διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης I.

Απόδειξη

Εφαρμόζουμε το νόμο Ampere σε μια διαδρομή σχήματος ορθογώνιου μήκους ℓ, την ΑΓΔΕ. Αν I το ρεύμα που διαρρέει κάθε σπείρα και N ο αριθμός των σπειρών που περιέχονται στο ορθογώνιο πλαίσιο, τότε το ολικό ρεύμα που διέρχεται είναι NI.

Το άθροισμα των γινομένων B Δℓ συνθ κατά μήκος της διαδρομής ΑΓ είναι BI. Κατά μήκος των διαδρομών ΓΔ και ΕΑ το ίδιο άθροισμα είναι μηδέν γιατί, όπου υπάρχει, το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στη διαδρομή. Επομένως $\text{συν}\theta = \text{συν}90^\circ = 0$. Τέλος, κατά μήκος της ΔΕ είναι επίσης μηδέν γιατί στην περιοχή αυτή δεν υπάρχει μαγνητικό πεδίο ($B=0$). Άρα:



$$\Sigma (B \Delta \ell \sin \theta) = \mu_0 N \cdot I \rightarrow B \cdot \ell = \mu_0 N \cdot I \rightarrow B = \mu_0 \frac{N \cdot I}{\ell}$$

5.4 Σωματίδιο μάζας m , ηλεκτρικού φορτίου $+q$ εισέρχεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B κάθετα στις μαγνητικές γραμμές. Να αποδείξετε ότι

(i) εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση και να υπολογίσετε την ακτίνα αυτής R και την περίοδο T .

(ii) Σε τι θα διαφέρουν οι τροχιές ηλεκτρονίων που θα εισέλθουν σε ομογενές μαγνητικό πεδίο κάθετα στις μαγνητικές γραμμές με διαφορετικές ταχύτητες

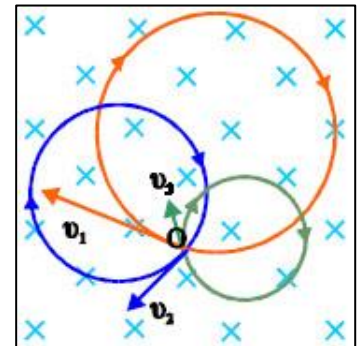
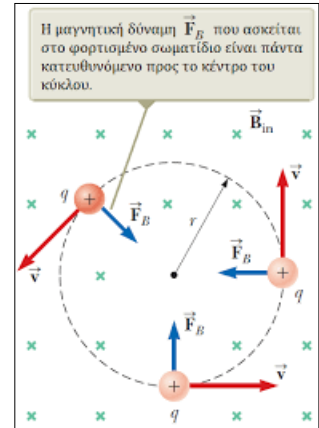
Απόδειξη

Αν η ταχύτητα του σωματιδίου είναι κάθετη προς την ένταση του μαγνητικού πεδίου ($\phi=90^\circ$) τότε η δύναμη Lorentz είναι μέγιστη $F=Bv|q|$, δρα ως κεντρομόλος και αναγκάζει το σωματίδιο να κάνει ομαλή κυκλική κίνηση με

$$\text{ακτίνα } R: \quad F=F_{\text{κεν}} \rightarrow Bv|q| = \frac{mv^2}{R} \rightarrow R = \frac{mv}{B|q|}$$

$$\text{και περίοδο } T: \quad v = \frac{2\pi R}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi R}{v} \rightarrow T = \frac{2\pi m}{B|q|}$$

(ii) Η περίοδος περιστροφής **δεν** εξαρτάται από την ταχύτητα ή την ακτίνα περιστροφής του σωματιδίου, αλλά μόνο από το είδος του σωματιδίου (μάζα και φορτίο). Έτσι, αν σε ένα μαγνητικό πεδίο κινούνται κάθετα στις δυναμικές γραμμές του ηλεκτρόνια που έχουν διαφορετικές ταχύτητες, θα διαγράφουν κύκλους διαφορετικών ακτίνων αλλά οι περίοδοι περιστροφής τους θα είναι ίδιες.



5.5 Σωματίδιο μάζας m , ηλεκτρικού φορτίου $+q$ εισέρχεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B υπό γωνία ϕ ($0 < \phi < 90^\circ$) ως προς τις μαγνητικές γραμμές. Να αποδείξετε ότι θα εκτελέσει ελικοειδή κίνηση και να υπολογίσετε την ακτίνα και το βήμα της έλικας.

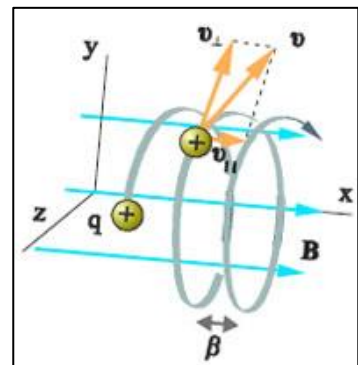
Απόδειξη

Έστω ένα σωματίδιο που εισέρχεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο και η κατεύθυνση της ταχύτητας σχηματίζει με τις δυναμικές γραμμές γωνία $0 < \phi < 90^\circ$. Αναλύουμε την ταχύτητά του v σε μια συνιστώσα παράλληλη ($v_{||}$) και μια κάθετη ($v_{\perp}$) στις δυναμικές γραμμές. Αν το σωματίδιο είχε μόνο τη $v_{||}$ θα έκανε ευθύγραμμη ομαλή κίνηση (περίπτωση Α). Αν είχε μόνο τη $v_{\perp}$ θα δεχόταν δύναμη Lorentz $F=Bv_{\perp}|q|$ που θα είχε ρόλο κεντρομόλου και θα έκανε ομαλή κυκλική κίνηση (περίπτωση Β). Από τη σύνθεση των δύο κινήσεων προκύπτει μια **ελικοειδής κίνηση**

$$\text{με ακτίνα } R = \frac{m v_{\perp}}{B|q|} \text{ και περίοδο } T = \frac{2\pi m}{B|q|}$$

Σε χρόνο μιας περιόδου το σωματίδιο προχωράει στη διεύθυνση του άξονα των x κατά

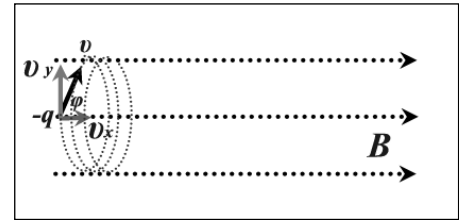
$$\beta = v_{||} \cdot T = v_{||} \cdot \frac{2\pi m}{B|q|}$$



Η σταθερή αυτή απόσταση την οποία διανύει το σωματίδιο στη διεύθυνση του πεδίου στο χρόνο κάθε περιόδου ονομάζεται **βήμα της έλικας, β** .

Αν είναι φ η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα $\vec{v}$ με την ένταση $\vec{B}$ του μαγνητικού πεδίου τότε η ακτίνα και το βήμα υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$R = \frac{m v \cdot \eta \mu \varphi}{B |q|} \quad \text{και} \quad \beta = v_{\chi} \cdot T = v \cdot \text{συν} \varphi \cdot \frac{2\pi m}{B |q|}$$



5.6 Τι είναι ο επιλογέας ταχυτήτων και ποια είναι η αρχή λειτουργίας του

Απόδειξη

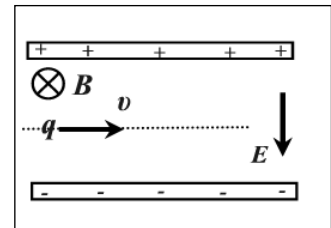
Είναι μια διάταξη που επιτρέπει να απομονώσουμε τα σωματίδια ορισμένης ταχύτητας και γι' αυτό λέγεται και «φίλτρο ταχυτήτων».

Πως λειτουργεί:

Φορτισμένο σωματίδιο μάζας m , φορτίου $+q$ εισέρχεται με ταχύτητα v σε χώρο όπου συνυπάρχουν δύο ομογενή πεδία, ένα ηλεκτρικό, έντασης E και ένα μαγνητικό, έντασης B , των οποίων οι δυναμικές γραμμές είναι κάθετες μεταξύ τους. Η διεύθυνση της ταχύτητας του σωματιδίου είναι κάθετη στις δυναμικές γραμμές και των δύο πεδίων. Αν το q είναι θετικό, δέχεται από το ηλεκτρικό πεδίο δύναμη μέτρου $F_e = |q|E$ με φορά προς τα κάτω, ενώ από το μαγνητικό δύναμη $F_L = B|q|v$ με φορά προς τα πάνω. Εάν επιλέξουμε τις εντάσεις των πεδίων ώστε η ηλεκτρική δύναμη να εξισορροπείται από τη μαγνητική, το σωματίδιο θα συνεχίσει ανεπηρέαστο την πορεία του, κάνοντας κίνηση ευθύγραμμη και ομαλή. Εξισώνοντας τη μαγνητική και την ηλεκτρική δύναμη ($B|q|v = E|q|$), βρίσκουμε

$$E = B \cdot v$$

Αν όλα τα φορτισμένα σωματίδια μιας δέσμης έχουν ταχύτητα $v = E/B$ δεν εκτρέπονται από το σύνθετο πεδίο. Αν όμως η δέσμη αποτελείται από φορτισμένα σωματίδια με διαφορετικές ταχύτητες, τότε μόνο αυτά που έχουν ταχύτητα $v = E/B$ θα συνεχίσουν την ευθύγραμμη πορεία τους.



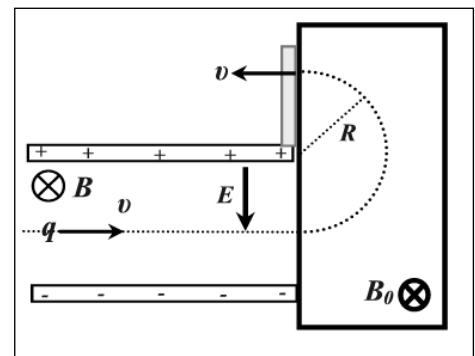
5.7 Τι είναι ο φασματογράφος μάζας και ποια είναι η αρχή λειτουργίας του

Απόδειξη

Είναι μια διάταξη με τη βοήθεια της οποίας διαχωρίζουμε τα ιόντα ανάλογα με το πηλίκο φορτίου προς μάζα αυτών, q/m , που λέγεται και **ειδικό φορτίο**. Ιόντα από μια πηγή περνούν μέσα από λεπτές σχισμές σχηματίζοντας μια λεπτή δέσμη. Στη συνέχεια τα ιόντα περνούν μέσα από ένα φίλτρο ταχυτήτων με πεδία E και B , από όπου διέρχονται μόνο εκείνα που έχουν ταχύτητα $v = E/B$. Μετά εισέρχονται σε άλλο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B_0 , κάθετα στις δυναμικές γραμμές, όπου διαγράφουν ημικύκλιο ακτίνας R και αποτυπώνονται σε μια φωτογραφική πλάκα, όπως φαίνεται και στο σχήμα. Το ειδικό φορτίο των ιόντων δίνεται από τη σχέση:

$$R = \frac{m \cdot v}{B_0 \cdot q} \rightarrow \frac{|q|}{m} = \frac{v}{R B_0} = \frac{E}{B \cdot B_0 R}$$

Η ακτίνα R υπολογίζεται από το ίχνος που αφήνουν τα ιόντα στη φωτογραφική πλάκα ενώ τα πεδία E , B και B_0 είναι γνωστά. Δύο σωματίδια με ίδιο φορτίο αλλά με διαφορετική μάζα θα αφήσουν στη φωτογραφική πλάκα διαφορετικά ίχνη.



5.8 Τι μετρήθηκε με το πείραμα Thomson και πως;

Απόδειξη

Με το πείραμα αυτό μετρήθηκε το ειδικό φορτίο $|e|/m$ του ηλεκτρονίου για πρώτη φορά.

Πω; Μέσα σε ένα καθοδικό σωλήνα, στον οποίο επικρατεί υψηλό κενό, ηλεκτρόνια που προέρχονται από μια πυρακτωμένη κάθοδο, επιταχύνονται από τη διαφορά δυναμικού V ανάμεσα στην κάθοδο και τις ανόδους A και A' και σχηματίζουν μια δέσμη.

Σύμφωνα με το θεώρημα έργου-ενέργειας η κινητική ενέργεια που θα αποκτήσουν τα ηλεκτρόνια είναι ίση με το έργο της δύναμης του ηλεκτρικού πεδίου

$$\frac{1}{2}mv^2 = |e| \cdot V \rightarrow v = \sqrt{\frac{2|e|V}{m}} \quad (1)$$

Όπου m και $|e|$ μάζα και το φορτίο του ηλεκτρονίου κατ' απόλυτη τιμή.

Η δέσμη των ηλεκτρονίων εισέρχεται σε ένα φίλτρο ταχυτήτων, σαν αυτό που περιγράψαμε προηγουμένως, και στη συνέχεια πέφτει σε μια οθόνη, στο άκρο του σωλήνα, η οποία είναι καλυμμένη με υλικό που φθορίζει. Στο σημείο που τα ηλεκτρόνια πέφτουν πάνω στην οθόνη το φθορίζον υλικό φωτοβολεί. Τα ηλεκτρόνια διέρχονται χωρίς απόκλιση από το φίλτρο ταχυτήτων μόνο όταν η ταχύτητά τους είναι

$$v = E/B \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) (2) $\rightarrow \frac{E}{B} = \sqrt{\frac{2|e|V}{m}} \rightarrow \frac{|e|}{m} = \frac{E^2}{2VB^2}$

Οι ποσότητες E , V και B μπορούν να μετρηθούν και έτσι να προσδιοριστεί το πηλίκο e/m .

Το ειδικό φορτίο του ηλεκτρονίου είναι $|e|/m \approx 1,810^{11} \text{C/kg}$ και το ειδικό φορτίο του πρωτονίου $q/m \approx 10^8 \text{C/kg}$.

5.9 Να αποδειχθεί η σχέση που δίνει το μέτρο της δύναμης που ασκείται μεταξύ δύο παράλληλων ρευματοφόρων αγωγών μεγάλου μήκους που διαρρέονται από ομόρροπα ρεύματα εντάσεων I_1 , I_2 , έχουν μήκος ℓ και απέχουν απόσταση d , στον αέρα. Τι διαφορετικό συμβαίνει αν τα ρεύματα είναι αντίρροπα;

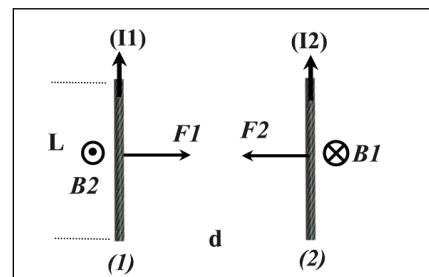
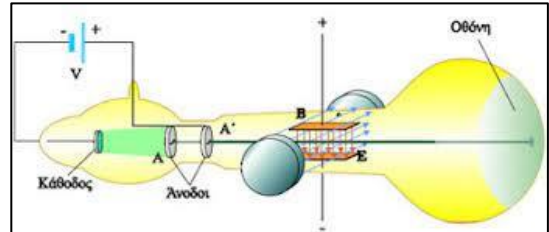
Απόδειξη

Ο αγωγός (1) δημιουργεί ΜΠ έντασης $B_1 = (\frac{\mu_0}{2\pi}) \cdot \frac{I_1}{d}$ στην περιοχή

του αγωγού (2) και αυτό ασκεί στον αγωγό (2) δύναμη Laplace $F_2 = B_1 I_2 L \rightarrow F_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2 L}{d}$ με φορά προς τα αριστερά.

Αντιστρόφως, ο αγωγός (2) δημιουργεί ΜΠ έντασης $B_2 = (\mu_0/2\pi) \cdot I_2/d$ στην περιοχή του αγωγού (1)

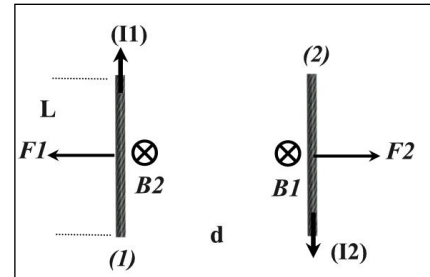
και αυτό ασκεί στον αγωγό (1) δύναμη Laplace $F_1 = B_2 I_1 L = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2 L}{d}$ με φορά προς τα δεξιά.



Δύο παράλληλοι αγωγοί μήκους L διαρρέονται από ρεύματα εντάσεων I_1 , I_2 αντιστοίχως και απέχουν απόσταση d . Αν τα ρεύματα είναι **ομόρροπα** τότε **έλκονται** με δύναμη μέτρου:

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2 L}{d}$$

Αν τα ρεύματα είναι **αντίρροπα** τότε με την ίδια λογική **απωθούνται** με δύναμη ίδιου μέτρου.



5.10 Να γράψετε τους ορισμούς (i) του Ampere. (ii) της έντασης του μαγνητικού πεδίου και (iii) του Tesla.

Απαντήσεις

Ορισμός του Ampere: Με τη βοήθεια της δύναμης μεταξύ παράλληλων ρευματοφόρων αγωγών μπορούμε να ορίσουμε τη μονάδα της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος.

1A είναι η ένταση του σταθερού ρεύματος που όταν διαρρέει δύο ευθύγραμμους παράλληλους αγωγούς απείρου μήκους, οι οποίοι βρίσκονται στο κενό και σε απόσταση $d = 1\text{m}$ ο ένας από τον άλλο, τότε σε τμήμα μήκους $\ell = 1\text{m}$ ο ένας ασκεί στον άλλο δύναμη μέτρου $F = 2 \cdot 10^{-7}\text{N}$.

Ορισμός έντασης μαγνητικού πεδίου: Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου B είναι ίσο με το πηλίκο της δύναμης Laplace που ασκείται σε ρευματοφόρο αγωγό που βρίσκεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο προς το γινόμενο του μήκους L του αγωγού επί την ένταση I του ρεύματος, όταν ο αγωγός τοποθετηθεί κάθετα στις δυναμικές γραμμές του πεδίου ($\varphi = 90^\circ$). Άρα $B = \frac{F_{L\max}}{IL}$

Ορισμός του 1Tesla: Ένα Tesla είναι η ένταση του ομογενούς μαγνητικού πεδίου το οποίο ασκεί δύναμη 1N σε ευθύγραμμο αγωγό μήκους 1m που διαρρέεται από ρεύμα έντασης 1A όταν οι δυναμικές γραμμές του πεδίου είναι κάθετες σ αυτόν.

6. Ηλεκτρομαγνητική Επαγωγή

6.1 Η διερχόμενη μαγνητική ροή μέσα από αγωγίμο πλαίσιο ωμικής αντίστασης R και N σπειρών, μεταβάλλεται κατά $\Delta\Phi$ σε χρονικό διάστημα Δt . Να αποδείξετε τη σχέση που δίνει το συνολικό φορτίο που διέρχεται από μια διατομή του σύρματος του πλαισίου κατά τη διάρκεια του φαινομένου.

Απόδειξη

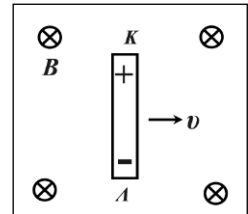
Η ΗΕΔ που επάγεται στο πλαίσιο είναι ανάλογη με το ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής $\Delta\Phi/\Delta t$ και ανάλογη του αριθμού, N , των σπειρών του πηνίου. Το μέτρο της είναι $E = \frac{N|\Delta\Phi|}{\Delta t}$

Αν το πλαίσιο σχηματίζει κλειστό κύκλωμα τότε η ΗΕΔ προκαλεί μετατόπιση ηλεκτρικού επαγωγικού φορτίου, q και ηλεκτρικό επαγωγικό ρεύμα έντασης I . Η ένταση του ρεύματος είναι

$$I = \frac{|E|}{R} \rightarrow I = N \frac{|\Delta\Phi|}{R\Delta t}$$

Και το φορτίο που διέρχεται από μια διατομή του σύρματος $q = I \cdot \Delta t \rightarrow q = N \frac{|\Delta\Phi|}{R}$

6.2 Αν ένας ευθύγραμμος αγωγός ΚΛ, μήκους ℓ κινείται με ταχύτητα v μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, B έτσι ώστε η ταχύτητα να είναι κάθετη στον αγωγό και το B κάθετο και στην ταχύτητα και στον αγωγό, να αποδείξετε ότι τότε στα άκρα Κ και Λ του αγωγού αναπτύσσεται ηλεκτρεγερτική δύναμη από επαγωγή που είναι $V_{KL} = Bv\ell$.



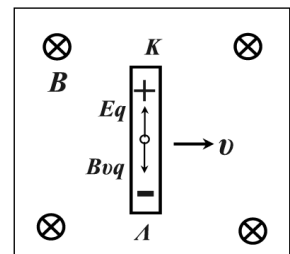
Απόδειξη

Ευθύγραμμος αγωγός μήκους ℓ κινείται με σταθερή ταχύτητα v κάθετα στις δυναμικές γραμμές ομογενούς μαγνητικού πεδίου B . Τα ελεύθερα ηλεκτρόνιά του, συμμετέχοντας στην κίνηση του αγωγού, κινούνται και αυτά με ταχύτητα v κάθετα στις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο επειδή κινείται με ταχύτητα v μέσα σε μαγνητικό πεδίο θα δεχτεί δύναμη Lorentz, $F_L = Bvq$ η φορά της οποίας φαίνεται στο σχήμα. Η δύναμη αυτή προκαλεί την κίνηση των ελεύθερων ηλεκτρονίων προς το άκρο Λ του αγωγού. Έτσι δημιουργείται συσσώρευση αρνητικού φορτίου στο άκρο Λ, και πλεόνασμα θετικού φορτίου στο άκρο Κ. Τα φορτία αυτά δημιουργούν στο χώρο του αγωγού ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης E με φορά από το Κ προς το Λ. Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια δέχονται τώρα μια ακόμη δύναμη $F_E = qE$ αντίθετης φοράς από τη μαγνητική. Όσο η δύναμη Lorentz είναι μεγαλύτερη από την ηλεκτρική, η συσσώρευση φορτίων συνεχίζεται, με όλο και μικρότερο ρυθμό. Έτσι, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου αυξάνεται και σε πολύ λίγο χρόνο τα μέτρα των δυο δυνάμεων γίνονται ίσα, δηλαδή

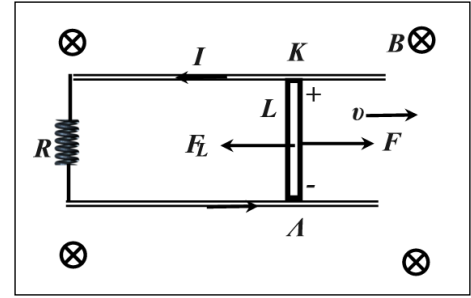
$$F_L = F_E \rightarrow Bvq = Eq \rightarrow E = B \cdot v \quad (1)$$

Τότε παύει η μετακίνηση φορτίου και το σημείο Κ βρίσκεται σε υψηλότερο δυναμικό από το Λ. Η διαφορά δυναμικού V_{KL} μεταξύ των άκρων του αγωγού Κ και Λ υπολογίζεται από τη σχέση (1) αν θέσουμε όπου $E = V_{KL}/\ell$ οπότε προκύπτει

$$V_{KL} = BvL.$$



6.3 Ο κανόνας του Lenz ως συνέπεια της ΑΔΕ: Στο διπλανό σχήμα ο αγωγός μήκους L αμελητέας αντίστασης κινείται με σταθερή ταχύτητα, v , πάνω σε λείες ράγες αμελητέας αντίστασης μέσα στο ομογενές, μαγνητικό πεδίο, B , υπό την επίδραση της εξωτερικής δύναμης F . Το κύκλωμα κλείνει με την αντίσταση R . Να αποδείξετε ότι ο κανόνας του Lenz είναι συνέπεια της αρχής διατήρησης της ενέργειας.



Απόδειξη

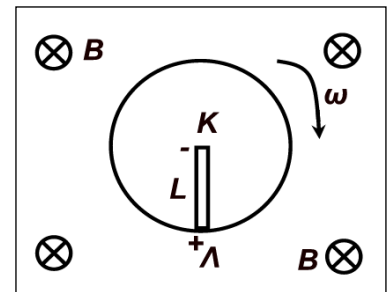
Στα άκρα K και Λ επάγεται ΗΕΔ, $E_{K\Lambda} = BvL$ που παράγει ρεύμα έντασης $I = E_{K\Lambda}/R$ το οποίο διαρρέει τον αγωγό $K\Lambda$ με φορά από το Λ προς το K . Λόγω του κάθετου ΜΠ ο αγωγός δέχεται δύναμη Laplace $F_L = BIl$ με κατεύθυνση αντίθετη στην δύναμη F και στην σταθερή ταχύτητα, v , δηλαδή, $\Sigma F = 0 \rightarrow F - F_L = 0 \rightarrow F = F_L = BIl$

Έστω ότι σε χρονικό διάστημα Δt ο αγωγός μετατοπίζεται κατά $\Delta x = v \cdot \Delta t$. Το έργο της F θα είναι:

$$W_F = F \cdot \Delta x = F \cdot v \cdot \Delta t = F_L \cdot v \Delta t = (BIl) \cdot (v \Delta t) = BvL \cdot I \Delta t = E_{K\Lambda} \cdot I \cdot \Delta t = IR \cdot R \Delta t = I^2 R \cdot \Delta t = Q \rightarrow W_F = Q.$$

Άρα το έργο της εξωτερικής δύναμης F ισούται με τη θερμότητα Joule που παράχθηκε στην ωμική αντίσταση του κυκλώματος. Αν δεν ίσχυε ο κανόνας Lenz το ρεύμα θα είχε αντίθετη φορά όπως και η δύναμη Laplace οπότε θα αρκούσε μια απλή ώθηση του αγωγού $K\Lambda$ προς τα δεξιά ώστε η δύναμη F_L να τον επιταχύνει προς τα δεξιά και να εμφανίζονται κινητική ενέργεια αγωγού και θερμότητα Joule στην R , συνεχώς αυξανόμενες. Δηλαδή ενέργεια σχεδόν από το μηδέν. Κάτι τέτοιο όμως αντιτίθεται στην αρχή διατήρησης της ενέργειας. Συνεπώς η ισχύς του κανόνα **Lenz** είναι αναμφισβήτητη.

6.4 Περιστροφική κίνηση ευθύγραμμου αγωγού: Αγωγός μήκους L στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο του, K και είναι κάθετος σ' αυτόν με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω και το μαγνητικό πεδίο B είναι κάθετο στο επίπεδο που σαρώνει ο αγωγός. Να αποδείξετε ότι στα άκρα του επάγεται ΗΕΔ και να υπολογίσετε τη σχέση που την δίνει.



Απόδειξη

Αν ο αγωγός μήκους L περιστρέφεται τότε αναπτύσσεται στα άκρα του K και Λ μια ΗΕΔ λόγω επαγωγής. Σε χρόνο μιας περιόδου, $\Delta t = T = 2\pi/\omega$, σαρώνει το εμβαδόν ενός κύκλου $\Delta A = \pi L^2$. Αυτή είναι:

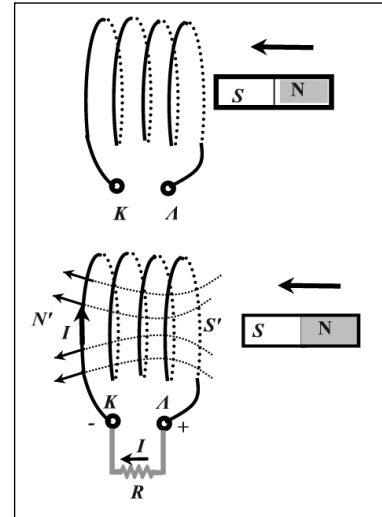
$$E_{\Lambda K} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{\Delta(BA)}{\Delta t} = \frac{B \cdot \Delta A}{\Delta t} = \frac{B \pi L^2}{T} = \frac{B \pi L^2 \cdot \omega}{2\pi} \rightarrow E = \frac{B \omega L^2}{2}$$

Αν ο αγωγός στρέφεται με τη φορά των δεικτών του ρολογιού όπως στο σχήμα τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του συσσωρεύονται στο κέντρο δηλαδή στο άκρο K , οπότε στο Λ εμφανίζεται (+) πόλος και στο K (-). Λόγω κίνησης στο μαγνητικό πεδίο τα ηλεκτρόνια δέχονται δύναμη Lorentz και σύμφωνα με τον κανόνα των 3 δαχτύλων κινούνται προς το K .

Η ίδια σχέση παράγεται αν περιστρέφεται αγωγίμος δίσκος ακτίνας r με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από άξονα μέσα σε ομογενές μ.π B γύρω από τον άξονα συμμετρίας του με τις μαγνητικές γραμμές κάθετες στο επίπεδο του δίσκου. $E = \frac{1}{2} B \omega r^2$

6.5 Κινούμε τον μαγνήτη κατά μήκος του άξονα του σωληνοειδούς πηνίου με το νότιο πόλο (S) επικεφαλής ώστε να πλησιάζει προς αυτό. Τα άκρα του πηνίου K, Λ δεν συνδέονται με κάποιον αγωγό. Να απαντήσετε στα εξής ερωτήματα.

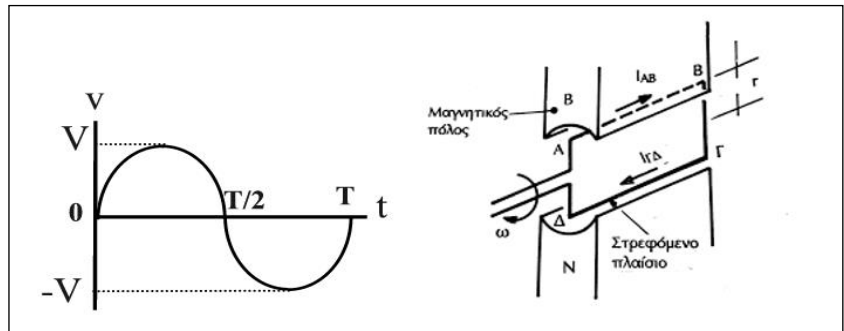
- Επάγεται στο πηνίο ΗΕΔ και με ποια πολικότητα;
- Κυκλοφορεί ρεύμα και αναπτύσσεται δύναμη μεταξύ πηνίου και μαγνήτη;
- Η τιμή της ΗΕΔ σχετίζεται με την ταχύτητα προσέγγισης του μαγνήτη;



Απάντηση

- Καθώς ο μαγνήτης πλησιάζει προς το πηνίο αυξάνεται η διερχόμενη από τη σπείρα του μαγνητική ροή. Λόγω του νόμου Faraday και του κανόνα του Lenz θα δημιουργηθεί στο πηνίο ένα ηλεκτρικό επαγωγικό πεδίο και μια ΗΕΔ εξ επαγωγής στα άκρα K,Λ, με τέτοια πολικότητα ώστε **αν το κύκλωμα ήταν κλειστό (σχ.2)** το επαγωγικό ρεύμα θα είχε τέτοια φορά ώστε το επαγωγικό μαγνητικό πεδίο να είχε το νότιο (S') πόλο του απέναντι από το νότιο (S) πόλο του μαγνήτη (νόμος δεξιού χεριού) για να υπάρχει άπωση. Συνεπώς ο θετικός πόλος της ΗΕΔ είναι στο Λ ώστε να παίζει αυτό το ρόλο, δηλαδή να δίνει ρεύμα στον υποτιθέμενο εξωτερικό αντιστάτη, με τη συμβατική φορά. Άρα υπάρχει μόνο ΗΕΔ. Με (+) στο σημείο Λ.
- Δεν υπάρχει όμως επαγωγικό ρεύμα στο ανοικτό κύκλωμα και συνεπώς **δεν** υπάρχει και απωστική δύναμη μεταξύ τους.
- Σύμφωνα με το νόμο Faraday η απόλυτη τιμή της ΗΕΔ επαγωγής είναι ανάλογη του ρυθμού μεταβολής της μαγνητικής ροής. Και αν η κίνηση του μαγνήτη γίνει πιο γρήγορη αυξάνεται ο ρυθμός μεταβολής της ροής και συνεπώς και η Ε.

6.6 Ένα ορθογώνιο πλαίσιο ΑΒΓΔ εμβαδού Α με Ν σπείρες περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης Β γύρω από άξονα που βρίσκεται στο επίπεδό του και είναι κάθετος στις μαγνητικές γραμμές του πεδίου. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το πλαίσιο είναι κάθετο στο πεδίο, Β. Να αποδείξετε την εξίσωση που δίνει τη στιγμιαία τιμή της Ε.Τ που επάγεται στα άκρα του πλαισίου.



Απόδειξη

Τότε η μαγνητική ροή Φ που διέρχεται από το πλαίσιο μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση

$\Phi = BA \cdot \sin(\omega t)$. Λόγω μεταβολής της μαγνητικής ροής, επάγεται στα άκρα του πλαισίου ΗΕΔ που μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο και είναι γνωστή ως αρμονικά εναλλασσόμενη τάση, ή εναλλασσόμενη τάση (ΕΤ) .

$$v = -N \frac{d\Phi}{dt} \rightarrow v = -N(\Phi)' \rightarrow v = -N \cdot [B \cdot A \sin(\omega t)]' = -NB \cdot A \cdot [-\eta\mu(\omega t)] \rightarrow v = NB\omega A \eta\mu(\omega t) \text{ όπου } NB\omega A = V \text{ το πλάτος της Ε.Τ. Άρα η στιγμιαία τιμή της τάσης είναι: } v = V \eta\mu(\omega t)$$

6.7 Να αποδείξετε τη σχέση που δίνει τη μέση ισχύ αρμονικώς εναλλασσόμενου ρεύματος που διαρρέει αντιστάτη R συναρτήσει της ενεργούς τιμής της τάσης και της αντίστασης R .

Απόδειξη

Σύμφωνα με τον ορισμό η μέση ισχύς εναλλασσόμενου ρεύματος ισούται με το πηλίκο της ενέργειας που μεταφέρει το ρεύμα στο κύκλωμα σε χρόνο μιας περιόδου T προς την περίοδο αυτήν T . Δηλαδή:

$$P = \frac{W_T}{T} \quad (1) \quad \text{Αλλά } W_T = V_{\text{εφ}} I_{\text{εφ}} \cdot T = \frac{V_{\text{εφ}}^2}{R} T \quad (2)$$

$$\text{Από (1)(2)} \rightarrow P = \frac{V_{\text{εφ}}^2}{R}$$

6.8 Να αποδείξετε τη σχέση που δίνει τη σχέση τον συντελεστή αυτεπαγωγής L ενός πηνίου συναρτήσει των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του.

Απόδειξη

Για να αποδείξουμε τη σχέση του $E_{\text{αυτ}}$ και να υπολογίσουμε το συντελεστή αυτεπαγωγής κάνουμε τις ακόλουθες σκέψεις: Θεωρούμε πηνίο με μήκος ℓ , εμβαδού διατομής A και N σπείρες τυλιγμένο γύρω από πυρήνα το υλικό του οποίου έχει συντελεστή μαγνητικής διαπερατότητας μ . Αν υποθέσουμε ότι το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο μεταβάλλεται κατά Δi μέσα σε χρόνο Δt , με τη βοήθεια του ροοστάτη, τότε η ένταση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του πηνίου μεταβάλλεται κατά:

$$\Delta B = \mu \mu_0 \frac{N}{\ell} \Delta i$$

Τότε η διερχόμενη μαγνητική ροή μέσα από το εμβαδόν διατομής, A , του πηνίου μεταβάλλεται κατά,

$$\Delta \Phi = \Delta B \cdot A = \mu \mu_0 \frac{N}{\ell} A \cdot \Delta i$$

Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που επάγεται στα άκρα του πηνίου λόγω μεταβολής της μαγνητικής ροής θα δίνεται από το νόμο του Faraday και θα είναι:

$$E_{\text{αυτ}} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -N \mu \mu_0 \frac{N}{\ell} A \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t} = -\mu \mu_0 \frac{N^2}{\ell} A \cdot \frac{\Delta i}{\Delta t} = -L \frac{\Delta i}{\Delta t}$$

Από την τελευταία σχέση φαίνεται ότι ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου δίνεται από τη σχέση:

$$L = \mu \mu_0 \frac{N^2}{\ell} A$$

Αν δεν υπάρχει μεταλλικός πυρήνας και στη θέση είναι ο αέρας τότε: $L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} A$

7. Σύγχρονη Φυσική

♣7.1 Αν ως ένταση ακτινοβολίας, I ορίζουμε το μονόμετρο φυσικό μέγεθος που εκφράζει την ενέργεια που εκπέμπεται ανά μονάδα επιφανείας στη μονάδα του χρόνου να εκφράσετε την ένταση συναρτήσει του μήκους κύματος της ακτινοβολίας

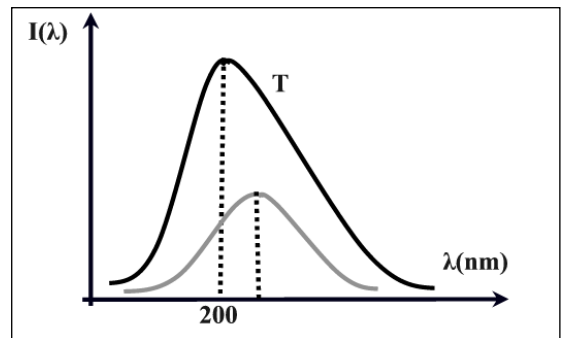
Απόδειξη

Η ένταση είναι ίση με το πηλίκο της ισχύος της ακτινοβολίας ανά μονάδα επιφανείας

$$I = \frac{\Delta E}{\Delta S \cdot \Delta t} = \frac{nh \cdot f}{\Delta S \cdot \Delta t} = \frac{nh \cdot c}{\Delta S \cdot \Delta t \cdot \lambda}$$

Η ισχύς P της ακτινοβολίας είναι ανάλογη του αριθμού των φωτονίων ανά sec και αντιστρόφως ανάλογη του μήκους κύματος, λ . Αν η ένταση της ακτινοβολίας οριστεί ως ισχύς ανά μονάδα επιφανείας $I_{ak} = P/\Delta S$ τότε το ίδιο ισχύει και για την ένταση.

♣7.2 Στο διάγραμμα βλέπουμε τη μεταβολή της έντασης $I(\lambda)$ ανά μονάδα μήκους μιας ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που εκπέμπει ένα μέλαν σώμα σε συνάρτηση με το μήκος κύματος λ αυτής. Για μια θερμοκρασία T το μέγιστο της καμπύλης αντιστοιχεί σε μήκος κύματος $\lambda = 200\text{nm}$. Να αποδείξετε ότι αν θέλουμε το μέγιστο της καμπύλης να αντιστοιχεί σε μήκος κύματος ορατής ακτινοβολίας θα πρέπει η θερμοκρασία του σώματος να μειωθεί



Απόδειξη

Οι ορατές ακτινοβολίες έχουν μήκη κύματος που κυμαίνονται στην περιοχή από 400nm έως 700nm. Άρα μιλάμε για μεγαλύτερο μήκος κύματος από 200nm. Σύμφωνα με το νόμο του Wien $\lambda_{\max} \cdot T = \text{σταθερό}$. Συνεπώς η απόλυτη θερμοκρασία του μέλανος σώματος πρέπει να μειωθεί. Το μέγιστο της καμπύλης στο διάγραμμα θα μετατοπιστεί προς τα κάτω και δεξιά.

7.3 Να αποδείξετε τη σχέση της συχνότητας κατωφλίου με το έργο εξαγωγής του μετάλλου.

Απόδειξη

Από τη φωτοηλεκτρική Εξίσωση του Einstein έχουμε: $K = h \cdot f - \phi$

Για να εξέλθει ένα ηλεκτρόνιο από το μέταλλο πρέπει: $K \geq 0 \rightarrow hf - \phi \geq 0$, δηλαδή η ενέργεια του προσπίπτοντος φωτονίου να είναι μεγαλύτερη ή οριακά ίση με το έργο εξαγωγής. Άρα:

$$hf \geq \phi \rightarrow f \geq \frac{\phi}{h} \rightarrow f_0 = \frac{\phi}{h}$$

Η ελάχιστη συχνότητα $f_0 = \frac{\phi}{h}$ είναι η συχνότητα κατωφλίου. Και εξαρτάται μόνο από το έργο εξαγωγής.

♣7.4 Να αποδείξετε ότι με τη βοήθεια του φωτοηλεκτρικού φαινομένου και της γραφικής παράστασης της τάσης αποκοπής V_0 ως προς τη συχνότητα f μπορούμε να υπολογίσουμε πειραματικά το έργο εξαγωγής ϕ του μετάλλου και της σταθερά του Planck, h .

Απόδειξη

Κάνουμε τη γραφική παράσταση της V_0 σε σχέση με τη συχνότητα f της ακτινοβολίας.

$$\text{Από τη σχέση } K=hf-\phi \rightarrow eV_0=hf-\phi \rightarrow V_0=\frac{h}{e}f-\frac{\phi}{e}$$

$$\text{Για } V_0=0 \xrightarrow{(3.7)} hf=\phi \rightarrow f=\frac{\phi}{h} \text{ η συχνότητα κατωφλίου}$$

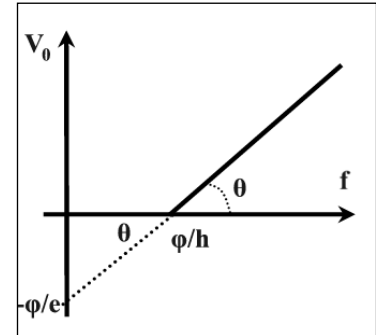
$$\text{Και για } f=0 \rightarrow V_0=-\frac{\phi}{e}$$

Άρα κάνουμε το πείραμα για διαφορετικές συχνότητες και υπολογίζουμε κάθε φορά την τάση αποκοπής εύκολα αφού μέσω αυτής μηδενίζεται το ρεύμα στο αμπερόμετρο. Κατασκευάζουμε τη γραφική (V_0 - f).

Από το σημείο που η ευθεία τέμνει τον άξονα των τάσεων υπολογίζουμε το έργο εξαγωγής

$$V_0=-\frac{\phi}{e} \rightarrow \phi=|V_0| \cdot e. \text{ και στη συνέχεια και την συχνότητα κατωφλίου } f_0=\frac{\phi}{h}.$$

$$\text{Από την κλίση βρίσκουμε τη σταθερά } h: \quad \epsilon\phi\theta=\frac{\phi/e}{f/h} \rightarrow \epsilon\phi\theta=\frac{h}{e} \rightarrow h=e \cdot \epsilon\phi\theta$$



♣7.5 Να αποδείξετε ότι με τη βοήθεια του φωτοηλεκτρικού φαινομένου και της γραφικής παράστασης της μέγιστης κινητικής ενέργειας των εξερχομένων ηλεκτρονίων K , ως προς τη συχνότητα f μπορούμε να υπολογίσουμε πειραματικά το έργο εξαγωγής ϕ του μετάλλου και της σταθερά του Planck, h .

Απόδειξη

Η συνάρτηση της K ως προς τη συχνότητα f προκύπτει από την φωτοηλεκτρική εξίσωση άρα

$$K=h \cdot f-\phi.$$

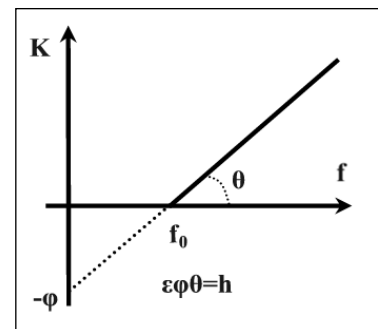
$$\text{Για } f=f_0=\frac{\phi}{h} \text{ έχουμε } K=0 \text{ και}$$

$$\text{για } f=0 \text{ έχουμε } K=-\phi$$

Η ευθεία (K - f) φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Η κλίση της ευθείας είναι πάντα η ίδια αφού είναι η σταθερά του Planck. Ιδού:

$$\text{Η κλίση: } \epsilon\phi\theta=\frac{\phi}{f_0}=\frac{h \cdot f_0}{f_0}=h$$



7.6 Ποιες από τις ιδιότητες του φωτοηλεκτρικού φαινομένου **δεν** εξηγούνται με την κλασσική φυσική.

Απάντηση

1. Αν η συχνότητα του φωτός είναι κάτω από τη συχνότητα κατωφλίου f_0 δεν παρατηρείται ρεύμα συνεπώς δεν υπάρχει έξοδος φωτοηλεκτρονίων από το μέταλλο. Η τιμή της είναι $f_0 = \phi/h$. Η κλασσική φυσική δεν βάζει τέτοιο περιορισμό, δηλαδή προβλέπει εκπομπή φωτοηλεκτρονίων για οποιαδήποτε συχνότητα του προσπίπτοντος φωτός εφόσον η έντασή του είναι αρκετή. Με την κβαντική θεωρία για να εξαχθεί ηλεκτρόνιο πρέπει το φωτόνιο να του μεταφέρει ενέργεια μεγαλύτερη ή ίση με το έργο εξαγωγής, $hf \geq \phi$. Άρα για κάθε μέταλλο υπάρχει μια χαρακτηριστική συχνότητα κατωφλίου κάτω από την οποία δεν εξέρχονται ηλεκτρόνια.

2. Η μέγιστη κινητική ενέργεια, K των φωτοηλεκτρονίων δεν εξαρτάται από την ένταση του προσπίπτοντος φωτός. Μεγαλύτερη ένταση φωτός σημαίνει περισσότερα εξερχόμενα ηλεκτρόνια αλλά η κινητική τους ενέργεια εξαρτάται από το έργο εξαγωγής ϕ και τη συχνότητα του προσπίπτοντος φωτός, σύμφωνα με τη σχέση $K = hf - \phi$. Και μάλιστα η K αυξάνεται καθώς αυξάνεται η συχνότητα f του φωτός. Αυτό είναι ανεξήγητο με την κλασσική θεωρία.

3. Ακόμα και αν η ένταση του φωτός είναι πολύ χαμηλή εκπέμπονται φωτοηλεκτρόνια σχεδόν αμέσως από την επιφάνεια (χρόνος $10^{-9}s$). Σύμφωνα με την κβαντική θεωρία αυτό είναι εφικτό διότι η ενέργεια του φωτός είναι συγκεντρωμένη σε μικρά ενεργειακά πακέτα (κβάντα) και κάθε ένα κβάντο μεταφέρει την ενέργεια και την ορμή του σε ένα ηλεκτρόνιο ώστε αυτό να μπορέσει να βγει από το μέταλλο.

♣7.7 Μεταλλική επιφάνεια βρίσκεται σε ένα δωμάτιο στο οποίο επικρατεί απόλυτο σκοτάδι και έχει σταθερή θερμοκρασία $27^\circ C$. Με τη βοήθεια του διαγράμματος $I(\lambda)$

I. Να δώσετε μια ερμηνεία για το γεγονός ότι η επιφάνεια δεν φαίνεται στο μάτι.

II. Να περιγράψετε πως θα πρέπει να μεταβάλλουμε τη θερμοκρασία ώστε η επιφάνεια να φαίνεται ερυθρή.

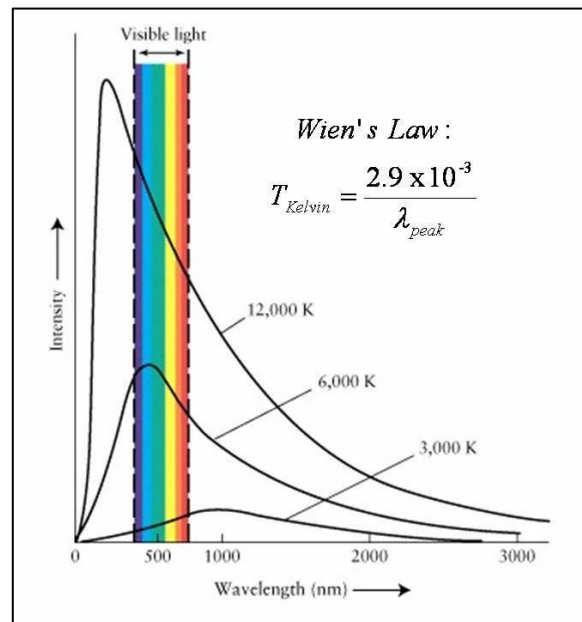
III. Να εξηγήσετε αν είναι δυνατόν σε κάποια θερμοκρασία να φαίνεται λευκή;

Απάντηση

I. Στους $27^\circ C$ δηλαδή στους $300K$ το μήκος κύματος αιχμής είναι στην περιοχή του υπερύθρου ($>700nm$) και συνεπώς δεν είναι ορατό στο γυμνό οφθαλμό.

II. Για να φαίνεται ερυθρή θα πρέπει το μήκος κύματος αιχμής να μειωθεί σε τιμές μικρότερες των $700nm$ και αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να αυξηθεί η θερμοκρασία της επιφάνειας κοντά σε $3000K$,

III. Η αύξηση της θερμοκρασίας μετατοπίζει τα μήκη κύματος σε μικρότερα μήκη κύματος σύμφωνα με το νόμο του Wien που είναι σε όλο το φάσμα του ορατού και μπορεί να φαίνεται λευκή.



7.8 Να αποδείξετε κατά τη σκέδαση Compton τότε η κινητική ενέργεια του ανακρουόμενου ηλεκτρονίου είναι μέγιστη και τότε μηδενική;

Απόδειξη

Όλα εξαρτώνται από τη γωνία σκέδασης φ που παίρνει τιμές στο διάστημα, $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$.

$$E = E' + K_e \rightarrow \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + K_e \rightarrow K_e = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}$$

(i) Αν η γωνία $\varphi = 0^\circ$: Τότε από τη σχέση $\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \sin \varphi)$ έχουμε:

$\sin \varphi = 1 \rightarrow \lambda' - \lambda = 0 \rightarrow \lambda' = \lambda$ Αυτό σημαίνει ότι το φωτόνιο διατηρεί την ενέργεια του και δεν μεταφέρει ενέργεια στο ηλεκτρόνιο οπότε και η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι μηδενική, $K_e = 0$.

(ii) Αν η γωνία είναι $\varphi = 180^\circ$ τότε $\sin \varphi = -1$ οπότε η διαφορά $\lambda' - \lambda = 2h/m_e c$ δηλαδή μέγιστη. Αρά το λ' έχει τη μέγιστη δυνατή τιμή και η συχνότητα f' την ελάχιστη δυνατή, όπως και η ενέργεια του σκεδαζόμενου φωτονίου. Συνεπώς μεταβιβάζει τη μέγιστη δυνατή ενέργεια στο ηλεκτρόνιο οπότε αυτό έχει τη μέγιστη κινητική ενέργεια, $K_e = \max$.

7.9 Γιατί η κλασική θεωρία δεν μπορεί να εξηγήσει το φαινόμενο Compton;

Απάντηση

Σύμφωνα με την κλασική θεωρία ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα συχνότητας f που προσπίπτει σ' ένα υλικό αναγκάζει τα ηλεκτρόνια του υλικού να ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα και να παράγουν με τη σειρά τους ηλεκτρομαγνητικό κύμα της ίδιας συχνότητας f . Η κλασική θεωρία, λοιπόν, θα περίμενε η σκεδαζόμενη δέσμη να έχει **την ίδια** συχνότητα και, αντίστοιχα, ίδιο μήκος κύματος με την προσπίπτουσα δέσμη. Ακόμα η συχνότητα της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας θα έπρεπε να εξαρτάται από την ένταση της προσπίπτουσας, αλλά και από το χρόνο έκθεσης του υλικού στην ακτινοβολία, πράγματα που **δεν** επιβεβαιώθηκαν πειραματικά.

7.10 Γιατί δεν μπορούμε να ανιχνεύσουμε το μήκος κύματος μίας μπάλας του μπάσκετ, μάζας 1 kg, που κινείται με ταχύτητα 3m/s;

Απάντηση

Η μπάλα έχει ορμή $p = m \cdot v = 3 \text{ kgm/s}$. Άρα το μήκος κύματος θα είναι:

$$\lambda = \frac{h}{p} \rightarrow \lambda = \frac{6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{3 \text{ kgm/s}} = 2,21 \cdot 10^{-34} \text{ m}$$

Ένα τόσο μικρό μήκος κύματος δεν ανιχνεύεται, δεν «υπάρχει». Η υπόθεση του de Broglie για την κυματική φύση της ύλης έχει ουσιαστικά εφαρμογή μόνο για σωματίδια ατομικής και υποατομικής κλίμακας. Συνεπώς στη μπάλα δεν μπορούμε να βρούμε κυματικές ιδιότητες στη συμπεριφορά της. Γενικώς για να έχει ένα αντικείμενο κυματικές ιδιότητες πρέπει να δίνει φαινόμενα περίθλασης ή συμβολής. Για να εμφανιστούν τα φαινόμενα αυτά πρέπει να γίνεται σκέδαση από αντικείμενα ή σχισμές που έχουν διαστάσεις συμβατές με τα μήκη κύματος των κυμάτων που αντιστοιχούν στο αντικείμενο. Μια μπάλα με μήκος κύματος λ της τάξης του 10^{-34} m δεν μπορεί να δώσει φαινόμενα περίθλασης όταν χτυπάει σε μια πέτρα, για παράδειγμα.

7.11 Πως η αρχή της απροσδιοριστίας ερμηνεύει το εύρος των φασματικών γραμμών:

Απάντηση

Σε ένα διεγερμένο άτομο ένα ή περισσότερα ηλεκτρόνια βρίσκονται σε κατάσταση μεγαλύτερης ενέργειας από τη θεμελιώδη. Όταν ένα τέτοιο ηλεκτρόνιο μεταπηδήσει στη θεμελιώδη του κατάσταση, εκπέμπει ένα φωτόνιο ενέργειας hf , ίσης με τη διαφορά ενέργειας των δύο καταστάσεων στις οποίες βρέθηκε. Σε κάθε τέτοιο "κβαντικό άλμα" εκπέμπεται ένα φωτόνιο. Η μελέτη των φασμάτων εκπομπής δείχνει ότι οι φασματικές γραμμές δεν είναι αυστηρά καθορισμένες αλλά η κάθε μια εμφανίζει ένα φυσικό εύρος. Το εύρος των φασματικών γραμμών μπορεί να εξηγηθεί με την αρχή της αβεβαιότητας.

Το διεγερμένο άτομο μπορεί να εκπέμψει ένα φωτόνιο οποιαδήποτε στιγμή στο χρονικό διάστημα από μηδέν μέχρι άπειρο. Ο μέσος χρόνος στον οποίο ένας μεγάλος αριθμός διεγερμένων ατόμων εκπέμπει ακτινοβολία είναι της τάξης του 10^{-8} s.

Από τη σχέση $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$ και επειδή $\Delta E = h\Delta f$ προκύπτει $h \Delta f \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$ και $\Delta f \geq \frac{1}{2\pi \cdot \Delta t}$

θέτοντας όπου $\Delta t = 10^{-8}$ s έχουμε $\Delta f \geq 1,6 \times 10^7$ Hz, όπου $1,6 \times 10^7$ Hz είναι το ελάχιστο εύρος της φασματικής γραμμής.