

ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ: ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΒΟΛΗ, ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΒΟΛΗ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να υπολογίσετε την εξίσωση τροχιάς της οριζόντιας βολής.

ΛΥΣΗ

Η **εξίσωση τροχιάς** σε μια βολή είναι μια σχέση μεταξύ των συντεταγμένων θέσης **x** και **y** η οποία δεν περιλαμβάνει το χρόνο. Η εξίσωση αυτή μας δίνει το είδος της τροχιάς του σώματος. Άρα για να βρούμε την εξίσωση τροχιάς, αρκεί να βρούμε ποιες σχέσεις συνδέουν τα **x** και **y** με το χρόνο και στη συνέχεια να κάνουμε απαλοιφή του χρόνου. Στην οριζόντια βολή ισχύουν:

$$\mathbf{x=u_0 \cdot t} \quad \mathbf{(1)}$$

και

$$\mathbf{y=1/2 \cdot g \cdot t^2} \quad \mathbf{(2)}$$

Από την σχέση **(1)** έχουμε:

$$\mathbf{t=x/u_0}$$

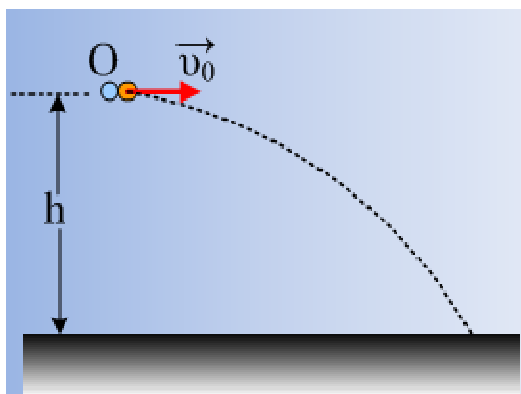
Άρα η **(2)** γράφεται:

$$\mathbf{y=1/2 \cdot g \cdot t^2} \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{y=1/2 \cdot g \cdot (x/u_0)^2} \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{y=1/2 \cdot g \cdot x^2 / u_0^2} \quad \mathbf{(Εξίσωση τροχιάς στην οριζόντια βολή)}$$

Η τελευταία εξίσωση ονομάζεται εξίσωση τροχιάς στην οριζόντια βολή.



Η τροχιά του σώματος στην οριζόντια βολή είναι παραβολική

Η εξίσωση αυτή στα μαθηματικά είναι εξίσωση παραβολής,γι' αυτό η τροχιά του σώματος στην οριζόντια βολή είναι παραβολική.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ένα μικρό σώμα βάλλεται οριζόντια από ύψος $h=20\text{ m}$ πάνω από το έδαφος με αρχική ταχύτητα $u_0=10\text{ m/s}$.

Να βρείτε:

- α)** τον χρόνο που χρειάζεται το σώμα για να φτάσει στο έδαφος,
- β)** την οριζόντια απόσταση που διανύει το σώμα μέχρι να φτάσει στο έδαφος,
- γ)** την οριζόντια μετατόπιση του σώματος όταν θα έχει διανύσει τη μισή κατακόρυφη απόσταση.

Δίνεται $g=10\text{ m/s}^2$.

Η αντίσταση του αέρα δεν λαμβάνεται υπόψη.

ΛΥΣΗ

α) Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι ο χρόνος κίνησης του σώματος της οριζόντιας βολής είναι:

$$t = \sqrt{2 \cdot h / g} \quad \text{ή}$$

Με απλή αντικατάσταση έχουμε:

$$t = \sqrt{2 \cdot h / g} \quad \text{ή}$$

$$t = \sqrt{2 \cdot 20 / 10} \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{t = 2\text{ s}}$$

Άρα ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα να φτάσει στο έδαφος είναι $t=2\text{ s}$.

β) Επίσης από την θεωρία γνωρίζουμε ότι η οριζόντια απόσταση του σώματος της οριζόντιας βολής, δηλαδή το βεληνεκές της οριζόντιας βολής είναι:

$$x_{\max}=u_0 \cdot t$$

Με απλή αντικατάσταση έχουμε:

$$x_{\max}=u_0 \cdot t \quad \text{ή}$$

$$x_{\max}=10 \cdot 2 \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{x_{\max}=20\text{ m}}$$

Άρα το βεληνεκές της οριζόντιας βολής είναι $x_{\max}=20\text{ m}$.

γ) Το σώμα διανύει κατακόρυφη απόσταση ίση με $y=h/2$ σε χρόνο:

$$t = \sqrt{2 \cdot h/2g} \quad \text{ή}$$

$$t = \sqrt{hg} \quad \text{ή}$$

$$t = \sqrt{20/10} \quad \text{ή}$$

$$t = \sqrt{2}\text{ s}$$

Στον χρόνο αυτό το σώμα μετατοπίζεται οριζόντια κατά:

$$x_1=u_0 \cdot t \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{x_1=10\sqrt{2}\text{ m}}$$

Άρα η οριζόντια μετατόπιση του σώματος όταν θα έχει διανύσει τη μισή κατακόρυφη απόσταση είναι $x_1=10\sqrt{2}\text{ m}$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Ένα σώμα ρίχνεται οριζόντια από ύψος $h=320\text{ m}$ από το έδαφος με ταχύτητα $u_0=60\text{ m/s}$.

Να βρείτε για το σώμα:

α) τον ολικό χρόνο κίνησης του,

β) το βεληνεκές του,

γ) την ταχύτητα με την οποία χτύπα στο έδαφος.

Δίνεται $g=10\text{ m/s}^2$.

Η αντίσταση του αέρα δεν λαμβάνεται υπόψη.

ΛΥΣΗ

α) Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι ο χρόνος κίνησης του σώματος της οριζόντιας βολής είναι:

$$t = \sqrt{2 \cdot h / g} \quad \text{ή}$$

Με απλή αντικατάσταση έχουμε:

$$t = \sqrt{2 \cdot h / g} \quad \text{ή}$$

$$t = \sqrt{2 \cdot 32010} \quad \text{ή}$$

$$t = 8 \text{ s}$$

Άρα ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα να φτάσει στο έδαφος είναι $t = 8 \text{ s}$.

β) Επίσης από την θεωρία γνωρίζουμε ότι η οριζόντια απόσταση του σώματος της οριζόντιας βολής, δηλαδή το βεληνεκές της οριζόντιας βολής είναι:

$$x_{\max} = u_0 \cdot t$$

Με απλή αντικατάσταση έχουμε:

$$x_{\max} = u_0 \cdot t \quad \text{ή}$$

$$x_{\max} = 60 \cdot 8 \quad \text{ή}$$

$$x_{\max} = 480 \text{ m}$$

Άρα το βεληνεκές της οριζόντιας βολής είναι $x_{\max} = 480 \text{ m}$.

γ) Για να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας με την οποία το σώμα φτάνει στο έδαφος θα πρέπει να βρούμε το μέτρο των συνιστωσών της ταχύτητας $u \rightarrow$, δηλαδή το μέτρο των ταχυτήτων $u \rightarrow_x$ και $u \rightarrow_y$.

Έτσι το μέτρο της ταχύτητας $u \rightarrow_x$ είναι:

$$u_x = u_0 \quad \text{ή}$$

$$u_x = 60 \text{ m/s}$$

Επίσης το μέτρο της ταχύτητας $u \rightarrow_y$ είναι:

$$u_y = g \cdot t \quad \text{ή}$$

$$u_y = 10 \cdot 8 \quad \text{ή}$$

$$u_y = 80 \text{ m/s}$$

Άρα έχουμε:

$$\vec{u} = u_x + u_y$$

$$u = (u_x^2 + u_y^2)^{1/2}$$

$$u = (60^2 + 80^2)^{1/2}$$

$$u = (10^4)^{1/2}$$

$$\mathbf{u = 100 \text{ m/s}}$$

Αν θεωρήσουμε θ την γωνία του διανύσματος της ταχύτητας με τον οριζόντιο άξονα, θα έχουμε:

$$\epsilon\phi\phi = u_y / u_0 \quad \text{ή}$$

$$\epsilon\phi\phi = 80 / 60 \quad \text{ή}$$

$$\epsilon\phi\phi = 4 / 3 \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{\phi = 53^\circ}$$

Άρα τη στιγμή που φθάνει στο έδαφος το σώμα έχει ταχύτητα μέτρου $u = 100 \text{ m/s}$ και το διανύσματος της ταχύτητας σχηματίζει γωνία με τον οριζόντιο άξονα $\phi = 53^\circ$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Μια σφαίρα βάλλεται οριζόντια από ύψος $h = 405 \text{ m}$ και με αρχική ταχύτητα $u_0 = 36 \text{ m/s}$. Να βρεθεί σε πόσο χρόνο θα φθάσει η σφαίρα στο οριζόντιο έδαφος, πόσο θα απέχει τότε από το σημείο βολής της και ποια ταχύτητα θα έχει τη στιγμή που φθάνει στο έδαφος. Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Η αντίσταση του αέρα δεν λαμβάνεται υπόψη.

ΛΥΣΗ

Όταν η σφαίρα, μετά από χρόνο t , φθάσει στο οριζόντιο έδαφος θα έχει καταπέσει κατακόρυφα κατά h και συγχρόνως θα έχει

μετατοπιστεί κατά s . Συνεπώς η σφαίρα εκτελεί σύνθετη κίνηση για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad (1) \quad \text{και}$$

$$s = u_0 \cdot t \quad (2)$$

Από την σχέση (1) παίρνουμε:

$$t = (2h/g)^{1/2}$$

$$t = (2 \cdot 405/10)^{1/2}$$

$$t = 9 \text{ s}$$

Άρα η σφαίρα στο οριζόντιο έδαφος θα φθάσει σε χρόνο $t=9$ s.

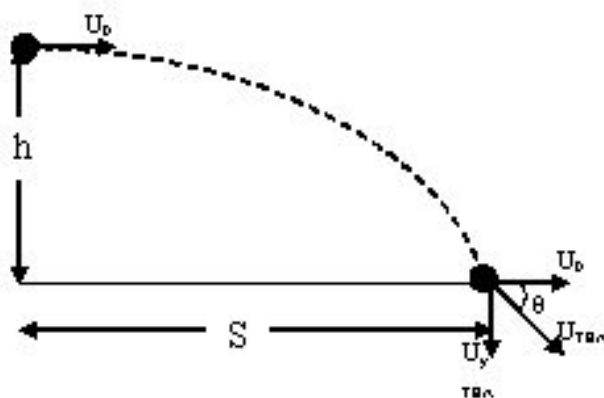
Από τον τύπο (1) έχουμε:

$$s = u_0 \cdot t$$

$$s = 36 \text{ m/s} \cdot 9 \text{ s}$$

$$s = 324 \text{ m}$$

Για να βρούμε πόσο θα απέχει από το σημείο βολής της θα χρησιμοποιήσουμε το πυθαγόρειο θεώρημα:



$$d = (h^2 + s^2)^{1/2}$$

$$d = (405^2 + 324^2)^{1/2}$$

$$d = 518,65 \text{ m}$$

Άρα η σφαίρα όταν θα φθάσει στο οριζόντιο έδαφος, θα απέχει από το σημείο βολής της απόσταση $d=518,65 \text{ m}$.

Όμως η ταχύτητα της σφαίρας σε αυτή την θέση είναι η συνισταμένη

της u_0 και u_y .

Η u_y αποκτάται στην κατακόρυφη πτώση και έχει μέτρο:

$$u_y = (2 \cdot g \cdot h)^{1/2}$$

Η ταχύτητα τη στιγμή που φθάνει στο έδαφος θα έχει μέτρο:

$$u = (u_0^2 + u_y^2)^{1/2}$$

$$u = (u_0^2 + 2 \cdot g \cdot h)^{1/2}$$

$$u = (36^2 + 2 \cdot 10 \cdot 405)^{1/2}$$

$$\mathbf{u = 96,93 \text{ m/s}}$$

Αν θεωρήσουμε φ την γωνία του διανύσματος της ταχύτητας με τον οριζόντιο άξονα, θα έχουμε:

$$\epsilon\varphi\varphi = u_y / u_0 = (2 \cdot g \cdot h)^{1/2} / u_0$$

$$\epsilon\varphi\varphi = 90 / 36$$

$$\epsilon\varphi\varphi = 2,5$$

$$\mathbf{\varphi = 68^\circ}$$

Άρα τη στιγμή που φθάνει στο έδαφος η σφαίρα έχει ταχύτητα μέτρου $u = 96,93 \text{ m/s}$ και το διανύσματος της ταχύτητας σχηματίζει γωνία με την κατακόρυφο $\varphi = 68^\circ$.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Σώμα εκτοξεύεται από ύψος $h = 45 \text{ m}$ πάνω από το έδαφος με οριζόντια ταχύτητα $u_0 = 30 \text{ m/s}$.

Αν $g = 10 \text{ m/s}^2$, να υπολογίσετε:

α) Το χρόνο που χρειάζεται ώστε το σώμα να φτάσει στο έδαφος, καθώς και το βεληνεκές της οριζόντιας βολής.

β) το μέτρο της ταχύτητας με την οποία το σώμα φθάνει στο έδαφος.

γ) τις τιμές της οριζόντιας και κατακόρυφης μετατόπισης του σώματος ύστερα από χρόνο $t = 2 \text{ s}$.

δ) τη δυναμική ενέργεια του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 1 \text{ s}$, αν η μάζα του είναι 2 kg .

ΛΥΣΗ

α) Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι ο χρόνος κίνησης του σώματος της οριζόντιας βολής είναι:

$$t = \sqrt{2 \cdot h/g} \quad \text{ή}$$

Με απλή αντικατάσταση έχουμε:

$$t = \sqrt{2 \cdot h/g} \quad \text{ή}$$

$$t = \sqrt{2 \cdot 45/10}$$

ή

$$t = 3 \text{ s}$$

Άρα ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα να φτάσει στο έδαφος είναι $t = 3 \text{ s}$.

Επίσης από την θεωρία γνωρίζουμε ότι η οριζόντια απόσταση του σώματος της οριζόντιας βολής, δηλαδή το βεληνεκές της οριζόντιας βολής είναι:

$$x_{\max} = u_0 \cdot t$$

Με απλή αντικατάσταση έχουμε:

$$x_{\max} = u_0 \cdot t \quad \text{ή}$$

$$x_{\max} = 30 \cdot 3 \quad \text{ή}$$

$$x_{\max} = 90 \text{ m}$$

Άρα το βεληνεκές της οριζόντιας βολής είναι $x_{\max} = 90 \text{ m}$.

β) Για να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας με την οποία το σώμα φτάνει στο έδαφος θα πρέπει να βρούμε το μέτρο των συνιστωσών της ταχύτητας $u \rightarrow$, δηλαδή το μέτρο των ταχυτήτων $u \rightarrow_x$ και $u \rightarrow_y$.

Έτσι το μέτρο της ταχύτητας $u \rightarrow_x$ είναι:

$$u_x = u_0 \quad \text{ή}$$
$$u_x = 30 \text{ m/s}$$

Επίσης το μέτρο της ταχύτητας $u \rightarrow y$ είναι:

$$u_y = g \cdot t \quad \text{ή}$$

$$u_y = 10 \cdot 3 \quad \text{ή}$$

$$u_y = 30 \text{ m/s}$$

Άρα έχουμε:

$$\mathbf{u} \rightarrow = \mathbf{u} \rightarrow x + \mathbf{u} \rightarrow y$$

$$u = (u_x^2 + u_y^2)^{1/2}$$

$$u = (30^2 + 30^2)^{1/2}$$

$$\mathbf{u} = 30 \cdot \sqrt{2} \text{ m/s}$$

Άρα το μέτρο της ταχύτητας με την οποία το σώμα φτάνει στο έδαφος είναι $u = 30 \cdot \sqrt{2} \text{ m/s}$.

γ) Για να υπολογίσουμε τις τιμές της οριζόντιας και κατακόρυφης μετατόπισης του σώματος ύστερα από χρόνο $t = 2 \text{ s}$ θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις της οριζόντιας βολής:

$$u_x = u_0$$

(Εξισώσεις οριζόντιας βολής στον άξονα Ox)

$$x = u_0 \cdot t$$

και

$$u_y = g \cdot t$$

(Εξισώσεις οριζόντιας βολής στον άξονα Oy)

$$y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Άρα με απλή αντικατάσταση έχουμε:

$$x = u_0 \cdot t \quad \text{ή}$$

$$x = 30 \cdot 2 \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{x} = 60 \text{ m}$$

Άρα η οριζόντια μετατόπιση του σώματος ύστερα από χρόνο $t=2s$ είναι $x=60m$.

Επίσης με απλή αντικατάσταση έχουμε:

$$y = 1/2 \cdot g \cdot t^2 \quad \text{ή}$$

$$y = 1/2 \cdot 10 \cdot 2^2$$

$$y = 20 \text{ m}$$

Άρα η κατακόρυφη μετατόπιση του σώματος ύστερα από χρόνο $t=2s$ είναι $y=20 \text{ m}$.

δ) Η κατακόρυφη μετατόπιση του σώματος ύστερα από χρόνο $t=1s$ είναι:

$$y = 1/2 \cdot g \cdot t^2 \quad \text{ή}$$

$$y = 1/2 \cdot 10 \cdot 1^2$$

$$y = 5 \text{ m}$$

Όμως ύστερα από χρόνο $t=1s$ το σώμα θα βρίσκεται σε ύψος $h'=h-y$ από την επιφάνεια του εδάφους

Άρα έχουμε:

$$h' = h - y \quad \text{ή}$$

$$h' = 45 - 5 \quad \text{ή}$$

$$h' = 40 \text{ m}$$

Συνεπώς η δυναμική ενέργεια του σώματος τη χρονική στιγμή $t=1 \text{ s}$ ισούται:

$$U = m \cdot g \cdot h' \quad \text{ή}$$

$$U = 2 \cdot 10 \cdot 40 \quad \text{ή}$$

$$U = 800 \text{ J}$$

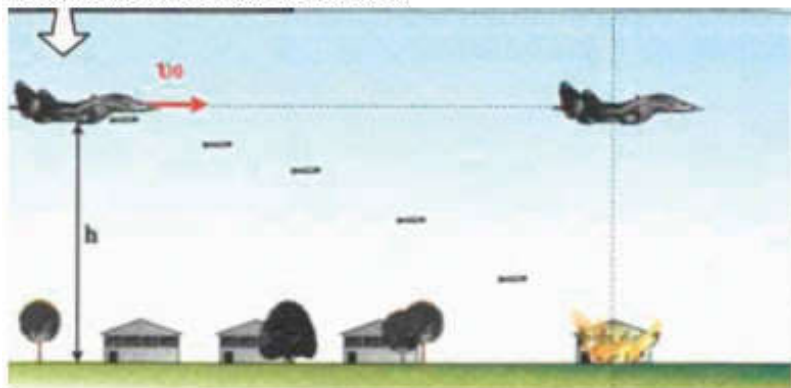
Άρα η δυναμική ενέργεια του σώματος τη χρονική στιγμή $t=1s$ είναι $U=800 \text{ J}$.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Ας θεωρήσουμε ένα βομβαρδιστικό αεροπλάνο που κινείται σε

ύψος h από το έδαφος με ταχύτητα u_0 . Η βόμβα βρίσκεται στο αεροπλάνο άρα τη στιγμή που αφήνεται να πέσει έχει την ίδια ταχύτητα με το αεροπλάνο.

Το αεροπλάνο ελευθερώνει τη βόμβα.



Ποιους παράγοντες πρέπει να λάβει υπόψη ο πιλότος ώστε η βόμβα να χτυπήσει το στόχο; Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει αντίσταση του αέρα.

ΛΥΣΗ

Είναι προφανές ότι, οι παράγοντες που θα παίξουν καθοριστικό ρόλο, είναι το ύψος στο οποίο το αεροπλάνο πετά, η ταχύτητά του και η οριζόντια απόστασή του από το στόχο τη στιγμή που απελευθερώνει τη βόμβα.

Η κίνηση της βόμβας στον κατακόρυφο άξονα είναι ελεύθερη πτώση ($u=u_0$) και άρα ισχύει:

$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Στην εξίσωση αυτή ο μόνος άγνωστος είναι ο χρόνος κατά τον οποίο κινείται η βόμβα. Επομένως μπορεί να προσδιοριστεί. Επιπλέον η βόμβα κινείται οριζόντια με κίνηση ευθύγραμμη ομαλή επί χρόνο t , όσο δηλαδή διαρκεί η ελεύθερη πτώση της.

Το οριζόντιο διάστημα που θα διανύσει η βόμβα, προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$s = u_0 \cdot t$$

όπου:

u_0 η οριζόντια ταχύτητα της βόμβας, που είναι ίση με την ταχύτητα του αεροπλάνου τη στιγμή που αυτή απελευθερώνεται.

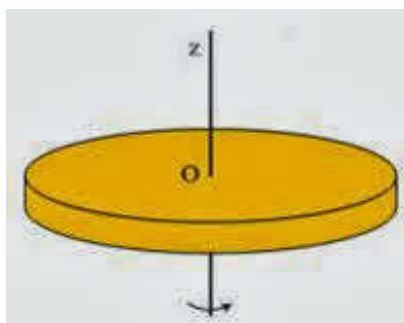
Άρα, για να συναντήσει η βόμβα το στόχο, το αεροπλάνο πρέπει να την απελευθερώσει, όταν απέχει απ' αυτόν οριζόντια απόσταση $s = u_0 \cdot t$.

Τη χρονική στιγμή που η βόμβα βρίσκει το στόχο το αεροπλάνο βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφη (αεροπλάνο και βόμβα έχουν ίδια οριζόντια ταχύτητα άρα μετατοπίζονται το ίδιο στην οριζόντια διεύθυνση στον ίδιο χρόνο).

ΟΜΑΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ένας δίσκος ακτίνας $R=20\text{ cm}$ περιστρέφεται ομαλά γύρω από τον κατακόρυφο άξονα zz' , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Αν η χρονική διάρκεια των 20 στροφών του δίσκου είναι 40 s, να βρείτε:

- α)** τη συχνότητα περιστροφής του δίσκου,
- β)** την περίοδο περιστροφής του δίσκου,
- γ)** τη γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του δίσκου,
- δ)** τη κεντρομόλο επιτάχυνση των σημείων της περιφέρειας του δίσκου,
- ε)** τη γωνιακή ταχύτητα των σημείων του δίσκου.

ΛΥΣΗ

α) Η συχνότητα περιστροφής του δίσκου δίνεται από τον τύπο:

$$f = N/t$$

όπου N ο αριθμός των περιστροφών στον χρόνο t .

Όμως για χρόνο $t=40\text{ s}$ έχουμε $N=20$ περιστροφές.

Άρα:

$$f = N/t \quad \text{ή}$$

$$f = 20/40 \quad \text{ή}$$

$$f = 0,5\text{ Hz}$$

Άρα η συχνότητα περιστροφής του δίσκου είναι $f=0,5\text{ Hz}$.

β) Η περίοδος T είναι ο χρόνος μίας περιόδου και συνδέεται με την συχνότητα με την σχέση:

$$T=1/f$$

Οπότε έχουμε:

$$T=1/f \quad \text{ή}$$

$$T=1/0,5 \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{T=2 \text{ s}}$$

Άρα η περίοδος περιστροφής του δίσκου είναι $T=2 \text{ s}$.

γ) Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των σημείων της περιφέρειας του δίσκου δίνεται από τον τύπο:

$$u=2\cdot\pi\cdot R/T$$

Οπότε έχουμε:

$$u=2\cdot\pi\cdot R/T \quad \text{ή}$$

$$u=2\cdot\pi\cdot 0,2/2 \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{u=\pi/5 \text{ m/s}}$$

Η διεύθυνση της είναι συνεχώς εφαπτόμενη στην τροχιά.

Άρα το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των σημείων της περιφέρειας του δίσκου είναι $u=\pi/5$

m/s με διεύθυνση συνεχώς εφαπτόμενη στην τροχιά.

δ) Η κεντρομόλος επιτάχυνση των σημείων της περιφέρειας του δίσκου δίνεται από τον τύπο:

$$a_k=u^2/R$$

Οπότε έχουμε:

$$a_k=u^2/R$$

$$a_k=(\pi/5)^2/0,2$$

$$\mathbf{a_k=\pi^2/5 \text{ m/s}^2}$$

Η διεύθυνση της είναι η διεύθυνση της ακτίνας ενώ η φορά της προς το κέντρο του δίσκου.

Άρα η κεντρομόλο επιτάχυνση των σημείων της περιφέρειας του δίσκου έχει μέτρο $a_k = \pi^2/5$ m/s² με διεύθυνση τη διεύθυνση της ακτίνας και φορά προς το κέντρο του δίσκου.

ε) Όλα τα σημεία του δίσκου, είτε βρίσκονται στην περιφέρεια του δίσκου είτε στο εσωτερικό του, έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα $\omega \rightarrow$. Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας $\omega \rightarrow$ είναι:

$$\omega = 2 \cdot \pi / T = 2 \cdot \pi \cdot f$$

Οπότε έχουμε:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot 0,5$$

$$\omega = \pi \text{ rad/s}$$

Άρα το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας $\omega \rightarrow$ των σημείων του δίσκου είναι $\omega = \pi \text{ rad/s}$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ένας αθλητής τρέχει με ταχύτητα σταθερού μέτρου σε κυκλικό στίβο με μήκος περιφέρειας 800m. Ο αθλητής κάνει μια περιφορά σε χρόνο 100 s.

Να βρείτε:

- α)** την περίοδο της κυκλικής του κίνησης,
- β)** την συχνότητα της κυκλικής του κίνησης,
- γ)** το σταθερό μέτρο της γραμμικής του ταχύτητας.

ΛΥΣΗ

α) Αφού ο αθλητής κάνει μια περιφορά σε χρόνο 120 s, η περίοδος του είναι **$T = 100 \text{ s}$** .

Άρα η περίοδος της κυκλικής κίνησης του αθλητή είναι $T = 100 \text{ s}$.

β) Η περίοδος T συνδέεται με την συχνότητα f με την σχέση:

$$T = 1/f$$

Οπότε έχουμε:

$$T = 1/f \quad \text{ή}$$

$$f = 1/T \quad \text{ή}$$

$$f=1/100 \quad \text{ή}$$

$$f=0,01 \text{ Hz}$$

Άρα η συχνότητα της κυκλικής κίνησης του αθλητή είναι $f=0,01 \text{ Hz}$.

γ) Ο αθλητής εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση και σε χρόνο $t=100\text{s}$ διανύει όλη την περιφέρεια του κυκλικού στίβου. Άρα διανύει διάστημα $s=800\text{m}$.

Ο τύπος του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας είναι:

$$u=s/t$$

Οπότε έχουμε:

$$u=s/t \quad \text{ή}$$

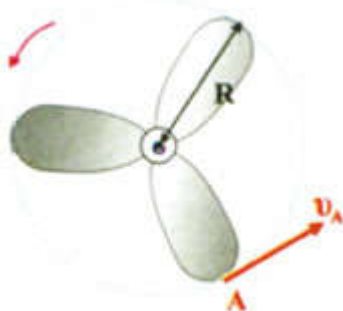
$$u=800/100 \quad \text{ή}$$

$$u=8 \text{ m/s}$$

Άρα το σταθερό μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του αθλητή είναι $u=8 \text{ m/s}$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Το άκρο (Α) του πτερυγίου ενός ανεμιστήρα στρέφεται με γραμμική ταχύτητα, 15m/s και η ακτίνα του έχει μήκος 60cm .



α) Να υπολογιστούν: η περίοδος, η συχνότητα και η γωνιακή ταχύτητα.

β) Να υπολογισθεί επίσης ποιο μήκος τόξου s θα έχει διανυθεί σε χρόνο ενός εκατοστού του δευτερολέπτου.

ΛΥΣΗ

α) Από τη σχέση:

$$u = 2 \cdot \pi \cdot R / T$$

επιλύοντας ως προς την περίοδο T βρίσκουμε:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot R / u \quad \text{ή}$$

$$T = 0,25 \text{ s}$$

Άρα η περίοδος της ομαλής κυκλικής κίνησης είναι $T = 0,25 \text{ s}$.

Η σχέση μεταξύ συχνότητας και περιόδου είναι:

$$f = 1/T$$

Αντικαθιστώντας την περίοδο T με την τιμή της, βρίσκουμε την τιμή της συχνότητας.

$$f = 1/0,25$$

$$\mathbf{f = 4 \text{ Hz}}$$

Άρα η συχνότητα της ομαλής κυκλικής κίνησης είναι $f = 4 \text{ Hz}$.

Η γωνιακή ταχύτητα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

από την οποία με αντικατάσταση έχουμε:

$$\omega = 6,28 \cdot 4 \text{ rad/s} \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{\omega = 25,12 \text{ rad/s}}$$

Άρα η γωνιακή ταχύτητα της ομαλής κυκλικής κίνησης είναι $\omega = 25,12 \text{ rad/s}$.

β) Το μήκος του τόξου που θα διανυθεί σε χρόνο $t = 0,01 \text{ s}$ θα υπολογιστεί από τη σχέση:

$$s = u \cdot t$$

Με αντικατάσταση έχουμε:

$$s = 15 \cdot 0,01 \text{ m} \quad \text{ή}$$

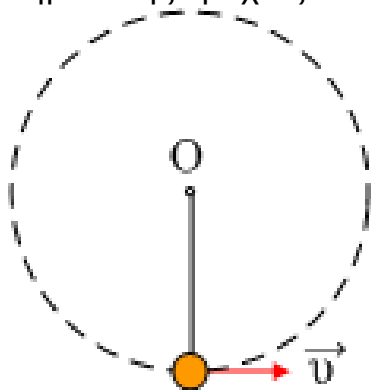
$$s = 0,15 \text{ m}$$

Άρα το μήκος τόξου που θα έχει διανυθεί σε χρόνο ενός εκατοστού του δευτερολέπτου είναι $s = 0,15 \text{ m}$.

ΚΕΝΤΡΟΜΟΛΟΣ ΔΥΝΑΜΗ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ένα σώμα μάζας 1 kg διαγράφει κατακόρυφο κύκλο δεμένο στο άκρο νήματος μήκους 1 m . Τη στιγμή που περνάει από το χαμηλότερο σημείο της τροχιάς του, έχει ταχύτητα μέτρου 10 m/s .



Να περιγράψετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη θέση αυτή και να υπολογίστε τα μέτρα τους.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

ΛΥΣΗ

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα είναι το βάρος και η τάση του νήματος.

Το βάρος του σώματος ισούται:

$$B = m \cdot g = 1 \cdot 10 \text{ N} = 10 \text{ N}$$

Άρα το βάρος του σώματος είναι $B = 10 \text{ N}$.

Επειδή το σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση ισχύει:

$$\Sigma F = F_k = m \cdot u^2 / R \quad \text{ή}$$

$$T - B = m \cdot u^2 / R \quad \text{ή}$$

$$T = mg + m \cdot u^2 / R \quad \text{ή}$$

$$T = 10 + 1 \cdot 10^2 / 1 \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{T = 110 \text{ N}}$$

Άρα η τάση του νήματος είναι $T = 110 \text{ N}$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Μια μικρή σφαίρα εκτελεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας $R = 20 \text{ cm}$, δεμένη στο ελεύθερο άκρο ενός δυναμόμετρου. Η σφαίρα εκτελεί 8 κύκλους σε χρόνο 16 s και το δυναμόμετρο δείχνει διαρκώς 5 N.

Να υπολογίσετε:

- α)** τη συχνότητα περιφοράς f ,
- β)** τη γραμμική ταχύτητα u της σφαίρας,
- γ)** τη μάζα m της σφαίρας.

ΛΥΣΗ

α) Η σφαίρα κάνει 8 κύκλους σε χρόνο 16 s.

Άρα η συχνότητα περιφοράς της είναι:

$$f = N/t$$

Με απλή αντικατάσταση έχουμε:

$$f = N/t \quad \text{ή}$$

$$f = 8/16 \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{f = 0,5 \text{ Hz}}$$

Άρα η συχνότητα περιφοράς της σφαίρας είναι $f = 0,5 \text{ Hz}$.

β) Στην ομαλή κυκλική κίνηση ισχύουν οι σχέσεις:

$$u = \omega \cdot R$$

και

$$\omega = 2 \cdot \pi / T$$

Άρα έχουμε:

$$u = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot f \quad \text{ή}$$

$$u = 2 \cdot \pi \cdot 0,2 \cdot 0,5 \quad \text{ή}$$

$$u = 0,2\pi \text{ m/s}$$

Άρα η γραμμική ταχύτητα της σφαίρας είναι $u = 0,2\pi \text{ m/s}$.

Υ) Η σφαίρα εκτελεί κυκλική κίνηση και στη διεύθυνση της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς ασκείται σε αυτή μόνο η δύναμη **F** από το δυναμόμετρο, που το μέτρο της είναι η ένδειξη του δυναμομέτρου. Άρα έχουμε:

$$\Sigma F = F$$

Η ΣF αποτελεί την απαραίτητη κεντρομόλο δύναμη.
Άρα:

$$\Sigma F = F_k = m \cdot u^2 / R$$

$$m = F \cdot R / u^2$$

$$m = 5 \cdot 0,2 / (0,2 \cdot \pi)^2$$

$$m = 25 / \pi^2 \text{ kg}$$

Άρα η μάζα της σφαίρας είναι $m = 25 / \pi^2 \text{ kg}$.

ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΚΕΝΤΡΟΜΟΛΟΥ ΔΥΝΑΜΗΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ένα Ι.Χ. αυτοκίνητο που μαζί με το φορτίο του έχει μάζα 1.800 kg κινείται στην εθνική οδό. Ξαφνικά ο οδηγός αντιλαμβάνεται ότι ο δρόμος έχει κλείσει από σταματημένα αυτοκίνητα και εφαρμόζει τα φρένα, με αποτέλεσμα οι τροχοί να μην περιστρέφονται. Τη στιγμή που ενεργοποιούνται, η απόσταση του αυτοκινήτου από το εμπόδιο είναι 150 m. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ των τροχών και του εδάφους είναι 0,2. Αν τη στιγμή που ο οδηγός εφαρμόζει τα φρένα η ταχύτητα του οχήματος είναι:

α) 144 km/h

β) 108 km/h

γ) 72 km/h,

να βρεθεί σε κάθε περίπτωση αν το όχημα θα πέσει επάνω στα σταματημένα αυτοκίνητα.

ΛΥΣΗ

Κατά τον κατακόρυφο άξονα ασκείται η αντίδραση N που είναι

δύναμη από επαφή. Στο αυτοκίνητο ασκείται και το βάρος B που είναι δύναμη από απόσταση.

Η μόνη δύναμη που ασκείται στη διεύθυνση της κίνησης και επιβραδύνει το όχημα είναι η τριβή T .

Σύμφωνα με το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής έχουμε:

$$T = m \cdot a$$

Επειδή

$$T = \mu \cdot N$$

και

$$N = B$$

προκύπτει ότι:

$$\mu \cdot m \cdot g = m \cdot a \quad \text{ή}$$

$$a = g \cdot \mu$$

Από τη σχέση αυτή φαίνεται ότι η επιβράδυνση είναι σταθερή επειδή ο συντελεστής τριβής είναι σταθερός.

Θα ισχύουν οι σχέσεις της ομαλά επιβραδυνόμενης κίνησης, δηλαδή:

$$x = u_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad (1)$$

$$u = u_0 - a \cdot t \quad (2)$$

Όταν το όχημα σταματήσει ($u=0$) τότε από τη σχέση (2) έχουμε:

$$u_0 = a \cdot t \quad \text{ή}$$

$$t = u_0 / a$$

Με αντικατάσταση του χρόνου αυτού στη σχέση (1) προκύπτει το μέγιστο διάστημα $x_{\max}$.

$$x_{\max} = u_0^2 / 2g \cdot \mu$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η ζητούμενη απόσταση είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας τη στιγμή που ο οδηγός εφαρμόζει τα φρένα και αντιστρόφως ανάλογη του συντελεστή τριβής ολίσθησης.

α) Για $u_0 = 144 \text{ km/h} = 40 \text{ m/s}$.

Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$x_{\max} = (40^2/2) \cdot 10 \cdot 0,2 \text{ m} \quad \text{ή}$$

$$x_{\max} = 400 \text{ m}$$

Άρα επειδή τα σταματημένα οχήματα είναι σε απόσταση 150m το Ι.Χ. αυτοκίνητο θα πέσει επάνω τους, και δεν μπορεί να αποφύγει τη σύγκρουση.

β) Για $u_0 = 108 \text{ km/h} = 30 \text{ m/s}$ το απαιτούμενο διάστημα για να σταματήσει το Ι.Χ. αυτοκίνητο είναι:

$$x_{\max} = 225 \text{ m}$$

Άρα και στην περίπτωση αυτή δε θα αποφευχθεί η σύγκρουση.

γ) $u_0 = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$.

Με αντικατάσταση προκύπτει:

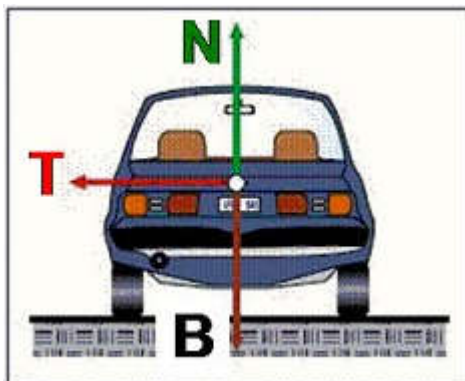
$$x_{\max} = (400/2) \cdot 10 \cdot 0,2 = 100 \text{ m}$$

Στην περίπτωση αυτή το Ι.Χ. αυτοκίνητο θα σταματήσει 50m από τα σταματημένα οχήματα.

Από τις περιπτώσεις α και γ προκύπτει ότι, όταν η ταχύτητα είναι διπλάσια (από 72 km/h έγινε 144 km/h) το αντίστοιχο διάστημα που απαιτείται για να σταματήσει το όχημα είναι τετραπλάσιο.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ένα Ι.Χ. αυτοκίνητο μάζας 1.800 kg, πρόκειται να πάρει στροφή ακτίνας 100m σε οριζόντιο δρόμο.



Πόση πρέπει να είναι η μέγιστη ταχύτητά του για να περάσει τη στροφή με ασφάλεια;
Δίνεται ο συντελεστής τριβής ολίσθησης $\mu=0,2$.

ΛΥΣΗ

Στην προκειμένη περίπτωση, αν το όχημα γλιστρήσει θα φύγει προς τα έξω.

Συνεπώς η τριβή ως δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση θα έχει φορά προς το μέσα μέρος της στροφής.

Άρα θα ενεργεί ως κεντρομόλος δύναμη και θα ισχύει:

$$T = F_{\kappa} \quad \text{ή}$$

$$\mu \cdot m \cdot g = m \cdot u^2 / R \quad \text{ή}$$

$$u^2 = \mu \cdot g \cdot R \quad \text{ή}$$

$$u = \sqrt{\mu \cdot g \cdot R}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των μ, g, R έχουμε:

$$u = \sqrt{0,2 \cdot 10 \cdot 100} \text{ m/s} \quad \text{ή}$$

$$u = 10\sqrt{2} \text{ m/s} \quad \text{ή}$$

$$u = 14,1 \text{ m/s} \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{u = 50,8 \text{ km/h.}}$$

Άρα η μέγιστη ταχύτητά του αυτοκινήτου για να περάσει τη στροφή με ασφάλεια θα πρέπει να είναι $u=50,8 \text{ km/h}$.

Τι θα συμβεί αν ο οδηγός θελήσει να περάσει τη στροφή με ταχύτητα μεγαλύτερη από την ευρεθείσα;

Είναι προφανές, ότι η απαιτούμενη κεντρομόλος δύναμη για να πάρει τη στροφή το όχημα θα είναι μεγαλύτερη. Συνεπώς θα απαιτηθεί μεγαλύτερη τριβή από την $T = \mu \cdot m \cdot g$. Επειδή αυτό δεν συμβαίνει, το αυτοκίνητο θα φύγει προς τα έξω στη στροφή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΒΟΛΗ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ένα σώμα βρίσκεται σε ύψος h πάνω από το έδαφος και βάλλεται οριζόντια με ταχύτητα $u_0 = 80 \text{ m/s}$. Αν το σώμα φτάνει στο έδαφος σε χρόνο $t = 6 \text{ s}$, να βρείτε:

- α)** το ύψος h .
 - β)** το μέτρο της ταχύτητας με την οποία το σώμα φτάνει στο έδαφος.
 - γ)** τη γωνιακή εκτροπή του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 4 \text{ s}$.
 - δ)** την οριζόντια μετατόπιση του σώματος, όταν η κατακόρυφη μετατόπιση είναι $y = 20 \text{ m}$.
- Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

ΛΥΣΗ

- α)** 180 m ,
- β)** 100 m/s ,
- γ)** $\varphi = 1/2$,
- δ)** 160 m .

ΑΣΚΗΣΗ 2

Σώμα μάζας 4 kg εκτελεί οριζόντια βολή από ύψος h με αρχική ταχύτητα $u_0 = 9 \text{ m/s}$ και φτάνει στο έδαφος με ταχύτητα $u_{\text{εδ}} = 15 \text{ m/s}$.

Αν $g = 10 \text{ m/s}^2$, να υπολογίσετε:

- α)** το χρόνο κίνησης μέχρι το έδαφος.
- β)** το ύψος h .
- γ)** το βεληνεκές της βολής.
- δ)** τη μηχανική ενέργεια του σώματος στο σημείο βολής.

ΛΥΣΗ

- α)** $1,2 \text{ s}$,
- β)** $7,2 \text{ m}$,
- γ)** $10,8 \text{ m}$,
- δ)** 450 J .

ΟΜΑΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Σώμα κινείται σε περιφέρεια κύκλου με σταθερή κατά μέτρο ταχύτητα $u=12 \text{ m/s}$, για χρόνο $t=4 \text{ s}$. Αν η συχνότητα περιστροφής του είναι $f=2/\pi \text{ Hz}$, να υπολογιστούν:

- α)** η περίοδος της κίνησης.
- β)** η ακτίνα της κίνησης.
- γ)** η γωνία περιστροφής και το μήκος τόξου που διένυσε το σώμα στο χρόνο των 4s .

ΛΥΣΗ

- α)** $\pi/2 \text{ s}$
- β)** 3 m
- γ)** $16 \text{ rad}, 48 \text{ m}$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ένα σώμα εκτελεί Ομαλή Κυκλική κίνηση, με γωνιακή ταχύτητα $\omega=10\pi \text{ rad/s}$ (όπου $\pi=3,14$) και ακτίνα $R=0,5 \text{ m}$.

Να βρεθούν:

- α)** η περίοδος και η συχνότητα της κίνησης.
- β)** η γραμμική ταχύτητα περιστροφής.
- γ)** η γωνία περιστροφής όταν το μήκος τόξου που διένυσε το σώμα στο είναι 3m .

ΛΥΣΗ

- α)** $0,2 \text{ s}, 5 \text{ Hz}$
- β)** $5\pi \text{ m/s}$
- γ)** $6\pi \text{ rad}$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με ταχύτητα $8\pi \text{ m/s}$ (όπου $\pi=3,14$), διαγράφοντας 12 περιστροφές σε χρόνο 3 s .

Να βρεθούν:

- α)** η συχνότητα και η περίοδος της ομαλής κυκλικής κίνησης.
- β)** η ακτίνα της ομαλής κυκλικής κίνησης.
- γ)** η γωνία περιστροφής σε χρόνο $t=2,5 \text{ s}$.
- δ)** ο αριθμός των περιστροφών που εκτελεί σε χρόνο 1min .

ΛΥΣΗ

- α)** 4 Hz, 0,25 s
- β)** 1 m
- γ)** 20π rad
- δ)** 240

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΒΟΛΗ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Από σημείο Ο, που βρίσκεται σε ύψος $H=160$ m από το έδαφος, ρίχνεται οριζόντια σώμα με αρχική ταχύτητα $u_0=15$ m/s. Η εκτόξευση γίνεται τη χρονική στιγμή $t=0$, ενώ τη χρονική στιγμή t το σώμα περνάει από το σημείο Α που βρίσκεται σε ύψος $h=80$ m από το έδαφος.
Να βρείτε:

- α)** τη χρονική στιγμή t .
- β)** την απόσταση του σημείου Α από το σημείο βολής ΟΗ αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα και $g=10$ m/s².

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ένα παιδί πετά οριζόντια μια μπάλα με ταχύτητα $u_0=10$ m/s από ύψος $h=1,8$ m. Σε ποιο σημείο θα χτυπήσει η μπάλα στον τοίχο, αν η απόστασή του από το παιδί είναι $d=4$ m;

ΑΣΚΗΣΗ 3

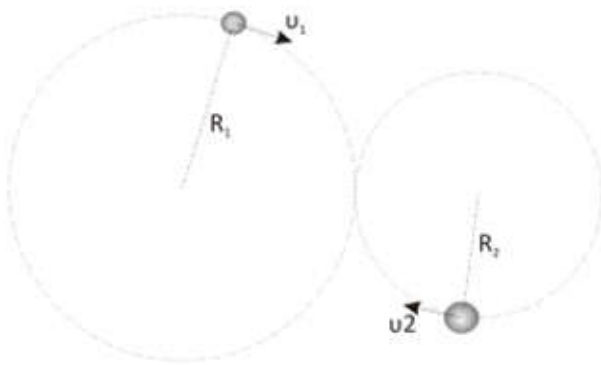
Σώμα ρίχνεται με οριζόντια ταχύτητα $u_0=20$ m/s από ύψος $h=180$ m από το έδαφος.
Να βρείτε:

- α)** σε πόσο χρόνο θα φτάσει το σώμα στο έδαφος.
- β)** ποια είναι η μέγιστη οριζόντια μετατόπισή του.
- γ)** την ταχύτητα με την οποία φτάνει.

ΟΜΑΛΗ ΚΥΚΛΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δύο σώματα (1) και (2) εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση σε κυκλικές τροχιές που εφάπτονται και έχουν ακτίνες $R_1=0,2$ m και $R_2=0,1$ m αντίστοιχα.



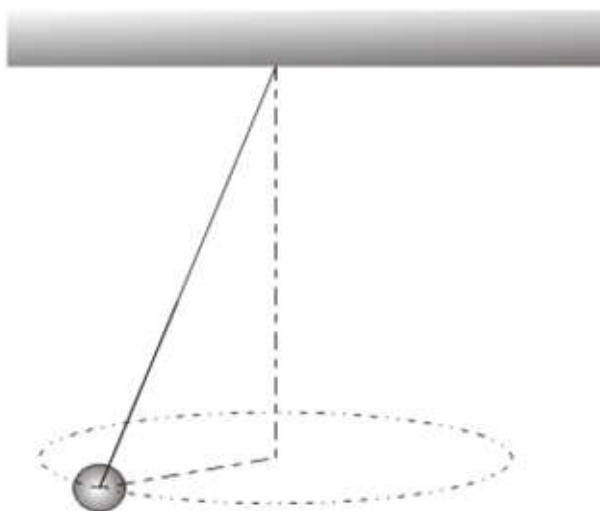
Αν γραμμικές ταχύτητες των σωμάτων είναι $u_1=5 \text{ m/s}$ και $u_2=2 \text{ m/s}$ αντίστοιχα, να βρείτε:

α) πόσες περιστροφές έχει εκτελέσει καθένα από τα δύο σώματα στο χρόνο μεταξύ δύο διαδοχικών συναντήσεων τους.

β) το χρόνο μεταξύ δύο διαδοχικών συναντήσεων των σωμάτων.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Σώμα μάζας $m=2 \text{ kg}$ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, δεμένο στο άκρο νήματος μήκους $d=1 \text{ m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο, όπως φαίνεται στο σχήμα, και σχηματίζει γωνία $\varphi=60^\circ$ με την κατακόρυφο.



α) Να βρείτε την περίοδο της κυκλικής κίνησης.

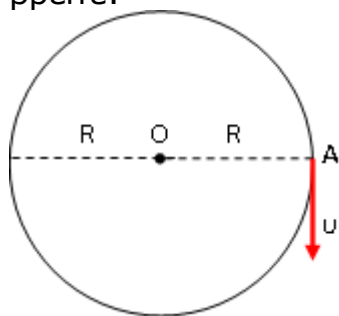
β) Να βρείτε την ακτίνα R της κυκλικής τροχιάς.

γ) Ποιο είναι το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας;

ΑΣΚΗΣΗ 3

Σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση και τη χρονική στιγμή $t=0$ διέρχεται από ένα σημείο A της τροχιάς του. Αν τη χρονική στιγμή $t_1=4\pi \text{ s}$ διέρχεται από ένα σημείο B της τροχιάς του έχοντας για πρώτη φορά αντίθετη γραμμική ταχύτητα από αυτή που είχε στο

σημείο A και το μήκος του τόξου που διένυσε είναι $S=4\pi$ m, να βρείτε:



- α) την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς.
- β) το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σώματος.
- γ) την περίοδο της κυκλικής κίνησης.
- δ) το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του σώματος.

ΑΣΚΗΣΗ 4

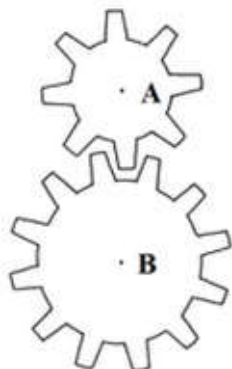
Η ράβδος περιστρέφεται γύρω από άξονα κάθετο στη ράβδο και που διέρχεται από το σημείο Γ, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.



Να συγκρίνεται την γραμμική ταχύτητα και την γωνιακή ταχύτητα των σημείων A και B.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Τα γρανάζια A και B είναι συζευγμένα, η ακτίνα του A είναι ίση με τα $\frac{3}{5}$ της ακτίνας του B.

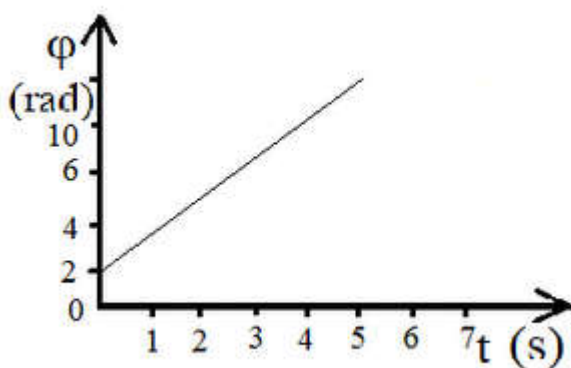


- α) Να συγκρίνεται τις γωνιακές τους ταχύτητες. Αν η ακτίνα του A είναι 18 cm και η γωνιακή ταχύτητα του ταχύτητα 2 rad/s
- β) Ποια η γωνιακή ταχύτητα του B.

γ) Πόση είναι η ταχύτητα των σημείων που βρίσκονται στην περιφέρεια των γραναζιών.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Σώμα κινείται σε κυκλική τροχιά, η επίκεντρη γωνιά του σώματος αλλάζει όπως δείχνει η γραφική παράσταση.



α) να υπολογίσετε την γωνιακή ταχύτητα του σώματος

β) να σχεδιάσετε το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση και έχει γραμμική ταχύτητα $u=4\pi$ m/s, σε περιφέρεια κύκλου ακτίνας $R=2$ m. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το σώμα βρίσκεται στο σημείο Α και μεταβαίνει στο σημείο Γ, αφού έχει διαγράψει τόξο γωνίας $\varphi=\pi/6$ rad. Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή που θα βρεθεί το σώμα στο σημείο Δ, στο οποίο η γραμμική του ταχύτητα είναι αντίθετη από αυτή που έχει στο σημείο Γ.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Ένα σώμα μάζας $m=1$ kg είναι δεμένο στο άκρο νήματος μήκους $l=0,8$ m και περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, εκτελώντας ομαλή κυκλική κίνηση με γραμμική ταχύτητα μέτρου $u=4$ m/s. Να υπολογίσετε:

α) την τάση του νήματος, όταν το σώμα βρίσκεται στο ανώτατο σημείο της τροχιάς του.

β) την τάση του νήματος, όταν το σώμα βρίσκεται στο κατώτερο σημείο της τροχιάς του.

Δίνεται $g=10$ m/s².

ΑΣΚΗΣΗ 9

Δύο σώματα εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση σε κυκλικές τροχιές που εφάπτονται και έχουν ακτίνες $R_1=0,2\text{ m}$ και $R_2=0,1\text{ m}$ αντίστοιχα. Αν γραμμικές ταχύτητες των σωμάτων είναι $u_1=5\text{ m/s}$ και $u_2=2\text{ m/s}$ αντίστοιχα, να βρείτε:

- α)** πόσες περιστροφές έχει εκτελέσει καθένα από τα δύο σώματα στο χρόνο μεταξύ δύο διαδοχικών συναντήσεων τους.
- β)** το χρόνο μεταξύ δύο διαδοχικών συναντήσεων των σωμάτων.

ΑΣΚΗΣΗ 10

Ένα σώμα μάζας $m=2\text{ kg}$ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση, δεμένο στο άκρο νήματος μήκους $l=1\text{ m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο και σχηματίζει γωνία $\varphi=60^\circ$ με την κατακόρυφο.

- α)** Να βρείτε την περίοδο της κυκλικής κίνησης.
- β)** Να βρείτε την ακτίνα R της κυκλικής τροχιάς.
- γ)** Ποιο είναι το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας;

ΑΣΚΗΣΗ 11

Ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε περιφέρεια κύκλου ακτίνας R . Αν η γραμμική ταχύτητα του σώματος είναι $u=2\pi\text{ m/s}$ και σε χρόνο $\Delta t=1/12\text{ s}$ το σώμα έχει διαγράψει επίκεντρη γωνία 30° , να βρείτε:

- α)** το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του σώματος.
- β)** την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Ένα σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση και τη χρονική στιγμή $t=0$ διέρχεται από ένα σημείο A της τροχιάς του. Αν τη χρονική στιγμή $t_1=4\text{ s}$ διέρχεται από ένα σημείο B της τροχιάς του έχοντας για πρώτη φορά αντίθετη γραμμική ταχύτητα από αυτή που είχε στο σημείο A και το μήκος του τόξου που διένυσε είναι $S=0,2\text{ m}$, να βρείτε:

- α)** την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς.
- β)** το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σώματος.
- γ)** την περίοδο της κυκλικής κίνησης.
- δ)** το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του σώματος.

ΑΣΚΗΣΗ 13

Σώμα μάζας $m=1\text{ kg}$ είναι δεμένο στο άκρο νήματος μήκους $r=80\text{ cm}$ και περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, εκτελώντας ομαλή κυκλική κίνηση με ταχύτητα μέτρου $u=4\text{ m/s}$.

Να υπολογίσετε:

α) την τάση του νήματος, όταν το σώμα βρίσκεται στο ανώτατο σημείο της τροχιάς του.

β) την τάση του νήματος, όταν το σώμα βρίσκεται στο κατώτερο σημείο της τροχιάς του.

Δίνεται $g=10 \text{ m/s}^2$.

ΑΣΚΗΣΗ 14

Σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με γραμμική ταχύτητα $u=2\pi \text{ m/s}$, σε περιφέρεια κύκλου ακτίνας $R=1 \text{ m}$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το σώμα βρίσκεται στο σημείο Α και μεταβαίνει στο σημείο Γ, αφού διαγράψει τόξο γωνίας $\varphi=\pi/6 \text{ rad}$.

Ποια χρονική στιγμή θα βρεθεί το σώμα στο σημείο Δ, στο οποίο η γραμμική του ταχύτητα είναι αντίθετη από αυτή που έχει στο σημείο Γ;

ΑΣΚΗΣΗ 15

Σώμα μάζας $m=1 \text{ kg}$ είναι δεμένο στο άκρο νήματος μήκους $r=80\text{cm}$ και περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο, εκτελώντας ομαλή κυκλική κίνηση με ταχύτητα μέτρου $u=4 \text{ m/s}$.

Να υπολογίσετε:

α) την τάση του νήματος, όταν το σώμα βρίσκεται στο ανώτατο σημείο της τροχιάς του.

β) την τάση του νήματος, όταν το σώμα βρίσκεται στο κατώτερο σημείο της τροχιάς του.

Δίνεται $g=10 \text{ m/s}^2$.

ΑΣΚΗΣΗ 16

Σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε περιφέρεια κύκλου ακτίνας R . Αν η γραμμική ταχύτητα του σώματος είναι $u=2\pi \text{ m/s}$ και σε χρόνο $\Delta t=1/12 \text{ s}$ το σώμα έχει διαγράψει επίκεντρη γωνία 30° , να βρείτε:

α) το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του σώματος.

β) την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς.

ΑΣΚΗΣΗ 17

Σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση και τη χρονική στιγμή $t=0$ διέρχεται από ένα σημείο Α της τροχιάς του. Αν τη χρονική στιγμή $t_1=4 \text{ s}$ διέρχεται από ένα σημείο Β της τροχιάς του έχοντας για πρώτη φορά αντίθετη γραμμική ταχύτητα από αυτή που είχε στο σημείο Α και το μήκος του τόξου που διένυσε είναι $S=0,2 \text{ m}$, να βρείτε:

α) την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς.

- β)** το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του σώματος(v) την περίοδο της κυκλικής κίνησης.
γ) το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του σώματος.

ΑΣΚΗΣΗ 18

Κινητό κινείται σε περιφέρεια κύκλου ακτίνας 40 m με ταχύτητα μέτρου 4 m/s.

- α)** Ποια είναι η περίοδος και ποια η συχνότητά του;
β) Πόσο είναι το μήκος του τόξου που διαγράφει σε 20 s και πόση είναι η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία σε rad και σε μοίρες;

ΑΣΚΗΣΗ 19

Ένα σώμα κάνει ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας $R=1$ m με ταχύτητα $v=2\pi$ m/s. Συμπληρώστε τα κενά. Η περίοδος περιστροφής του σώματος είναι Η γωνιακή ταχύτητα του είναι

ΑΣΚΗΣΗ 20

Από ένα σημείο Α ενός κύκλου ξεκινούν ταυτόχρονα δύο κινητά που κινούνται δεξιόστροφα, διαγράφοντας το πρώτο 45° το δευτερόλεπτο και το δεύτερο 30° το δευτερόλεπτο.

- α)** Ποιες οι γωνιακές ταχύτητες των κινητών;
β) Πότε θα ξανασυναντηθούν τα δύο σώματα;
γ) Πόση γωνία θα έχει διαγράψει στο μεταξύ, κάθε κινητό;

ΑΣΚΗΣΗ 21

Δρομέας μάζας $m=60$ kg κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας $R=30$ m με ταχύτητα σταθερού μέτρου $v=2$ m/s.

Να υπολογιστούν:

- α)** Η κεντρομόλος δύναμη που δέχεται.
β) Η περίοδος της κυκλικής τροχιάς.
γ) Η κεντρομόλος επιτάχυνση.
δ) Η γωνιακή ταχύτητα.

ΑΣΚΗΣΗ 22

Σώμα μάζας $m=1$ kg είναι δεμένο σε σχοινί μήκους $l=1$ m και διαγράφει κατακόρυφο κύκλο με σταθερή κατά μέτρο γωνιακή ταχύτητα $\omega=10$ rad/s.

- α)** Πόση είναι η γραμμική ταχύτητα του σώματος;
β) Πόση είναι η τάση του νήματος όταν το σώμα περνάει από :
1) Το κατώτερο σημείο της τροχιάς.
2) Από το ανώτερο σημείο της τροχιάς.
3) Από εκείνο το σημείο στο οποίο το νήμα είναι οριζόντιο.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

ΑΣΚΗΣΗ 23

Ένα κινητό κάνει ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας $R=10\text{ m}$. Το κινητό για να κάνει μια περιστροφή χρειάζεται χρόνο $t=5\text{ s}$.
Να βρεθούν:

- α)** Η περίοδος T ,
- β)** Η συχνότητα f ,
- γ)** Η γραμμική ταχύτητα u ,
- δ)** Η γωνιακή συχνότητα ω .

ΑΣΚΗΣΗ 24

Ένα κινητό κάνει ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας $R=20\text{ m}$ και σε χρόνο 120sec κάνει 600 περιστροφές.
Να βρεθούν:

- α)** Η περίοδος T ,
- β)** Η συχνότητα f ,
- γ)** Η γραμμική ταχύτητα u ,
- δ)** Η γωνιακή συχνότητα ω .

ΑΣΚΗΣΗ 25

Ένα κινητό κάνει ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας $R=5\text{ m}$. Αν $\omega=31,4\text{ rad/sec}$, να βρεθούν:

- α)** Η περίοδος T ,
- β)** Η συχνότητα f ,
- γ)** Η γραμμική ταχύτητα u ,

ΑΣΚΗΣΗ 26

Ένα κινητό κάνει ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας $R=5\text{ m}$. Αν $u=157\text{ m/sec}$, να βρεθούν:

- α)** Η περίοδος T ,
- β)** Η συχνότητα f ,
- γ)** Η γωνιακή συχνότητα ω .

ΑΣΚΗΣΗ 27

Ένα κινητό κάνει ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας R . Αν $\omega=31,4\text{ rad/sec}$ και $u=157\text{ m/s}$, να βρεθούν: R, f, T .

- α)** Η περίοδος T ,
- β)** Η συχνότητα f ,
- γ)** Η ακτίνα R .

ΑΣΚΗΣΗ 28

Ένα κινητό κάνει ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας $R=5$ cm. Το κινητό κάνει το $1/4$ μιας περιστροφής σε χρόνο $t=1$ sec. Να βρεθούν:

- α)** Η περίοδος T ,
- β)** Η συχνότητα f ,
- γ)** Η γραμμική ταχύτητα u ,
- δ)** Η γωνιακή συχνότητα ω .

ΑΣΚΗΣΗ 29

Από σημείο Α περιφέρειας κύκλου ακτίνας $R=2$ m ξεκινούν ταυτόχρονα δυο κινητά, που αρχίζουν να κάνουν ομαλή κυκλική κίνηση με ταχύτητες $u_1=2,5$ m/sec και $u_2=1$ m/sec.

Να βρείτε σε πόσο χρόνο θα συναντηθούν αν:

- α)** κινούνται προς την ίδια φορά και
- β)** κινούνται αντίθετα.

ΑΣΚΗΣΗ 30

Σώμα μάζας $m=2$ Kg εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας $R=0,2$ m και σε χρόνο $t=2\pi$ s εκτελεί δύο περιστροφές.

Να βρείτε:

- α)** τη συχνότητα της κίνησης
- β)** την περίοδο της κίνησης
- γ)** τη γραμμική ταχύτητα
- δ)** τη γωνιακή ταχύτητα
- ε)** την κεντρομόλο επιτάχυνση
- ζ)** την κεντρομόλο δύναμη

ΑΣΚΗΣΗ 31

Σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας $R=0,4$ m και σε χρόνο $t=4\pi$ s εκτελεί τέσσερις περιστροφές.

Να βρείτε:

- α)** την περίοδο της κίνησης,
- β)** τη γραμμική ταχύτητα,
- γ)** τη γωνιακή ταχύτητα,
- δ)** την κεντρομόλο επιτάχυνση,
- ε)** την επιτάχυνση ενός άλλου κινητού το οποίο είναι αρχικά ακίνητο σε σημείο Α της περιφέρειας του κύκλου και το οποίο κινούμενο πάνω στη διάμετρο ΑΒ του κύκλου και με την επίδραση σταθερής δύναμης, συναντιέται με το κινητό που κινείται κυκλικά στο σημείο Β της διαμέτρου, όταν αυτό (το κινούμενο κυκλικά), περνάει από το σημείο Β για τρίτη φορά.

ΑΣΚΗΣΗ 32

Σώμα μάζας $m=2\text{ Kg}$ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας $R=2\text{ m}$ με γωνιακή ταχύτητα $\omega=2\text{ rad/s}$.

Να βρείτε:

- α)** την συχνότητα της κίνησης και την περίοδο της κίνησης
- β)** τη γραμμική ταχύτητα.
- γ)** την κεντρομόλο επιτάχυνση.
- δ)** την κεντρομόλο δύναμη.
- ε)** τη γωνία που διαγράφει η επιβατική ακτίνα σε χρόνο $t_1=4\pi\text{ s}$.
- ζ)** τον αριθμό των περιστροφών του κινητού όταν το κινητό έχει διαγράψει γωνία $\theta=10\pi\text{ rad}$.

ΑΣΚΗΣΗ 33

Σώμα μάζας $m=1\text{ Kg}$ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας $R=2\text{ m}$ με γραμμική ταχύτητα $u=4\text{ m/s}$.

Να βρείτε:

- α)** την συχνότητα της κίνησης και την περίοδο της κίνησης
- β)** τη γωνιακή ταχύτητα
- γ)** την κεντρομόλο επιτάχυνση
- δ)** την κεντρομόλο δύναμη
- ε)** τη γωνία που διαγράφει η επιβατική ακτίνα σε χρόνο $t_1=8\pi\text{ s}$
- ζ)** τον αριθμό των περιστροφών του κινητού όταν το κινητό έχει διαγράψει γωνία $\theta=20\pi\text{ rad}$

ΑΣΚΗΣΗ 34

Ένα κινητό κάνει ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας $R=10\text{ m}$. Το κινητό για να κάνει μια περιστροφή χρειάζεται χρόνο $t=5\text{ sec}$.

Να βρεθούν:

- α)** η περίοδο της κίνησης,
- β)** η συχνότητα της κίνησης,
- γ)** η γραμμική ταχύτητα.
- δ)** η γωνιακή ταχύτητα.

ΑΣΚΗΣΗ 35

Ένα κινητό κάνει ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας $R=20\text{ m}$ και σε χρόνο 120 sec κάνει 600 περιστροφές.

Να βρεθούν:

- α)** η περίοδο της κίνησης,
- β)** η συχνότητα της κίνησης,
- γ)** η γραμμική ταχύτητα.

δ) η γωνιακή ταχύτητα.

ΑΣΚΗΣΗ 36

Ένα κινητό κάνει ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας $R=5\text{ m}$. Αν $\omega=31,4\text{ rad/sec}$, να βρεθούν:

- α)** η περίοδο της κίνησης,
- β)** η συχνότητα της κίνησης,
- γ)** η γραμμική ταχύτητα.

ΑΣΚΗΣΗ 37

Ένα κινητό κάνει ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας $R=5\text{ m}$. Αν $u=157\text{ m/sec}$, να βρεθούν:

- α)** η περίοδο της κίνησης,
- β)** η συχνότητα της κίνησης,
- γ)** η γωνιακή ταχύτητα

ΑΣΚΗΣΗ 38

Ένα κινητό κάνει ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας R . Αν $\omega=31,4\text{ rad/sec}$ και $u=157\text{ m/sec}$, να βρεθούν:

- α)** η περίοδο της κίνησης,
- β)** η συχνότητα της κίνησης,
- γ)** η ακτίνα του κύκλου.

ΑΣΚΗΣΗ 39

Ένα κινητό κάνει ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας $R=5\text{ cm}$. Το κινητό κάνει το $1/4$ μιας περιστροφής σε χρόνο $t=1\text{ s}$.

Να βρεθούν:

- α)** η περίοδο της κίνησης,
- β)** η συχνότητα της κίνησης,
- γ)** η γραμμική ταχύτητα.
- δ)** η γωνιακή ταχύτητα.

ΑΣΚΗΣΗ 40

Από σημείο Α περιφέρειας κύκλου ακτίνας $R=2\text{ m}$ ξεκινούν ταυτόχρονα δυο κινητά, που αρχίζουν να κάνουν ομαλή κυκλική κίνηση με ταχύτητες $u_1=2,5\text{ m/sec}$ και $u_2=1\text{ m/s}$.

Να βρείτε σε πόσο χρόνο θα συναντηθούν αν:

- α)** κινούνται προς την ίδια φορά και
- β)** κινούνται αντίθετα.

ΑΣΚΗΣΗ 41

Σώμα μάζας $m=2\text{ Kg}$ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας $R=0,2\text{ m}$ και σε χρόνο $t=2\pi\text{ s}$ εκτελεί δύο περιστροφές.

Να βρείτε:

- α)** τη συχνότητα της κίνησης,
- β)** την περίοδο της κίνησης,
- γ)** τη γραμμική ταχύτητα
- δ)** τη γωνιακή ταχύτητα,
- ε)** την κεντρομόλο επιτάχυνση,
- ζ)** την κεντρομόλο δύναμη.

ΑΣΚΗΣΗ 42

Σώμα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας $R=0,4\text{ m}$ και σε χρόνο $t=4\pi\text{ s}$ εκτελεί τέσσερις περιστροφές.

Να βρείτε:

- α)** την περίοδο της κίνησης,
- β)** τη γραμμική ταχύτητα,
- γ)** τη γωνιακή ταχύτητα,
- δ)** την κεντρομόλο επιτάχυνση,
- ε)** την επιτάχυνση ενός άλλου κινητού το οποίο είναι αρχικά ακίνητο σε σημείο Α της περιφέρειας του κύκλου και το οποίο κινούμενο πάνω στη διάμετρο ΑΒ του κύκλου και με την επίδραση σταθερής δύναμης, συναντιέται με το κινητό που κινείται κυκλικά στο σημείο Β της διαμέτρου, όταν αυτό (το κινούμενο κυκλικά), περνάει από το σημείο Β για τρίτη φορά.

ΑΣΚΗΣΗ 43

Σώμα μάζας $m=2\text{ Kg}$ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας

$R=2\text{ m}$ με γωνιακή ταχύτητα $\omega=2\text{ rad/s}$.

Να βρείτε:

- α)** την συχνότητα της κίνησης και την περίοδο της κίνησης,
- β)** τη γραμμική ταχύτητα,
- γ)** την κεντρομόλο επιτάχυνση,
- δ)** την κεντρομόλο δύναμη,
- ε)** τη γωνία που διαγράφει η επιβατική ακτίνα σε χρόνο $t_1=4\pi\text{ s}$,
- στ)** τον αριθμό των περιστροφών του κινητού όταν το κινητό έχει διαγράψει γωνία $\theta=10\pi\text{ rad}$.

ΑΣΚΗΣΗ 44

Σώμα μάζας $m=1\text{ Kg}$ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας $R=2\text{ m}$ με γραμμική ταχύτητα $u=4\text{ m/s}$.

Να βρείτε:

- α)** την συχνότητα της κίνησης και την περίοδο της κίνησης,
- β)** τη γωνιακή ταχύτητα,
- γ)** την κεντρομόλο επιτάχυνση,
- δ)** την κεντρομόλο δύναμη,
- ε)** τη γωνία που διαγράφει η επιβατική ακτίνα σε χρόνο $t_1 = 8\pi\text{ s}$,
- στ)** τον αριθμό των περιστροφών του κινητού όταν το κινητό έχει διαγράψει γωνία $\theta=20\pi\text{ rad}$.

ΑΣΚΗΣΗ 45

Σώμα μάζας $m=2\text{ Kg}$ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας $R=2\text{ m}$ και σε χρόνο $t=2\pi\text{ s}$ εκτελεί δύο περιστροφές.

Να βρείτε:

- α)** την συχνότητα της κίνησης και την περίοδο της κίνησης,
- β)** τη γραμμική ταχύτητα,
- γ)** τη γωνιακή ταχύτητα,
- δ)** την κεντρομόλο επιτάχυνση,
- ε)** την κεντρομόλο δύναμη,
- στ)** τη γωνία που διαγράφει η επιβατική ακτίνα σε χρόνο $t_1=10\pi\text{ s}$,
- ζ)** τον αριθμό των περιστροφών του κινητού όταν το κινητό έχει διαγράψει γωνία $\theta=10\pi\text{ rad}$.

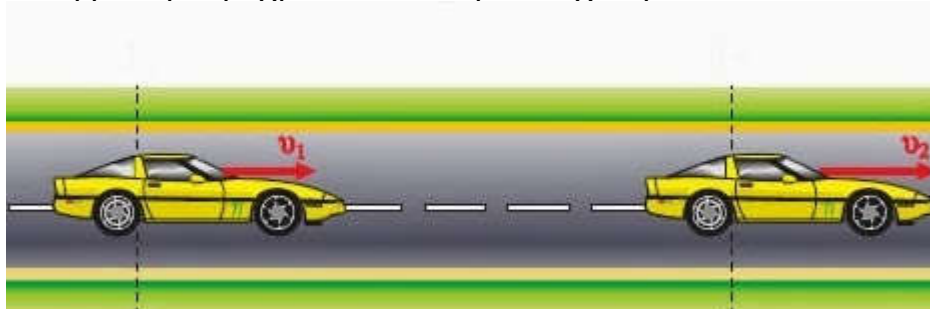
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Β ΛΥΚΕΙΟΥ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Η ΔΥΝΑΜΗ ΚΑΙ Η ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ένα αυτοκίνητο μάζας $m=1000\text{ kg}$ κινείται με ταχύτητα $u_1=10\text{ m/s}$ και φρενάρει μέχρι να αποκτήσει ταχύτητα $u_2=2\text{ m/s}$.



Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής του.

ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε από την θεωρία ότι η μεταβολή της ορμής του οχήματος είναι:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_{\text{τελ}} - \vec{p}_{\text{αρχ}}$$

όπου:

$$\vec{p}_{\text{τελ}} = m \cdot \vec{u}_2$$

$$\vec{p}_{\text{αρχ}} = m \cdot \vec{u}_1$$

Αρχικά σχεδιάζουμε τα διανύσματα της ορμής με την ίδια αρχή και ορίζουμε αυθαίρετα μια θετική φορά.

Επειδή τα διανύσματα των ορμών έχουν ίδια διεύθυνση και ίδια φορά, η διανυσματική σχέση $\Delta \vec{p} = \vec{p}_{\text{τελ}} - \vec{p}_{\text{αρχ}}$ γράφεται αλγεβρικά ως εξής:

$$\Delta p = +p_{\text{τελ}} - (+p_{\text{αρχ}}) \quad \text{ή}$$

$$\Delta p = m \cdot u_2 - m \cdot u_1 \quad \text{ή}$$

$$\Delta p = 1000 \cdot (2 - 10) \text{ kg} \cdot \text{m/s} \quad \text{ή}$$

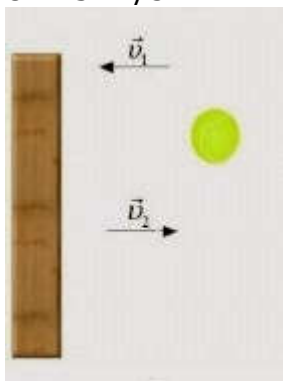
$$\Delta p = -8000 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Άρα η μεταβολή της ορμής του αυτοκινήτου είναι $\Delta p = -$

8000 kg·m/s.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Μια μικρή μπάλα, μάζας $m=0,5\text{ kg}$, χτυπάει οριζόντια σε κατακόρυφο τοίχο με ταχύτητα $u_1=10\text{ m/s}$ και ανακλάται οριζόντια με ταχύτητα $u_2=5\text{ m/s}$.



Να υπολογίσετε:

α) Τη μεταβολή της ορμής της, λόγω της σύγκρουσης με τον τοίχο,

β) Τη μέση δύναμη που ασκεί ο τοίχος στη μπάλα εάν η επαφή του διαρκεί $\Delta t=0,01\text{ s}$.

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε από την θεωρία ότι η μεταβολή της ορμής της μπάλας είναι:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_{\text{τελ}} - \vec{p}_{\text{αρχ}}$$

όπου:

$$\vec{p}_{\text{τελ}} = m \cdot \vec{u}_2$$

$$\vec{p}_{\text{αρχ}} = m \cdot \vec{u}_1$$

Αρχικά σχεδιάζουμε τα διανύσματα της ορμής με την ίδια αρχή και ορίζουμε αυθαίρετα μια θετική φορά.

Επειδή τα διανύσματα των ορμών έχουν ίδια διεύθυνση και ίδια φορά, η διανυσματική σχέση $\Delta \vec{p} = \vec{p}_{\text{τελ}} - \vec{p}_{\text{αρχ}}$ γράφεται αλγεβρικά ως εξής:

$$\Delta p = +p_{\text{τελ}} - (+p_{\text{αρχ}}) \quad \text{ή}$$

$$\Delta p = (-m \cdot u_2) - (+m \cdot u_1) \quad \text{ή}$$

$$\Delta p = 0,5 \cdot (-5 - 10) \text{ kg} \cdot \text{m/s} \quad \text{ή}$$

$$\Delta p = -7,5 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η μεταβολή της ορμής έχει φορά αντίθετη από αυτή που πήραμε στην αρχή ως θετική.

Άρα η μεταβολή της ορμής της μπάλας είναι $\Delta p = -7,5 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$.

β) Η δύναμη που ασκεί το πόδι στην μπάλα στη διάρκεια επαφής δεν είναι σταθερή. Έτσι λοιπόν θα πρέπει να υπολογίσουμε την μέση δύναμη.

Η μέση δύναμη που ασκεί ο τοίχος στην μπάλα είναι:

$$\vec{F} = \frac{\vec{p}_{\text{τελ}} - \vec{p}_{\text{αρχ}}}{\Delta t}$$

$$F = \frac{p_{\text{τελ}} - p_{\text{αρχ}}}{\Delta t}$$

$$F = -7,5 / 0,01$$

$$F = -750 \text{ N}$$

Άρα η μέση δύναμη που ασκεί ο τοίχος στη μπάλα είναι $F = -750 \text{ N}$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Βλήμα μάζας $m = 0,5 \text{ Kg}$ κινείται με οριζόντια ταχύτητα $u_1 = 80 \text{ m/s}$ και διαπερνά ακλόνητη κατακόρυφη σανίδα. Το βλήμα βγαίνει από την σανίδα με οριζόντια ταχύτητα $u_2 = 10 \text{ m/s}$. Το χρονικό διάστημα το οποίο το βλήμα κινήθηκε μέσα στη σανίδα είναι $\Delta t = 0,01 \text{ s}$.



Να υπολογίσετε τη μέση δύναμη που δέχτηκε το βλήμα από την σανίδα.

ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε από την θεωρία ότι η μεταβολή της ορμής του βλήματος είναι:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_{\text{τελ}} - \vec{p}_{\text{αρχ}}$$

όπου:

$$p_{\rightarrow \text{τελ}} = m \cdot u_{\rightarrow 2}$$

$$p_{\rightarrow \text{αρχ}} = m \cdot u_{\rightarrow 1}$$

Έχουμε:

$$\Delta p_{\rightarrow} = p_{\rightarrow \text{τελ}} - p_{\rightarrow \text{αρχ}} \quad \text{ή}$$

$$\Delta p = p_{\text{τελ}} - p_{\text{αρχ}} \quad \text{ή}$$

$$\Delta p = m u_2 - m u_1 \quad \text{ή}$$

$$\Delta p = m(u_2 - u_1) \quad \text{ή}$$

$$\Delta p = 0,5(10 - 80) \quad \text{ή}$$

$$\Delta p = -35 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η μεταβολή της ορμής έχει κατεύθυνση αντίθετη της ταχύτητας.

Η δύναμη που ασκεί η σανίδα στο βλήμα στη διάρκεια επαφής δεν είναι σταθερή. Έτσι λοιπόν θα πρέπει να υπολογίσουμε την μέση δύναμη.

Η μέση δύναμη που ασκεί η σανίδα στο βλήμα είναι:

$$F_{\rightarrow} = \frac{p_{\rightarrow \text{τελ}} - p_{\rightarrow \text{αρχ}}}{\Delta t}$$

$$F = \frac{p_{\text{τελ}} - p_{\text{αρχ}}}{\Delta t}$$

$$F = -35/0,01$$

$$F = -3500 \text{ N}$$

Η μέση δύναμη έχει διεύθυνση και φορά αντίθετη της μεταβολής της ορμής, δηλαδή αντίθετη της ταχύτητας της μπάλας.

Άρα η μέση δύναμη που δέχτηκε το βλήμα από την σανίδα είναι $F = -3500 \text{ N}$ με διεύθυνση και φορά αντίθετη της μεταβολής της ορμής, δηλαδή αντίθετη της ταχύτητας της μπάλας.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Ένας ποδοσφαιριστής χτυπάει μια μπάλα μάζας $m = 0,5 \text{ kg}$ που

αρχικά ήταν ακίνητη. Ο χρόνος επαφής του ποδιού του ποδοσφαιριστή με την μπάλα είναι $\Delta t = 0,01 \text{ s}$ και η ταχύτητα που αποκτά η μπάλα είναι $u = 50 \text{ m/s}$.

Να υπολογίσετε:

α) Τη μεταβολή της ορμής της μπάλας,

β) Τη μέση δύναμη που ασκήθηκε στην μπάλα.

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε από την θεωρία ότι η μεταβολή της ορμής της μπάλας είναι:

$$\Delta p \rightarrow = p \rightarrow_{\text{ΤΕΛ}} - p \rightarrow_{\text{αρχ}}$$

όπου:

$$p \rightarrow_{\text{ΤΕΛ}} = m \cdot u \rightarrow_2$$

$$p \rightarrow_{\text{αρχ}} = m \cdot u \rightarrow_1$$

Όμως αφού η μπάλα είναι αρχικά ακίνητη ισχύει:

$$p \rightarrow_{\text{αρχ}} = 0$$

Επίσης ισχύει:

$$p \rightarrow_{\text{ΤΕΛ}} = m \cdot u \rightarrow$$

Άρα:

$$\Delta p \rightarrow = m \cdot u \rightarrow$$

Η μεταβολή της ορμής έχει μέτρο:

$$\Delta p = m \cdot u \quad \quad \quad \text{ή}$$

$$\Delta p = 0,5 \cdot 50 \quad \quad \quad \text{ή}$$

$$\Delta p = 25 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Η μεταβολή της ορμής έχει διεύθυνση και φορά ίδια της ταχύτητας της μπάλας.

Άρα η μεταβολή της ορμής της μπάλας είναι $\Delta p = 25 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ με διεύθυνση και φορά ίδια της ταχύτητας της μπάλας.

β) Η μέση δύναμη που ασκεί ο τοίχος στην μπάλα είναι:

$$F \rightarrow = p \rightarrow_{\text{τελ}} - p \rightarrow_{\text{αρχ}} \Delta t$$

$$F = p_{\text{τελ}} - p_{\text{αρχ}} \Delta t$$

$$F = 25/0,01$$

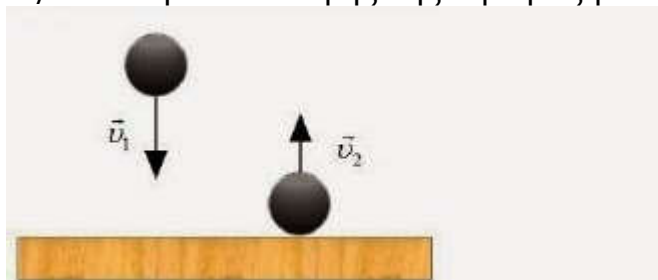
$$F = 2500 \text{ N}$$

Η δύναμη έχει διεύθυνση και φορά ίδια της μεταβολής της ορμής της μπάλας, δηλαδή της ταχύτητας της μπάλας.

Άρα η μέση δύναμη που ασκεί ο τοίχος στη μπάλα είναι $F = 2500 \text{ N}$ με διεύθυνση και φορά ίδια της ταχύτητας της μπάλας.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Μικρή σφαίρα μάζας $m = 1 \text{ kg}$ χτυπάει σε οριζόντιο δάπεδο με κατακόρυφη ταχύτητα $u_1 = 20 \text{ m/s}$ και αναπηδά με ταχύτητα $u_2 = 10 \text{ m/s}$. Η διάρκεια επαφής της σφαίρας με το δάπεδο είναι $\Delta t = 0,1 \text{ s}$.



Να υπολογίσετε:

α) Τη μεταβολή της ορμής της σφαίρας,

β) Τη μέση δύναμη που ασκήθηκε στην σφαίρα από το δάπεδο.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε από την θεωρία ότι η μεταβολή της ορμής της σφαίρας είναι:

$$\Delta p \rightarrow = p \rightarrow_{\text{τελ}} - p \rightarrow_{\text{αρχ}}$$

όπου:

$$p \rightarrow_{\text{τελ}} = m \cdot u \rightarrow_2$$

$$p \rightarrow_{\text{αρχ}} = m \cdot u \rightarrow_1$$

Αρχικά σχεδιάζουμε τα διανύσματα της ορμής με την ίδια αρχή και ορίζουμε αυθαίρετα μια θετική φορά.

Επειδή τα διανύσματα των ορμών έχουν ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά, η διανυσματική σχέση $\Delta \vec{p} = \vec{p}_{\text{τελ}} - \vec{p}_{\text{αρχ}}$ γράφεται αλγεβρικά ως εξής:

$$\Delta p = -p_{\text{τελ}} - (+p_{\text{αρχ}}) \quad \text{ή}$$

$$\Delta p = -m \cdot u_2 - m \cdot u_1 \quad \text{ή}$$

$$\Delta p = -m \cdot (u_2 - u_1) \quad \text{ή}$$

$$\Delta p = -1 \cdot (10 - 20) \text{ kg} \cdot \text{m/s} \quad \text{ή}$$

$$\Delta p = -10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η μεταβολή της ορμής έχει φορά αντίθετη από αυτή που πήραμε στην αρχή ως θετική.

Άρα η μεταβολή της ορμής της σφαίρας είναι $\Delta p = -10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$.

β) Στην διάρκεια της επαφής της σφαίρας με το δάπεδο η σφαίρα δέχεται το βάρος της και τη μέση τιμή της δύναμης από το δάπεδο.

Για τη συνισταμένη δύναμη ισχύει:

$$\Sigma F = F - B$$

Τη ΣF τη βρίσκουμε από την σχέση:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{p}_{\text{τελ}} - \vec{p}_{\text{αρχ}} \Delta t$$

Η σχέση αυτή γράφεται αλγεβρικά:

$$\Sigma F = p_{\text{τελ}} - p_{\text{αρχ}} \Delta t$$

$$\Sigma F = -10 / 0,1$$

$$\Sigma F = -100 \text{ N}$$

Η συνισταμένη δύναμη έχει μέτρο $\Sigma F = 100 \text{ N}$ και φορά προς τα πάνω.

Άρα έχουμε:

$$\Sigma F = F - B \quad \text{ή}$$

$$F = \Sigma F + B \quad \text{ή}$$

$$F = \Sigma F + m \cdot g \quad \text{ή}$$

$$F = 100 + 10$$

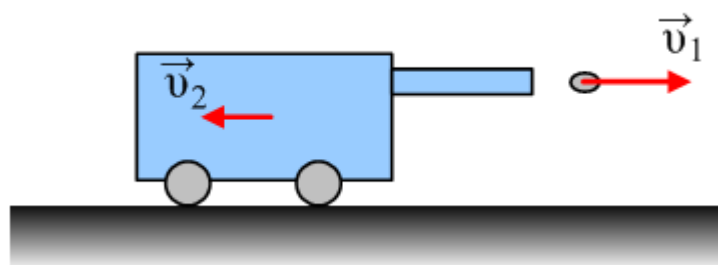
$$F = 110 \text{ N}$$

Άρα η μέση δύναμη που ασκεί ο τοίχος στη μπάλα είναι $F = 110 \text{ N}$.

Η ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Πολυβόλο μάζας $M = 1000 \text{ kg}$ έχει ένα βλήμα μάζας $m = 5 \text{ kg}$. Αρχικά το πυροβόλο ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και κάποια χρονική στιγμή το βλήμα εκτοξεύεται οριζόντια με ταχύτητα $u_1 = 4000 \text{ m/s}$.



Να υπολογίσετε την ταχύτητα του πολυβόλου ακριβώς μετά την εκτόξευση του βλήματος.

ΛΥΣΗ

Αρχικά παίρνουμε σαν σύστημα το πολυβόλο μα το βλήμα. Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα αυτό είναι τα βάρη και η κάθετη δύναμη από το επίπεδο. Οι δυνάμεις αυτές έχουν συνισταμένη μηδέν. Άρα το σύστημα πυροβόλο-βλήμα είναι μονωμένο και η ορμή του δεν μεταβάλλεται, δηλαδή είναι ίδια και πριν και μετά αλλά και κατά τη διάρκεια της εκτόξευσης του βλήματος.

Από την αρχή διατήρησης της ορμής έχουμε:

$$p_{\rightarrow \text{ολ}} = \text{σταθ.} \quad \text{ή}$$

$$p_{\rightarrow \text{ολ(τελ)}} = p_{\rightarrow \text{ολ(αρχ)}} \quad \text{ή}$$

$$p_{\rightarrow 1(\alphaρχ)} + p_{\rightarrow 2(\alphaρχ)} = p_{\rightarrow 1(\text{τελ})} + p_{\rightarrow 2(\text{τελ})}$$

όπου:

$p \rightarrow 1(\alpha\rho\chi)$ η ορμή του βλήματος πριν την εκτόξευση,

$p \rightarrow 2(\alpha\rho\chi)$ η ορμή του πολυβόλου πριν την εκτόξευση,

$p \rightarrow 1(\tau\epsilon\lambda)$ η ορμή του βλήματος μετά την εκτόξευση,

$p \rightarrow 2(\tau\epsilon\lambda)$ η ορμή του πολυβόλου μετά την εκτόξευση.

Όμως αρχικά το βλήμα και το πολυβόλο είναι ακίνητα.

Άρα τα μέτρα των ορμών του βλήματος και του πολυβόλου πριν την εκτόξευση είναι:

$$P1(\alpha\rho\chi)=0$$

$$P2(\alpha\rho\chi)=0$$

Τα μέτρα των ορμών του πολυβόλου και του βλήματος μετά την εκτόξευση είναι:

$$P1(\tau\epsilon\lambda)=m \cdot u1$$

$$P2(\tau\epsilon\lambda)=-M \cdot u2$$

Άρα έχουμε:

$$p \rightarrow 1(\alpha\rho\chi) + p \rightarrow 2(\alpha\rho\chi) = p \rightarrow 1(\tau\epsilon\lambda) + p \rightarrow 2(\tau\epsilon\lambda) \quad \dot{\eta}$$

$$p1(\alpha\rho\chi) + p2(\alpha\rho\chi) = p1(\tau\epsilon\lambda) + p2(\tau\epsilon\lambda) \quad \dot{\eta}$$

$$0 + 0 = m \cdot u1 - M \cdot u2 \quad \dot{\eta}$$

$$M \cdot u2 = m \cdot u1 \quad \dot{\eta}$$

$$u2 = m \cdot u1 / M \quad \dot{\eta}$$

$$u2 = 5\,400 / 1000 \quad \dot{\eta}$$

$$u2 = 20 \text{ m/s}$$

Άρα η ταχύτητα του πολυβόλου ακριβώς μετά την εκτόξευση του βλήματος είναι $u2 = 20 \text{ m/s}$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ένα βλήμα μάζας $m=0,1 \text{ kg}$ κινείται με ταχύτητα $u=100 \text{ m/s}$ και σφηνώνεται σε ακίνητο σώμα Σ μάζας $M=1,9 \text{ kg}$. Το συσσωμάτωμα κινείται στο οριζόντιο επίπεδο και σταματά αφού μετατοπισθεί κατά $x=10 \text{ m}$.

α) Ποια η κοινή ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση;

β) Βρείτε την τριβή που ασκήθηκε στο συσσωμάτωμα.

γ) Πόσο χρόνο διαρκεί η κίνηση μετά την κρούση;
Δίνεται $g=10 \text{ m/s}^2$.

ΛΥΣΗ

α) ΠΡΙΝ ΤΗΝ ΚΡΟΥΣΗ

Το βλήμα μάζας $m=0,1 \text{ kg}$ με ταχύτητα $u=100 \text{ m/s}$ έχει αρχική ορμή μέτρου:

$$p=m \cdot u=0,1 \text{ kg} \cdot 100 \text{ m/s}=10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Το ακίνητο σώμα Σ μάζας $M=1,9 \text{ kg}$ έχει ταχύτητα $u_{\Sigma}=0$, αφού είναι ακίνητο.

Άρα έχει αρχική ορμή:

$$p_{\Sigma}=M \cdot u_{\Sigma}=1,9 \text{ kg} \cdot 0=0$$

ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΚΡΟΥΣΗ

Η κρούση είναι πλαστική και το σύστημα των δυο σωμάτων κινείται ως συσσωμάτωμα με μάζα $(m+M)$. Έστω ότι κινείται με ταχύτητα u' . Αυτή είναι και η ζητούμενη κοινή ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Το συσσωμάτωμα έχει ορμή:

$$p'=(m+M) \cdot u'=(0,1 \text{ kg}+1,9 \text{ kg}) \cdot u'=2 \cdot u'$$

ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

Θα εφαρμόσουμε τώρα την αρχή διατήρησης της ορμής πριν και μετά την κρούση.

Έχουμε:

$$p_{\text{ολ}}(\text{αρχ})=p_{\text{ολ}}(\text{τελ}) \quad \quad \quad \text{ή}$$

$$p+p_{\Sigma}=p' \quad \quad \quad \text{ή}$$

$$10+0=2 \cdot u' \quad \quad \quad \text{ή}$$

$$2 \cdot u'=10 \quad \quad \quad \text{ή}$$

$$u' = 5 \text{ m/s}$$

Άρα η κοινή ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση είναι $u' = 5 \text{ m/s}$.

β) ΑΡΧΙΚΗ ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα έχει κινητική ενέργεια:

$$K_{\text{αρχ}} = 1/2 \cdot (m + M) \cdot u'^2 = 1/2 \cdot 2 \cdot 5^2 = 25 \text{ J}$$

ΤΕΛΙΚΗ ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Επειδή το συσσωμάτωμα σταματάει αφού μετατοπισθεί κατά $x = 10 \text{ m}$ θα έχει τελική κινητική ενέργεια **0**.

Άρα:

$$K_{\text{τελ}} = 0$$

ΕΡΓΟ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Τώρα πρέπει να υπολογίσουμε τα έργα των δυνάμεων που δρουν στο συσσωμάτωμα. Στο συσσωμάτωμα ασκούνται τρεις δυνάμεις. Το βάρος του συσσωματώματος $\mathbf{w}$, η κάθετη αντίσταση του συσσωματώματος $\mathbf{N}$ και η δύναμη της τριβής $\mathbf{T}$. Το βάρος του συσσωματώματος $\mathbf{w}$ και η κάθετη αντίσταση του συσσωματώματος $\mathbf{N}$ είναι δυνάμεις κάθετες στην κίνηση του συσσωματώματος Άρα το έργο των δυνάμεων αυτών είναι ίσο με μηδέν.

Άρα έχουμε:

$$W_B = 0$$

$$W_N = 0$$

Το έργο της δύναμης τριβής $\mathbf{T}$ ισούται:

$$W_T = -T \cdot x = -10 \cdot T$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΗΣ ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας:

$$\Delta K = \Sigma W_F$$

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_B + W_N + W_T$$

ή

$$-25 = -10 \cdot T$$

ή

$$T=2,5 \text{ N}$$

Άρα η τριβή που ασκήθηκε στο συσσωμάτωμα είναι $T=2,5 \text{ N}$.
γ) ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΟΜΑΛΗ ΜΕΤΑΒΑΛΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ

Μετά την κρούση η κίνηση που κάνει το συσσωμάτωμα είναι ευθύγραμμη ομαλή επιταχυνόμενη κίνηση.

Άρα για το συσσωμάτωμα ισχύουν οι γνωστές σχέσεις της ευθύγραμμης ομαλής επιταχυνόμενης κίνησης:

$$u=u_0+a \cdot t \text{ και}$$

$$x=u_0 \cdot t + 1/2 \cdot a \cdot t^2$$

Στην περίπτωση μας έχουμε:

$$u=u_0+a \cdot t \quad \text{ή}$$

$$0=5+a \cdot t \quad \text{ή}$$

$$a \cdot t = -5 \quad (1)$$

αφού το συσσωμάτωμα σταματάει και άρα η τελική ταχύτητα u θα είναι 0 .

$$x=u_0 \cdot t + 1/2 \cdot a \cdot t^2 \quad \text{ή}$$

$$10=5 \cdot t + 1/2 \cdot a \cdot t \cdot t$$

Με την βοήθεια της σχέσης (1) έχουμε:

$$10=5t + 1/2 \cdot a \cdot t \cdot t \quad \text{ή}$$

$$10=5t + 1/2(-5) \cdot t \quad \text{ή}$$

$$10=5t - 2,5 \cdot t \quad \text{ή}$$

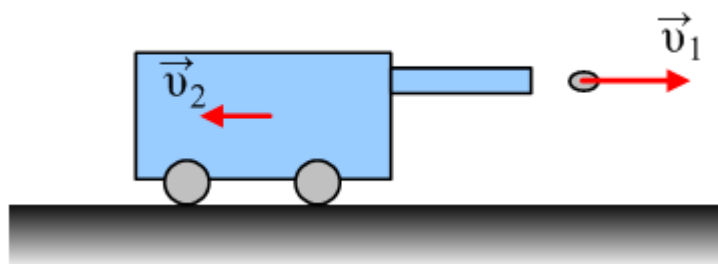
$$10=-2,5 \cdot t \quad \text{ή}$$

$$t=4 \text{ s}$$

Άρα η κίνηση μετά την κρούση διαρκεί χρόνο $t=4 \text{ s}$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Πάνω σε όχημα με μάζα 800 kg το οποίο βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο, υπάρχει πυροβόλο που εκτοξεύει βλήμα μάζας 10 kg, με οριζόντια ταχύτητα 200 m/s, προς τα δεξιά.



Ποια είναι η ταχύτητα του οχήματος μετά την εκτόξευση αν:

α) Το όχημα ήταν ακίνητο και

β) αν είχε ταχύτητα 4 m/s αντίθετης κατεύθυνσης από αυτήν του βλήματος.

ΛΥΣΗ

Έστω **$M=800\text{ kg}$** η μάζα του οχήματος.

Έστω **$m=10\text{ kg}$** η μάζα του βλήματος με οριζόντια ταχύτητα μέτρου **$u_1=200\text{ m/s}$** .

α) ΠΡΙΝ ΤΗΝ ΕΚΤΟΞΕΥΣΗ

Το όχημα μάζας **$M=800\text{ kg}$** έχει ταχύτητα **$u_{ox}=0$** , αφού είναι ακίνητο. Άρα έχει αρχική ορμή:

$$p_{ox}(αρχ) = M \cdot u_{ox} = 800\text{ kg} \cdot 0 = 0$$

Το βλήμα μάζας **$m=0,1\text{ kg}$** με ταχύτητα **$u_{αρχ}=0$** , αφού βρίσκεται ακίνητο μέσα στο όχημα. Άρα έχει αρχική ορμή μέτρου:

$$p_{βλ}(αρχ) = m \cdot u = 10\text{ kg} \cdot 0 = 0$$

ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΕΚΤΟΞΕΥΣΗ

Έστω ότι το όχημα μάζας **$M=800\text{ kg}$** έχει ταχύτητα μέτρου **u_2** μετά την εκτόξευση. Άρα έχει ορμή μέτρου:

$$p_{ox}(τελ) = M \cdot u_2$$

Το βλήμα μάζας **$m=0,1\text{ kg}$** με ταχύτητα **$u=200\text{ m/s}$** έχει ορμή μέτρου:

$$p_{βλ}(τελ) = m \cdot u = 10\text{ kg} \cdot 200\text{ m/s} = 2000\text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

Θα εφαρμόσουμε τώρα την αρχή διατήρησης της ορμής πριν και μετά την εκτόξευση.
Έχουμε:

$$p_{ολ}(αρχ)=p_{ολ}(μετα) \quad \text{ή}$$

$$p_{οχ}(αρχ)+p_{βλ}(αρχ)=p_{οχ}(τελ)+p_{βλ}(τελ) \quad \text{ή}$$

$$0+0=M \cdot u_2+2000 \quad \text{ή}$$

$$800 \cdot u_2=-2000 \quad \text{ή}$$

$$u_2=-2,5 \text{ m/s}$$

Το (-) στο αποτέλεσμα δηλώνει ότι το όχημα θα κινηθεί με φορά προς τα αριστερά(προς τα πίσω).
Άρα η ταχύτητα του οχήματος μετά την εκτόξευση έχει μέτρο $u_2=2,5 \text{ m/s}$ με φορά προς τα αριστερά(προς τα πίσω).
β) ΠΡΙΝ ΤΗΝ ΕΚΤΟΞΕΥΣΗ

Το όχημα μάζας $M=800 \text{ kg}$ έχει ταχύτητα μέτρου:

$$u_{οχ}=4 \text{ m/s}$$

αφού είναι ακίνητο.
Άρα έχει αρχική ορμή:

$$p_{οχ}(αρχ)=M \cdot u_{οχ}=800\text{kg} \cdot 4\text{m/s}=3200\text{kg m/s}$$

Το βλήμα μάζας $m=0,1\text{kg}$ με ταχύτητα $u_{αρχ}=0$,αφου βρίσκεται ακίνητο μέσα στο όχημα.
Άρα έχει αρχική ορμή μέτρου:

$$p_{βλ}(αρχ)=m \cdot u=10 \text{ kg} \cdot 0=0$$

ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΕΚΤΟΞΕΥΣΗ

Έστω ότι το όχημα μάζας $M=800 \text{ kg}$ έχει ταχύτητα μέτρου u_2 μετά την εκτόξευση.Άρα έχει ορμή μέτρου:

$$p_{οχ}(τελ)=M \cdot u_2$$

Το βλήμα μάζας $m=0,1 \text{ kg}$ με ταχύτητα $u=200 \text{ m/s}$ έχει ορμή μέτρου:

$$p_{βλ}(τελ)=m \cdot u=10 \text{ kg} \cdot 200 \text{ m/s}=2000 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

Θα εφαρμόσουμε τώρα την αρχή διατήρησης της ορμής πριν και μετά την εκτόξευση. Έχουμε:

$$p_{ολ}(αρχ) = p_{ολ}(τελ)$$

ή

$$p_{οχ}(αρχ) + p_{βλ}(αρχ) = p_{οχ}(τελ) + p_{βλ}(τελ) \quad \text{ή}$$

$$-3200 + 0 = M u_2 + 2000 \quad \text{ή}$$

$$800 \cdot u_2 = -3200 - 2000 \quad \text{ή}$$

$$800 \cdot u_2 = -5200 \quad \text{ή}$$

$$u_2 = 6,5 \text{ m/s}$$

Το (-) στο αποτέλεσμα δηλώνει ότι το όχημα θα κινηθεί με φορά προς τα αριστερά (προς τα πίσω).

Άρα η ταχύτητα του οχήματος μετά την εκτόξευση έχει μέτρο $u_2 = 6,5 \text{ m/s}$ με φορά προς τα αριστερά (προς τα πίσω).

ΚΡΟΥΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ένα βλήμα μάζας $m = 0,1 \text{ kg}$ κινείται με ταχύτητα $u = 100 \text{ m/s}$ και σφηνώνεται σε ακίνητο σώμα Σ μάζας $M = 1,9 \text{ kg}$. Το συσσωμάτωμα κινείται στο οριζόντιο επίπεδο και σταματά αφού μετατοπισθεί κατά $x = 10 \text{ m}$.

α) Ποια η κοινή ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση;

β) Βρείτε την τριβή που ασκήθηκε στο συσσωμάτωμα.

γ) Πόσο χρόνο διαρκεί η κίνηση μετά την κρούση;
Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

ΛΥΣΗ

α) ΠΡΙΝ ΤΗΝ ΚΡΟΥΣΗ

Το βλήμα μάζας $m = 0,1 \text{ kg}$ με ταχύτητα $u = 100 \text{ m/s}$ έχει αρχική ορμή μέτρου:

$$p = m \cdot u = 0,1 \text{ kg} \cdot 100 \text{ m/s} = 10 \text{ kg m/s}$$

Το ακίνητο σώμα Σ μάζας $M=1,9 \text{ kg}$ έχει ταχύτητα $u_{\Sigma}=0$, αφού είναι ακίνητο. Άρα έχει αρχική ορμή:

$$p_{\Sigma}=M \cdot u_{\Sigma}=1,9 \text{ kg} \cdot 0=0$$

ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΚΡΟΥΣΗ

Η κρούση είναι πλαστική και το σύστημα των δυο σωμάτων κινείται ως συσσωμάτωμα με μάζα $(m+M)$. Έστω ότι κινείται με ταχύτητα u' . Αυτή είναι και η ζητούμενη κοινή ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Το συσσωμάτωμα έχει ορμή:

$$p'=(m+M) \cdot u'=(0,1 \text{ kg}+1,9 \text{ kg}) \cdot u'=2 \cdot u'$$

ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

Θα εφαρμόσουμε τώρα την αρχή διατήρησης της ορμής πριν και μετά την κρούση.
Έχουμε:

$$p_{ολ}(αρχ)=p_{ολ}(τελ) \quad \text{ή}$$

$$p+p_{\Sigma}=p' \quad \text{ή}$$

$$10+0=2 \cdot u'' \quad \text{ή}$$

$$2 \cdot u'=10' \quad \text{ή}$$

$$u'=5 \text{ m/s}$$

Άρα η κοινή ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση είναι $u'=5 \text{ m/s}$.

β) ΑΡΧΙΚΗ ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα έχει κινητική ενέργεια:

$$K_{αρχ}=1/2 \cdot (m+M) u'^2=1/2 \cdot 2 \cdot 5^2=25 \text{ J}$$

ΤΕΛΙΚΗ ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Επειδή το συσσωμάτωμα σταματάει αφού μετατοπισθεί κατά $x=10 \text{ m}$ θα έχει τελική κινητική ενέργεια 0 .
Άρα:

$$K_{τελ}=0$$

ΕΡΓΟ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Τώρα πρέπει να υπολογίσουμε τα έργα των δυνάμεων που δρουν στο συσσωμάτωμα. Στο συσσωμάτωμα ασκούνται τρεις δυνάμεις. Το βάρος του συσσωματώματος **W**, η κάθετη αντίσταση του συσσωματώματος **N** και η δύναμη της τριβής **T**. Το βάρος του συσσωματώματος **W** και η κάθετη αντίσταση του συσσωματώματος **N** είναι δυνάμεις κάθετες στην κίνηση του συσσωματώματος.
 Άρα το έργο των δυνάμεων αυτών είναι ίσο με μηδέν.
 Άρα έχουμε:

$$W_B = 0$$

$$W_N = 0$$

Το έργο της δύναμης τριβής **T** ισούται:

$$W_T = -T \cdot x = -10 \cdot T$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΗΣ ΚΙΝΗΤΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας:

$$\Delta K = \Sigma W_F$$

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_B + W_N + W_T \quad \text{ή}$$

$$-25 = -10 \cdot T \quad \text{ή}$$

$$T = 2,5 \text{ N}$$

Άρα η τριβή που ασκήθηκε στο συσσωμάτωμα είναι **T = 2,5 N**.

γ) ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΟΜΑΛΗ ΜΕΤΑΒΑΛΟΜΕΝΗ ΚΙΝΗΣΗ

Μετά την κρούση η κίνηση που κάνει το συσσωμάτωμα είναι ευθύγραμμη ομαλή επιταχυνόμενη κίνηση.

Άρα για το συσσωμάτωμα ισχύουν οι γνωστές σχέσεις της ευθύγραμμης ομαλής επιταχυνόμενης κίνησης:

$$u = u_0 + a \cdot t \quad \text{και}$$

$$x = u_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Στην περίπτωση μας έχουμε:

$$u = u_0 + a \cdot t \quad \text{ή}$$

$$0 = 5 + a \cdot t \quad \text{ή}$$

$$a \cdot t = -5 \quad (1)$$

αφού το συσσωμάτωμα σταματάει και άρα η τελική ταχύτητα u θα είναι 0 .

$$x = u_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 \quad \text{ή}$$

$$10 = 5 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t \cdot t$$

Με την βοήθεια της σχέσης (1) έχουμε:

$$10 = 5 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t \cdot t \quad \text{ή}$$

$$10 = 5 \cdot t + \frac{1}{2} (-5) \cdot t \quad \text{ή}$$

$$10 = 5 \cdot t - 2,5 \cdot t \quad \text{ή}$$

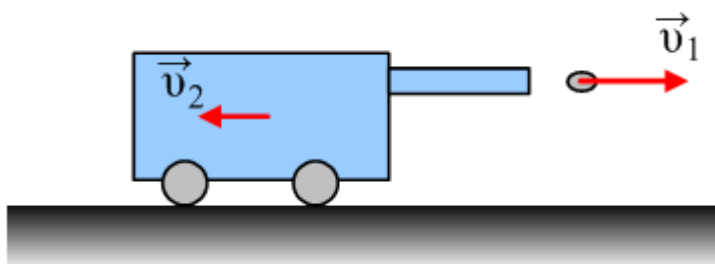
$$10 = -2,5 \cdot t \quad \text{ή}$$

$$t = 4 \text{ s}$$

Άρα η κίνηση μετά την κρούση διαρκεί χρόνο $t = 4 \text{ s}$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Πάνω σε όχημα με μάζα 800 kg το οποίο βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο, υπάρχει πυροβόλο που εκτοξεύει βλήμα μάζας 10 kg , με οριζόντια ταχύτητα 200 m/s , προς τα δεξιά.



Ποια είναι η ταχύτητα του οχήματος μετά την εκτόξευση αν:

α) Το όχημα ήταν ακίνητο και

β) αν είχε ταχύτητα 4 m/s αντίθετης κατεύθυνσης από αυτήν του βλήματος.

ΛΥΣΗ

Έστω $M = 800 \text{ kg}$ η μάζα του οχήματος.

Έστω $m = 10 \text{ kg}$ η μάζα του βλήματος με οριζόντια ταχύτητα

μέτρου $u_1 = 200 \text{ m/s}$.

α) ΠΡΙΝ ΤΗΝ ΕΚΤΟΞΕΥΣΗ

Το όχημα μάζας $M = 800 \text{ kg}$ έχει ταχύτητα $u_{ox} = 0$, αφού είναι ακίνητο. Άρα έχει αρχική ορμή:

$$p_{ox}(\text{αρχ}) = M \cdot u_{ox} = 800 \text{ kg} \cdot 0 = 0$$

Το βλήμα μάζας $m = 0,1 \text{ kg}$ με ταχύτητα $u_{αρχ} = 0$, αφού βρίσκεται ακίνητο μέσα στο όχημα.

Άρα έχει αρχική ορμή μέτρου:

$$p_{βλ}(\text{αρχ}) = m \cdot u = 10 \text{ kg} \cdot 0 = 0$$

ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΕΚΤΟΞΕΥΣΗ

Έστω ότι το όχημα μάζας $M = 800 \text{ kg}$ έχει ταχύτητα μέτρου u_2 μετά την εκτόξευση.

Άρα έχει ορμή μέτρου:

$$p_{ox}(\text{τελ}) = M \cdot u_2$$

Το βλήμα μάζας $m = 0,1 \text{ kg}$ με ταχύτητα $u = 200 \text{ m/s}$ έχει ορμή μέτρου:

$$p_{βλ}(\text{τελ}) = m u = 10 \text{ kg} \cdot 200 \text{ m/s} = 2000 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

Θα εφαρμόσουμε τώρα την αρχή διατήρησης της ορμής πριν και μετά την εκτόξευση.

Έχουμε:

$$p_{ολ}(\text{αρχ}) = p_{ολ}(\text{μετα}) \quad \dot{}$$

$$p_{ox}(\text{αρχ}) + p_{βλ}(\text{αρχ}) = p_{ox}(\text{τελ}) + p_{βλ}(\text{τελ}) \quad \dot{}$$

$$0 + 0 = M \cdot u_2 + 2000 \quad \dot{}$$

$$800 \cdot u_2 = -2000 \quad \dot{}$$

$$u_2 = -2,5 \text{ m/s}$$

Το (-) στο αποτέλεσμα δηλώνει ότι το όχημα θα κινηθεί με φορά προς τα αριστερά (προς τα πίσω).

Άρα η ταχύτητα του οχήματος μετά την εκτόξευση έχει μέτρο $u_2 = 2,5 \text{ m/s}$ με φορά προς τα αριστερά (προς τα πίσω).

β) ΠΡΙΝ ΤΗΝ ΕΚΤΟΞΕΥΣΗ

Το όχημα μάζας **$M=800\text{ kg}$** έχει ταχύτητα μέτρου **$u_{ox}=0$** , αφού είναι ακίνητο.

Άρα έχει αρχική ορμή:

$$p_{ox}(αρχ)=M \cdot u_{ox}=800\text{ kg} \cdot 4\text{ m/s}=3200\text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Το βλήμα μάζας **$m=0,1\text{ kg}$** με ταχύτητα **$u_{αρχ}=0$** , αφού βρίσκεται ακίνητο μέσα στο όχημα.

Άρα έχει αρχική ορμή μέτρου:

$$p_{βλ}(αρχ)=m \cdot u=10\text{ kg} \cdot 0=0$$

ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΕΚΤΟΞΕΥΣΗ

Έστω ότι το όχημα μάζας **$M=800\text{ kg}$** έχει ταχύτητα μέτρου **u_2** μετά την εκτόξευση.

Άρα έχει ορμή μέτρου:

$$p_{ox}(τελ)=M \cdot u_2$$

Το βλήμα μάζας **$m=0,1\text{ kg}$** με ταχύτητα **$u=200\text{ m/s}$** έχει ορμή μέτρου

$$p_{βλ}(τελ)=m \cdot u=10\text{ kg} \cdot 200\text{ m/s}=2000\text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

ΑΡΧΗ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ

Θα εφαρμόσουμε τώρα την αρχή διατήρησης της ορμής πριν και μετά την εκτόξευση.

Έχουμε:

$$p_{ολ}(αρχ)=p_{ολ}(μετα) \quad \text{ή}$$

$$p_{ox}(αρχ)+p_{βλ}(αρχ)=p_{ox}(τελ)+p_{βλ}(τελ) \quad \text{ή}$$

$$-3200+0=M u_2+2000 \quad \text{ή}$$

$$800 \cdot u_2=-3200-2000 \quad \text{ή}$$

$$800 \cdot u_2=-5200 \quad \text{ή}$$

$$u_2=6,5\text{ m/s}$$

Το (-) στο αποτέλεσμα δηλώνει ότι το όχημα θα κινηθεί με φορά προς τα αριστερά(προς τα πίσω).

Άρα η ταχύτητα του οχήματος μετά την εκτόξευση έχει μέτρο $u_2=6,5 \text{ m/s}$ με φορά προς τα αριστερά (προς τα πίσω).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ένα σώμα μάζας $m=2 \text{ kg}$ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με ταχύτητα $u=10 \text{ m/s}$ σε κύκλο ακτίνας R .

α) Υπολογίστε την ορμή του σώματος στη θέση Α.

β) Να βρείτε την μεταβολή της ορμής του σώματος μεταξύ των θέσεων Α και Β, όπου οι ακτίνες ΟΑ και ΟΒ είναι κάθετες.

ΛΥΣΗ

$20 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$,
 $20\cdot 21/2 \text{ Kg}\cdot\text{m/s}$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ένα σώμα μάζας $m=2 \text{ kg}$ εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με ταχύτητα $u=5 \text{ m/s}$ σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας $R=10 \text{ m}$.

α) Υπολογίστε την ορμή του σώματος στη θέση Α.

β) Η ορμή του σώματος παραμένει σταθερή ή όχι;

γ) Βρείτε την μεταβολή της ορμής του σώματος μεταξύ των θέσεων Α και Γ.

δ) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος στη θέση Α;

ΛΥΣΗ

$10 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2$,
 $20 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2$ και φορά προς τα κάτω,
 $5 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Ένα σώμα Α μάζα $m_1=2 \text{ kg}$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $u_1=14 \text{ m/s}$ και προσπίπτει στο ελεύθερο άκρο ενός ελατηρίου, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε δεύτερο σώμα Β $m_2=5 \text{ kg}$, το οποίο είναι ακίνητο. Σε μια στιγμή μετά από ελάχιστο χρόνο το σώμα Β έχει ταχύτητα $u_2=6 \text{ m/s}$ και επιτάχυνση $a_2=4 \text{ m/s}^2$.

Ζητούνται για τη στιγμή αυτή:

α) Η ταχύτητα του σώματος Α και

β) Η επιτάχυνση του Α σώματος.

ΛΥΣΗ

-1 m/s,
-28 m/s².

ΑΣΚΗΣΗ 4

Σε οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένα σώμα Α μάζας $M=2\text{ kg}$. Ένα βλήμα μάζας $m=0,1\text{ kg}$ που κινείται οριζόντια με ταχύτητα $u_0=100\text{ m/s}$, συγκρούεται με το σώμα Α, το διαπερνά σε χρόνο $\Delta t=0,2\text{ s}$ και εξέρχεται με ταχύτητα $u_1=20\text{ m/s}$.

- α)** Βρείτε την αρχική ορμή του βλήματος.
- β)** Υπολογίστε την ταχύτητα του σώματος Α μετά την κρούση.
- γ)** Ποια η μεταβολή της ορμής του βλήματος;
- δ)** Βρείτε την μέση δύναμη που δέχτηκε το βλήμα κατά το πέρασμά του μέσα από το σώμα Α.
- ε)** Σε μια στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος Α είναι 50 kgm/s^2 , ποιος ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της ορμής του βλήματος την ίδια χρονική στιγμή;
- στ)** Αν το σώμα Α παρουσιάζει με το έδαφος συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,2$, πόση απόσταση θα διανύσει το σώμα Α, μετά την κρούση, μέχρι να σταματήσει;

ΛΥΣΗ

$10\text{ kg}\cdot\text{m/s}$,
 4 m/s ,
 $-8\text{ kg}\cdot\text{m/s}$,
 -40 N ,
 $-50\text{ kg}\cdot\text{m/s}$,
 4 m .

ΑΣΚΗΣΗ 5

Ένα σώμα Σ1 μάζας $m_1=2\text{ kg}$ αφήνεται ελεύθερο πάνω σε λείο κεκλιμένο επίπεδο, από ύψος $h=0,8\text{ m}$.

A) Να υπολογίσετε:

- α)** τη δυναμική ενέργεια του σώματος Σ1 στη θέση εκκίνησης.
- β)** το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ1 στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

B) Το σώμα Σ1 μετά την κίνηση στο κεκλιμένο επίπεδο μπαίνει ομαλά σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο έχει συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,2$ και αφού διανύσει απόσταση $S=3\text{ m}$ κάνει μετωπική πλαστική κρούση με ένα ακίνητο σώμα Σ2 ίσης μάζας.

Να υπολογίσετε:

- α)** το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ1 ακριβώς πριν από την κρούση.

β) το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

ΛΥΣΗ

A) α) $U_g = 16 \text{ J}$,

β) $u = 4 \text{ m/s}$,

B) α) $u_1 = 2 \text{ m/s}$,

β) $u_s = 1 \text{ m/s}$.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Δύο σώματα A και B με μάζες $m_A = 15 \text{ kg}$ και $m_B = 5 \text{ kg}$ και ταχύτητες της ίδιας διεύθυνσης και αντίθετης φοράς συγκρούονται μετωπικά και πλαστικά πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Οι ταχύτητες των σωμάτων αμέσως πριν την κρούση είναι $u_A = 5 \text{ m/s}$ και $u_B = 3 \text{ m/s}$. Το συσσωμάτωμα παρουσιάζει με το οριζόντιο επίπεδο συντελεστή τριβής $\mu = 0,3$.

Να βρείτε:

α) την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά τη σύγκρουση.

β) σε πόση απόσταση από τη θέση κρούσης θα σταματήσει το συσσωμάτωμα.

γ) το μέτρο της μέσης δύναμης που δέχτηκε το σώμα B κατά την κρούση, αν η διάρκεια της κρούσης ήταν $\Delta t = 0,12 \text{ s}$.

Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

ΛΥΣΗ

α) $u = 3 \text{ m/s}$,

β) $\Delta x = 1,5 \text{ m}$,

γ) $F = 250 \text{ N}$.

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δύο οχήματα με μάζες $m_1 = 500 \text{ Kg}$ και $m_2 = 600 \text{ Kg}$ κινούνται με ταχύτητες $u_1 = 8 \text{ m/s}$ και $u_2 = 5 \text{ m/s}$ αντίστοιχα.

Ποιο είναι το μέτρο της ορμής του συστήματος;

α) προς την ίδια κατεύθυνση,

β) σε αντίθετες κατευθύνσεις,

γ) σε κάθετες διευθύνσεις.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δύο μπάλες φτιαγμένες από πλαστελίνη, κινούνται αντίρροπα. Οι μπάλες έχουν μάζες $m_1 = 200 \text{ g}$ και $m_2 = 400 \text{ g}$ και μέτρα ταχυτήτων

$u_1=2 \text{ m/s}$ και $u_2=1 \text{ m/s}$. Οι μπάλες συγκρούονται μεταξύ τους και γίνονται ένα σώμα.

Ποια η ταχύτητα του σώματος αυτού μετά την σύγκρουση;

ΑΣΚΗΣΗ 3

Ένα βλήμα μάζας $m=10\text{g}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα $u=400 \text{ m/s}$ το βλήμα σφηνώνεται σε ένα σώμα Σ που αρχικά ηρεμεί.

Ζητούνται:

α) η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση

β) Αν η διάρκεια της κρούσης είναι $\Delta t=0,2 \text{ s}$, πόση μέση δύναμη δέχεται το βλήμα από το σώμα Σ ;

ΑΣΚΗΣΗ 4

Ένα σώμα μάζας $m=20 \text{ kg}$ κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου $u_0=10 \text{ m/s}$. Κάποια χρονική στιγμή ενεργεί στο σώμα σταθερή δύναμη $F=20 \text{ N}$ που έχει τη φορά και την διεύθυνση της ταχύτητας για χρόνο $t=8 \text{ s}$.

Να υπολογίσετε:

α) Το διάστημα που θα διανύσει το σώμα στο χρόνο αυτό.

β) Την ορμή του σώματος την ίδια χρονική στιγμή.

γ) Την μεταβολή της ορμής στον ίδιο χρόνο.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Σε οριζόντιο δρόμο κινούνται δύο σφαίρες, η μια προς την άλλη, με ταχύτητες $u_1=4 \text{ m/s}$ και $u_2=6 \text{ m/s}$. Οι σφαίρες έχουν μάζες $m_1=5 \text{ kg}$ και $m_2=4 \text{ kg}$ αντίστοιχα.

α) Πόση ορμή έχει κάθε σφαίρα;

β) Ποια η συνολική ορμή του συστήματος των δύο σφαιρών;

γ) Αν οι δύο σφαίρες συγκρουστούν πλαστικά πόση θα είναι η ταχύτητα του συσσωματώματος;

ΑΣΚΗΣΗ 6

Διαστημόπλοιο κινείται στο διάστημα με ταχύτητα μέτρου $u=2000 \text{ m/s}$ και ξαφνικά σπάει σε δύο κομμάτια με μάζες m_1 και m_2 (όπου $m_1 = 5m_2$). Αν το κομμάτι μάζας m_1 κινείται με ταχύτητα μέτρου $u_1=4000 \text{ m/s}$, ίδιας κατεύθυνσης με την αρχική, να βρείτε την ταχύτητα του άλλου κομματιού.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Βλήμα μάζας 2 Kg κινούμενο οριζόντια με ταχύτητα 200 m/s σφηνώνεται σε ξύλινο κιβώτιο μάζας 8 kg , που ηρεμούσε σε λείο οριζόντιο επίπεδο.

Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής κάθε σώματος κατά την διάρκεια της κρούσης.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Μια σφαίρα μάζας 100gr που κινείται οριζόντια με ταχύτητα 100 m/s, σφηνώνεται στο κέντρο ξύλινου κύβου μάζας 1900 g, που ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ανάμεσα στον κύβο και στο οριζόντιο έδαφος είναι $\mu=0,1$ και $g=10 \text{ m/s}^2$, να βρεθούν.

α) Η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

β) Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας κατά την κρούση.

γ) Το διάστημα που θα διανύσει το συσσωμάτωμα μέχρι να σταματήσει.

ΑΣΚΗΣΗ 9

Δυο σφαίρες με μάζες $m_1=5 \text{ kg}$ και $m_2=10 \text{ kg}$ κινούνται οριζόντια με ταχύτητες μέτρων $u_1=6 \text{ m/s}$ και $u_2=9 \text{ m/s}$ αντίστοιχα, που έχουν ίδια διεύθυνση και αντίθετες φορές. Αν μετά την κρούση οι δυο σφαίρες μένουν ενωμένες, να βρείτε την κοινή ταχύτητα τους.

ΑΣΚΗΣΗ 10

Ένα σώμα Σ μάζας $M=2 \text{ kg}$ ηρεμεί στο κάτω άκρο ενός νήματος μήκους $l=2,5 \text{ m}$. Σε μια στιγμή στο σώμα Σ προσπίπτει ένα βλήμα μάζας $m_1=0,1 \text{ kg}$ με οριζόντια ταχύτητα $u_1=200 \text{ m/s}$, το διαπερνά και εξέρχεται με ταχύτητα $u_2=100 \text{ m/s}$.

A) Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λαθεμένες:

α) Κατά τη διάρκεια της κρούσης διατηρείται η ορμή του βλήματος.

β) Η ορμή του συστήματος σώμα Σ -βλήμα, διατηρείται κατά την κρούση.

γ) Η Μηχανική ενέργεια διατηρείται κατά την κρούση.

δ) Μετά την κρούση το σώμα Σ κινείται μέχρι να ανέβει σε ύψος h . Κατά τη διάρκεια της κίνησης αυτής η Μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή.

Β) Ποια ταχύτητα αποκτά το σώμα Σ μετά την κρούση;

Γ) Να υπολογίσετε το ύψος h .

Δίνεται $g=10 \text{ m/s}^2$.

ΑΣΚΗΣΗ 11

Κανόνι μάζας $m_1=500 \text{ kg}$ είναι στερεωμένο στο δάπεδο μιας βάρκας μάζας $m_2=1000 \text{ kg}$. Η βάρκα αρχικά είναι ακίνητη. Από το κανόνι βγαίνει βλήμα μάζας $m_3=1 \text{ kg}$ με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $u_0=750 \text{ m/s}$.

Να βρείτε την ταχύτητα με την οποία θα κινηθεί η βάρκα μετά

τον πυροβολισμό.

Οι αντιστάσεις από το νερό να μη ληφθούν υπόψη.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Δυο αστροναύτες με μάζες $m_1=70\text{ kg}$ και $m_2=90\text{ kg}$ αντίστοιχα βρίσκονται στο διάστημα αρχικά ακίνητοι, δεμένοι με ένα σχοινί. Με τη βοήθεια του σχοινιού τραβάει ο ένας τον άλλον. Αν κατά τη στιγμή της συνάντησης ο αστροναύτης με μάζα m_1 έχει ταχύτητα μέτρου $u_1=18\text{ m/sec}$, να βρείτε την ταχύτητα u_2 του άλλου αστροναύτη.

Θεωρήστε ότι οι δυνάμεις βαρύτητας στους αστροναύτες είναι αμελητέες.

ΑΣΚΗΣΗ 13

Ένα βλήμα έχει μάζα $m=10\text{ kg}$ και κινείται στο κενό με σταθερή ταχύτητα $u_0=400\text{ m/s}$. Κάποια στιγμή το βλήμα εκρήγνυται σε δύο κομμάτια εκ των οποίων το ένα έχει μάζα $m_1=4\text{ kg}$ και κινείται με ταχύτητα $u_1=185\text{ m/s}$.

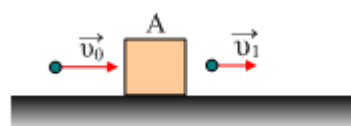
Να βρεθεί η ταχύτητα του άλλου κομματιού, όταν η u_1 είναι:

α) ομόρροπη της u_0 και

β) αντίρροπη της u_0 .

ΑΣΚΗΣΗ 24

Σε οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένα σώμα Α μάζας $M=2\text{ kg}$. Ένα βλήμα μάζας $m=0,1\text{ kg}$ που κινείται οριζόντια με ταχύτητα $u_0=100\text{ m/s}$, συγκρούεται με το σώμα Α, το διαπερνά σε χρόνο $\Delta t=0,2\text{ s}$ και εξέρχεται με ταχύτητα $u_1=20\text{ m/s}$.



α) Βρείτε την αρχική ορμή του βλήματος.

β) Υπολογίστε την ταχύτητα του σώματος Α μετά την κρούση.

γ) Ποια η μεταβολή της ορμής του βλήματος;

δ) Βρείτε την μέση δύναμη που δέχτηκε το βλήμα κατά το πέρασμά του μέσα από το σώμα Α.

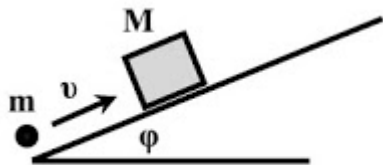
ε) Σε μια στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος Α είναι 50 kgm/s^2 , ποιος ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της ορμής του βλήματος την ίδια χρονική στιγμή;

στ) Αν το σώμα Α παρουσιάζει με το έδαφος συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,2$, πόση απόσταση θα διανύσει το σώμα Α, μετά την κρούση, μέχρι να σταματήσει;

Δίνεται $g=10\text{ m/s}^2$.

ΑΣΚΗΣΗ 25

Ξύλινος κύβος μάζας $M=3\text{ kg}$ που αρχικά ηρεμεί πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνιάς κλίσης $\varphi=30^\circ$. Βλήμα μάζας $m=2\text{ kg}$ έρχεται με ταχύτητα $u=100\text{ m/s}$ παράλληλα προς το κεκλιμένο και σφηνώνεται ακαριαία στον κύβο.



Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα ολισθαίνει πάνω στο κεκλιμένο και μετά από απόσταση d σταματάει στιγμιαία. Μεταξύ σώματος και κεκλιμένου υπάρχουν τριβές με συντελεστή τριβής $\mu=1,7/3$. Δίνονται $g=10\text{ m/s}^2$, $\eta\mu 30^\circ=1/2$ και $\sigma\upsilon\nu 30^\circ=1,7/2$

- α)** Να βρεθεί η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
- β)** Να βρεθεί η μετατόπιση d του συσσωματώματος μέχρι να σταματήσει.
- γ)** Να εξεταστεί αν το συσσωμάτωμα μπορεί να ολισθήσει και πάλι προς τα κάτω.

ΑΣΚΗΣΗ 26

Μπαλάκι του τένις μάζας $m=0,1\text{ kg}$ που κινείται οριζόντια πάνω στο πάτωμα χωρίς τριβές συγκρούεται με κατακόρυφο τοίχο με ταχύτητα $u_1=10\text{ m/s}$ και ανακλάται οριζόντια με ταχύτητα $u_2=8\text{ m/s}$.

- α)** Πόση είναι η μεταβολή της ορμής της μπάλας; Ως θετική να πάρετε τη φορά της u_2 .
- β)** Αν η κρούση με τον τοίχο διαρκεί $\Delta t=0,02\text{ s}$ να βρείτε πόση είναι η δύναμη που δέχτηκε το μπαλάκι από τον τοίχο. Η δύναμη αυτή θεωρείται σταθερή.
- γ)** Μετά την κρούση το μπαλάκι κινείται οριζόντια με σταθερή ταχύτητα, $u_2=8\text{ m/s}$ και συγκρούεται πλαστικά με βλήμα μάζας $m=0,3\text{ kg}$ που κινείται αντίθετα με ταχύτητα 6 m/s . Πόση θα είναι η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση;

ΑΣΚΗΣΗ 27

Κανόνι μάζας $M=1000\text{ kg}$ είναι ακίνητο πάνω σε οριζόντιο επίπεδο και εκτοξεύει βλήμα μάζας $m=10\text{ kg}$ με ταχύτητα $u_0=1000\text{ m/s}$ σε οριζόντια κατεύθυνση.

- α)** Πόση είναι η ταχύτητα του κανονιού, V , μετά την εκπυρσοκρότηση;
- Μετά την εκπυρσοκρότηση το κανόνι ξεκινάει με την ταχύτητα V , έχει πάντα μάζα 1000 kg και ολισθαίνει πάνω στο επίπεδο. Η μόνη οριζόντια δύναμη που δέχεται κατά την ολίσθηση είναι η τριβή και ο

συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι $\mu=0,2$.

Να βρείτε:

β) Το διάστημα που διανύει μέχρι να σταματήσει.

γ) Το χρονικό διάστημα που χρειάζεται για να σταματήσει.

Δίνεται $g=10 \text{ m/s}^2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Β ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΝΟΜΟΙ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Μεταλλικό κυλινδρικό δοχείο κλείνεται με εφαρμοστό έμβολο. Το δοχείο περιέχει αέριο όγκου $V_1=5 \text{ L}$ και βρίσκεται μέσα σε λουτρό νερού σταθερής θερμοκρασίας. Μετακινούμε το έμβολο, ώστε η πίεση του αερίου να ελαττωθεί στο $1/2$ της αρχικής τιμής της.

α) Να χαρακτηρίσετε τη μεταβολή του αερίου και να διατυπώσετε το νόμο της μεταβολής.

β) Να υπολογίσετε την τελική τιμή του όγκου του αερίου.

ΛΥΣΗ

α) Η μεταβολή του αερίου είναι ισόθερμη, γιατί το δοχείο βρίσκεται μέσα σε λουτρό νερού σταθερής θερμοκρασίας. Όμως η πίεση του αερίου ελαττώνεται. Επομένως ο όγκος του αυξάνεται.

Άρα, η μεταβολή του αερίου είναι ισόθερμη εκτόνωση και περιγράφεται από τον νόμο του Boyle, ο οποίος διατυπώνεται ως εξής:

Η πίεση ορισμένης ποσότητας αερίου του οποίου η θερμοκρασία παραμένει σταθερή είναι αντίστροφα ανάλογη με τον όγκο του.

β) Έστω p_1 η αρχική πίεση, p_2 η τελική πίεση και V_2 ο τελικός όγκος του αερίου.

Έχουμε:

$$p_1 = p_2/2$$

Από τον νόμο του Boyle έχουμε:

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 \quad \text{ή}$$

$$p_1 \cdot V_1 = p_1/2 \cdot V_2 \quad \text{ή}$$

$$V_2 = 2V_1 \quad \text{ή}$$

$$V_2 = 2 \cdot 5 \text{ L} \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{V_2 = 10 \text{ L}}$$

Άρα η τελική τιμή του όγκου του αερίου είναι $V_2 = 10 \text{ L}$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ένα mole ενός αερίου βρίσκονται σε κανονικές συνθήκες πίεσης και θερμοκρασίας. Διπλασιάζουμε την πίεση του αερίου, διατηρώντας σταθερή τη θερμοκρασία του, και στη συνέχεια τριπλασιάζουμε τον όγκο του αερίου, διατηρώντας σταθερή την πίεση του. Να υπολογίσετε τις τιμές της πίεσης, του όγκου και της θερμοκρασίας:

α) μετά την ισόθερμη μεταβολή.

β) μετά την ισοβαρή μεταβολή.

ΛΥΣΗ

Αρχικά, επειδή το αέριο βρίσκεται σε κανονικές συνθήκες, καταλαμβάνει όγκο $V_1 = 1 \cdot 22,4 \text{ L} = 22,4 \text{ L}$ σε πίεση $p_1 = 1 \text{ atm}$ και θερμοκρασία $T_1 = 273 \text{ K}$.

α) Έστω V_2 ο όγκος, p_2 η πίεση και T_2 η θερμοκρασία του αερίου μετά την ισόθερμη μεταβολή. Έχουμε:

$$p_2 = 2 \cdot p_1 \quad \text{ή}$$

$$p_2 = 2 \cdot 1 \text{ atm} \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{p_2 = 2 \text{ atm}}$$

Άρα μετά την ισόθερμη μεταβολή η πίεση του αερίου είναι $p_2 = 2 \text{ atm}$.

Επίσης έχουμε:

$$T_2 = T_1 \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{T_2 = 273 \text{ K}}$$

Άρα μετά την ισόθερμη μεταβολή η θερμοκρασία του αερίου είναι $T_2 = 273 \text{ K}$.

Από το νόμο του Boyle έχουμε:

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 \quad \text{ή}$$

$$p_1 \cdot V_1 = 2 \cdot p_1 \cdot V_2 \quad \text{ή}$$

$$V_2 = V_1/2 \quad \text{ή}$$

$$V_2 = 22,4/2 \text{ L} \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{V_2 = 11,2 \text{ L}}$$

Άρα μετά την ισόθερμη μεταβολή ο όγκος του αερίου είναι $V_2 = 11,2 \text{ L}$.

β) Έστω V_3 ο όγκος, p_3 η πίεση και T_3 η θερμοκρασία του αερίου μετά την ισοβαρή μεταβολή.
Έχουμε:

$$V_3 = 3 \cdot V_1 \quad \text{ή}$$

$$V_3 = 3 \cdot 11,2 \text{ L} \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{V_3 = 33,6 \text{ L}}$$

Άρα μετά την ισοβαρή μεταβολή ο όγκος του αερίου είναι $V_3 = 33,6 \text{ L}$.

Επίσης έχουμε:

$$p_3 = p_2 \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{p_3 = 2 \text{ atm}}$$

Άρα μετά την ισοβαρή μεταβολή η πίεση του αερίου είναι $p_3 = 2 \text{ atm}$.

Από τον νόμο του Gay-Lussac έχουμε:

$$V_2/T_2 = V_3/T_3 \quad \text{ή}$$

$$V_2/T_2 = 3 \cdot V_2/T_3 \quad \text{ή}$$

$$T_3 = 3 \cdot T_2 \quad \text{ή}$$

$$T_3 = 3 \cdot 273 \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{T_3 = 819 \text{ K}}$$

Άρα μετά την ισοβαρή μεταβολή η θερμοκρασία του αερίου είναι $T_3 = 819 \text{ K}$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Ιδανικό αέριο βρίσκεται μέσα σε δοχείο που κλείνεται με έμβολο από την πάνω μεριά. Αρχικά, το αέριο βρίσκεται σε θερμοκρασία $-1,5$ βαθμών Κελσίου και καταλαμβάνει όγκο 20 L . Θερμαίνουμε το αέριο μέχρι να φτάσει σε θερμοκρασία 270 βαθμών Κελσίου. Να βρείτε το τελικό όγκο του αερίου;

ΛΥΣΗ

α) Η πίεση στο εσωτερικό του δοχείου είναι ίση με την εξωτερική πίεση. Εφόσον η εξωτερική πίεση παραμένει σταθερή, το ίδιο θα ισχύει και για την πίεση του αερίου.

Άρα η μεταβολή που υφίσταται το αέριο είναι ισοβαρής και θα ισχύει ο νόμος του Gay-Lussac:

$$V_1/T_1 = V_2/T_2 \quad \text{ή}$$

$$V_2 = T_2 \cdot V_1 / T_1 \quad \text{ή}$$

$$V_2 = 543\text{ K} \cdot 20\text{ L} / 271,5 \quad \text{ή}$$

$$V_2 = 40\text{ L} \quad \text{ή}$$

Άρα ο τελικός όγκος του αερίου είναι $V_2 = 40\text{ L}$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Ο όγκος δεδομένης ποσότητας ιδανικού αερίου διπλασιάζεται, υπό σταθερή πίεση, και κατόπιν μειώνεται η πίεση στο μισό της αρχικής της τιμής, υπό σταθερό όγκο.

Η τελική θερμοκρασία του αερίου είναι:

α) διπλάσια της αρχικής.

β) τετραπλάσια της αρχικής.

γ) μισή της αρχικής.

δ) ίση με την αρχική.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι αρχικά η ποσότητα του αερίου βρίσκεται στην κατάσταση A και μεταβαίνει στην κατάσταση B, με σταθερή πίεση. Αυτό σημαίνει ότι η μεταβολή AB είναι ισοβαρής και ισχύει ο νόμος Gay-Lussac:

$$V_A/T_A = V_B/T_B$$

Επειδή ο όγκος διπλασιάζεται $V_B = 2V_A$, θα έχουμε:

$$V_A/T_A = 2V_A/T_B \quad \text{ή}$$

$$T_B = 2T_A$$

Κατόπιν το αέριο μεταβαίνει από την κατάσταση Β στην κατάσταση Γ με σταθερό όγκο (ισόχωρη μεταβολή), άρα ισχύει ο νόμος του Charles:

$$p_B/T_B = p_\Gamma/T_\Gamma$$

Όμως στην κατάσταση Γ είναι $p_\Gamma = p_B/2$, άρα προκύπτει:

$$p_B/T_B = p_\Gamma/T_\Gamma \quad \text{ή}$$

$$p_B/T_B = p_B/2/T_\Gamma \quad \text{ή}$$

$$T_B = 2T_\Gamma$$

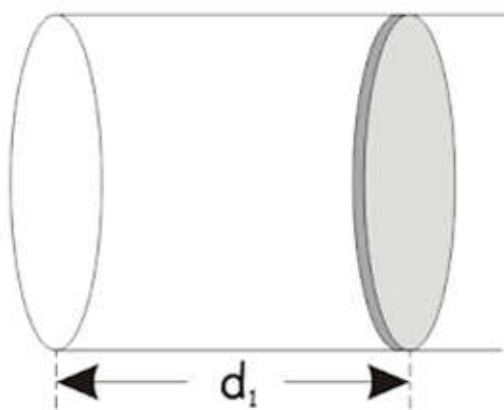
Από τις παραπάνω σχέσεις (2) και (4) προκύπτει:

$$T_A = T_\Gamma$$

δηλαδή σωστή απάντηση είναι η (δ).

ΑΣΚΗΣΗ 5

Ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου βρίσκεται μέσα σε κυλινδρικό δοχείο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το δοχείο κλείνεται από το ένα μέρος του με έμβολο, το οποίο μπορεί να κινείται ελεύθερο χωρίς τριβές.



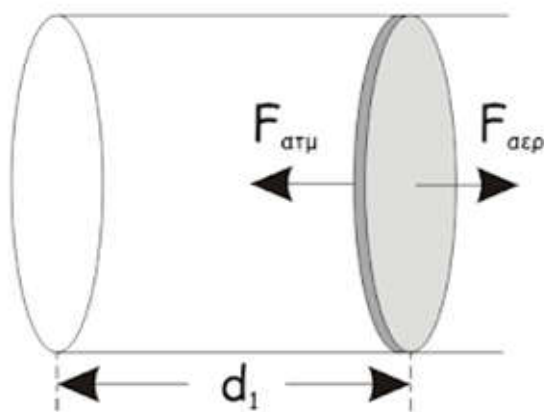
Αν το αέριο έχει αρχικά θερμοκρασία $\theta_1 = 27^\circ\text{C}$ και το έμβολο ισορροπεί σε απόσταση $d_1 = 30\text{ cm}$ από τη βάση του κυλίνδρου και η ατμοσφαιρική πίεση είναι $p_{\text{ατμ}} = 1\text{ atm}$, να βρείτε:

α) την πίεση του αερίου.

β) αν θερμάνουμε το αέριο πολύ αργά μέχρι να αποκτήσει θερμοκρασία $\theta_2 = 127^\circ\text{C}$, να υπολογίσετε την νέα απόσταση d_2 που θα απέχει το έμβολο από τη βάση του δοχείου.

ΛΥΣΗ

α) Εφόσον το έμβολο ισορροπεί, η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται πάνω του είναι ίση με μηδέν.



Οι δυνάμεις που ασκούνται στο έμβολο είναι η $F_{αερ}$, που ασκείται από το αέριο και η $F_{ατμ}$, που ασκείται από τον ατμοσφαιρικό αέρα. Αφού το έμβολο ισορροπεί, θα είναι:

$$\Sigma F = 0 \quad \text{ή}$$

$$F_{αερ} = F_{ατμ} \quad \text{ή}$$

$$p \cdot A = p_{ατμ} \cdot A \quad \text{ή}$$

$$p = p_{ατμ} \quad \text{ή}$$

$$p = 1 \text{ atm}$$

Άρα η πίεση του αερίου είναι $p = 1 \text{ atm}$.

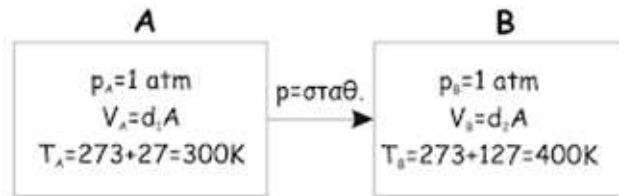
β) Επειδή η θέρμανση του αερίου γίνεται πολύ αργά, μπορούμε να θεωρούμε κάθε διαδοχική θέση του εμβόλου ως θέση ισορροπίας. Επομένως η πίεση του αερίου παραμένει σταθερή και ισούται συνεχώς με τη σταθερή εξωτερική πίεση. Δηλαδή η μεταβολή από την αρχική κατάσταση, έστω Α, στην τελική κατάσταση, έστω Β, είναι ισοβαρής θέρμανση.

Στην ισοβαρή μεταβολή ισχύει ο νόμος του Gay-Lussac:

$$V_A/T_A = V_B/T_B \quad \text{ή}$$

$$V_B = T_B \cdot V_A / T_A \quad (1)$$

Οι τιμές των μακροσκοπικών μεγεθών στις δύο καταστάσεις Α και Β φαίνονται παρακάτω:



Αν Α το εμβαδόν του εμβόλου, τότε η (1) γράφεται:

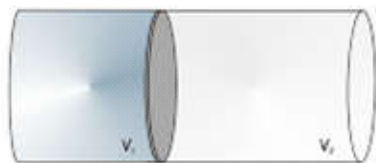
$$d_2 \cdot A = 400 \cdot d_1 \cdot A / 300 \quad \text{ή}$$

$$d_2 = 40 \text{ cm}$$

Άρα η νέα απόσταση που θα απέχει το έμβολο από τη βάση του δοχείου είναι $d_2 = 40 \text{ cm}$.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Το κλειστό δοχείο του σχήματος χωρίζεται σε δύο μέρη με λεπτό έμβολο, το οποίο ισορροπεί.



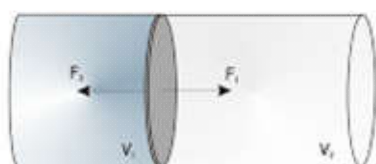
Στο αριστερό μέρος υπάρχει ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου σε θερμοκρασία $\theta_1 = 27^\circ \text{C}$, ενώ στο δεξιό μέρος υπάρχει ίση ποσότητα του ίδιου αερίου σε θερμοκρασία $\theta_2 = 127^\circ \text{C}$. Αν ο συνολικός όγκος του δοχείου είναι $V = 7 \text{ L}$, να υπολογίσετε τους όγκους V_1 και V_2 .

ΛΥΣΗ

Το έμβολο ισορροπεί, άρα η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται θα είναι μηδέν, δηλαδή:

$$\Sigma F = 0$$

Το έμβολο δέχεται δύναμη F_1 από το αέριο που βρίσκεται αριστερά στο δοχείο και δύναμη F_2 .



Αφού το έμβολο ισορροπεί, θα ισχύει:

$$F_1 = F_2 \quad \text{ή}$$

$$p_1 \cdot A = p_2 \cdot A \quad \text{ή}$$

$$p_1 = p_2$$

όπου:

A το εμβαδόν του εμβόλου

Δηλαδή η πίεση που ασκεί το αέριο που βρίσκεται στα αριστερά είναι ίση με την πίεση που ασκεί το αέριο που βρίσκεται στα αριστερά.

Σύμφωνα με το συνδυαστικό νόμο θα έχουμε:

$$p_1 \cdot V_1 / T_1 = p_2 \cdot V_2 / T_2 \quad \text{ή}$$

$$V_1 / T_1 = V_2 / T_2 \quad (1)$$

Οι θερμοκρασίες T_1 και T_2 είναι:

$$T_1 = 273 + 27 = 300 \text{ K} \quad \text{και}$$

$$T_2 = 273 + 127 = 400 \text{ K}$$

Άρα η (1) γράφεται:

$$V_1 / V_2 = 3/4 \quad \text{ή}$$

$$V_1 = 3V_2/4 \quad (2)$$

Ισχύει επίσης:

$$V_1 + V_2 = V \quad (3)$$

Από τις (2),(3) προκύπτει:

$$\mathbf{V_1 = 3 \text{ L}} \quad \text{και}$$

$$\mathbf{V_2 = 4 \text{ L}}$$

Άρα οι δυο όγκοι είναι $V_1 = 3 \text{ L}$ και $V_2 = 4 \text{ L}$.

ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΩΝ ΙΔΑΝΙΚΩΝ ΑΕΡΙΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Σε δοχείο όγκου 15 L και θερμοκρασίας 27 °C, εισάγονται 4 mol αερίου Α.

Να υπολογιστεί η πίεση που ασκεί το αέριο στο δοχείο.

ΛΥΣΗ

Αφού γνωρίζουμε τη θερμοκρασία, τον όγκο και την ποσότητα σε mol του αερίου μπορούμε να βρούμε πόση πίεση ασκεί, από την καταστατική εξίσωση.

Για την θερμοκρασία έχουμε:

$$T = \theta + 273 = (27 + 273) \text{ K} = 300 \text{ K}$$

Από την καταστατική εξίσωση έχουμε:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad \text{ή}$$

$$p = n \cdot R \cdot T / V \quad \text{ή}$$

$$p = 4 \text{ mol} \cdot (0,082 \text{ atm} \cdot \text{L/mol} \cdot \text{K}) \cdot 300 \text{ K} / 15 \text{ L} \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{P = 6,56 \text{ atm}}$$

Άρα η πίεση που ασκεί το αέριο στο δοχείο είναι $P = 6,56 \text{ atm}$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Πόση είναι η πυκνότητα του οξυγόνου (O_2) σε πίεση 8 atm και θερμοκρασία 273 °C.

Δίνεται $A_{\text{rO}} = 16$.

ΛΥΣΗ

Για την θερμοκρασία έχουμε:

$$T = \theta + 273 = (273 + 273) \text{ K} = 546 \text{ K}$$

$$M_{\text{O}_2} = 2 \cdot 16 = 32$$

Όμως:

$$n = m / M_{\text{g/mol}}$$

οπότε έχουμε:

$$p \cdot V = m \cdot R \cdot T / M_g / \text{mol} \quad \text{ή}$$

$$p = m/V \cdot R \cdot T / M_g / \text{mol} \quad \text{ή}$$

$$p = m/V \cdot R \cdot T / M_g / \text{mol} \quad \text{ή}$$

$$p = \rho \cdot R \cdot T / M_g / \text{mol} \quad \text{ή}$$

$$\rho = p \cdot M_g / \text{mol} / R \cdot T \quad \text{ή}$$

$$\rho = 8 \text{ atm} \cdot 32 \text{ g/mol} / 0,082 \text{ atm} \cdot \text{L/mol} \cdot \text{K} \cdot 546 \text{ K} \quad \text{ή}$$

$$\rho = 5,71 \text{ g/L}$$

Άρα η πυκνότητα του οξυγόνου (O₂) σε πίεση 8 atm και θερμοκρασία 273 °C είναι $\rho = 5,71 \text{ g/L}$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Ποσότητα $2/R \text{ mol}$ He καταλαμβάνουν όγκο $V_A = 2 \text{ L}$ ασκώντας πίεση $p_A = 2 \text{ atm}$.

α) Να υπολογιστεί η θερμοκρασία στην οποία βρίσκεται το αέριο.

β) Διατηρώντας το γινόμενο pV σταθερό, αυξάνουμε τον όγκο του αερίου κατά 6 L.

Ποια είναι η τελική πίεση του αερίου;

ΛΥΣΗ

α) Για να βρούμε την θερμοκρασία του αερίου στην αρχική κατάσταση, εφαρμόζουμε την καταστατική εξίσωση:

$$p_A \cdot V_A = n \cdot R \cdot T_A \quad \text{ή}$$

$$T_A = p_A \cdot V_A / (n \cdot R)$$

Με αντικατάσταση των μεγεθών στην παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$T_A = 200 \text{ K}$$

Άρα η θερμοκρασία στην οποία βρίσκεται το αέριο είναι $T_A = 200 \text{ K}$.

β) Η μεταβολή της ποσότητας του αερίου από την αρχική κατάσταση (έστω A) στην τελική κατάσταση (έστω B) είναι ισόθερμη, αφού ισχύει ο νόμος του Boyle $pV = \text{σταθερό}$. Άρα έχουμε:

$$p_A \cdot V_A = p_B \cdot V_B$$

Ο όγκος στην κατάσταση Β έχει αυξηθεί κατά 6L, οπότε θα είναι:

$$V_B = V_A + 6 \quad \text{ή}$$

$$V_B = 8 \text{ L}$$

Άρα θα είναι:

$$p_B = (p_A \cdot V_A) / V_B \quad \text{ή}$$

$$p_B = 50 \text{ atm}$$

Άρα η τελική πίεση του αερίου είναι $p_B = 50 \text{ atm}$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Ποσότητα H_2 βρίσκεται μέσα σε κυλινδρικό που κλείνεται με έμβολο, το οποίο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Η πίεση του αερίου είναι $p_1 = 8,2 \text{ atm}$, ο όγκος του είναι $V_1 = 20 \text{ L}$ και η θερμοκρασία $T_1 = 300 \text{ K}$.

α) Να υπολογιστεί ο αριθμός των moles του αερίου.

β) Εισάγουμε στο δοχείο ορισμένη ποσότητα H_2 και παρατηρούμε ότι ο όγκος του αερίου διπλασιάζεται, η θερμοκρασία γίνεται $T_2 = 500 \text{ K}$, ενώ η πίεση παραμένει σταθερή.

Να υπολογιστεί η μάζα του H_2 που εισάγαμε στο δοχείο.

Δίνονται: $R = 0,082 \text{ L} \cdot \text{atm} / \text{mol} \cdot \text{K}$ και $M_B(H_2) = 2$.

ΛΥΣΗ

α) Υποθέτουμε ότι το αέριο βρίσκεται αρχικά στην κατάσταση Α με πίεση p_1 , όγκο V_1 και θερμοκρασία T_1 . Για να υπολογίσουμε τον αριθμό των moles του H_2 , χρησιμοποιούμε την καταστατική εξίσωση:

$$p_1 \cdot V_1 = n_1 \cdot R \cdot T_1 \quad \text{ή}$$

$$n_1 = p_1 \cdot V_1 / (R \cdot T_1) \quad \text{ή}$$

$$n_1 = 8,2 \cdot 20 / (0,082 \cdot 300) \quad \text{ή}$$

$$n_1 = 20/3 \text{ mol}$$

Άρα ο αριθμός των moles του αερίου είναι $n_1 = 20/3 \text{ mol}$.

β) Εισάγουμε την ποσότητα H_2 και το αέριο μεταβαίνει στην κατάσταση Β με πίεση p_1 , όγκο $V_2 = 2 \cdot V_1$ και θερμοκρασία $T_2 = 500$

Κ.

Υπολογίζουμε τον αριθμό των moles n_2 από την καταστατική:

$$p_2 \cdot V_2 = n_2 \cdot R \cdot T_2 \quad \text{ή}$$

$$n_2 = p_2 \cdot V_2 / (R \cdot T_2) \quad \text{ή}$$

$$n_2 = 8,2 \cdot 40 / (0,082 \cdot 500) \quad \text{ή}$$

$$n_2 = 8 \text{ mol}$$

Στην κατάσταση Α έχουμε $n_1 = 20/3$ mol και στην κατάσταση Β έχουμε $n_2 = 8$ mol.

Άρα η ποσότητα των moles που εισάγουμε είναι:

$$\Delta n = n_2 - n_1 = 8 - 20/3 = 4/3 \text{ mol}$$

Η ποσότητα $4/3$ mol αντιστοιχεί σε μάζα

$$m = \Delta n \cdot M_r \quad \text{ή}$$

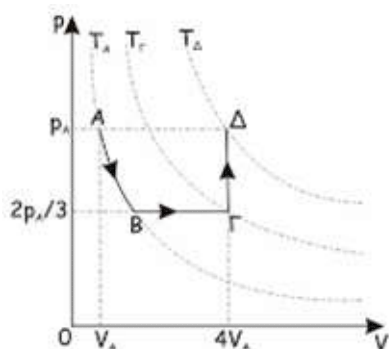
$$m = 4/3 \cdot 0,002 \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{m = 0,008/3 \text{ kg}}$$

Άρα η μάζα του H_2 που εισάγαμε στο δοχείο είναι $m = 0,008/3$ kg.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Ποσότητα $n = 2/R$ mol ιδανικού αερίου υποβάλλεται στις τρεις διαδοχικές μεταβολές που φαίνονται στο διάγραμμα του σχήματος. Κατά τη διάρκεια των μεταβολών αυτών η μέγιστη θερμοκρασία του αερίου είναι $T = 600$ K και ο μέγιστος όγκος που καταλαμβάνει το αέριο είναι $V = 6$ L.



α) Να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη πίεση του αερίου κατά τη διάρκεια των μεταβολών.

β) Να υπολογίσετε τη μέγιστη πυκνότητα του αερίου.

γ) Να παραστήσετε τις μεταβολές σε διάγραμμα p-T (ποιοτικά).

Δίνεται $M=2R \text{ g/mol}$

ΛΥΣΗ

α) Από το διάγραμμα φαίνεται ότι:

$$V_{\max}=V_{\Delta}=4V_A=6 \text{ L}$$

και

$$T_{\max}=T_{\Delta}=600 \text{ K}$$

Για την κατάσταση Δ η καταστατική εξίσωση γράφεται:

$$p_{\Delta} \cdot V_{\Delta} = n \cdot R \cdot T_{\Delta} \quad \text{ή}$$

$$p_{\Delta} = n \cdot R \cdot T_{\Delta} / V_{\Delta} \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{p_{\Delta}=p_A=200 \cdot 10^2 \text{ N/m}^2}$$

που είναι και η μέγιστη πίεση του αερίου.

Άρα η μέγιστη πίεση του αερίου κατά τη διάρκεια των μεταβολών είναι $p_{\max}=200 \cdot 10^2 \text{ N/m}^2$.

Για την ελάχιστη πίεση του αερίου, παρατηρούμε από το διάγραμμα ότι είναι:

$$\mathbf{p_{\min}=p_B=p_{\Gamma}=2p_A/3=400/3 \cdot 10^2 \text{ N/m}^2}$$

Άρα η ελάχιστη πίεση του αερίου κατά τη διάρκεια των μεταβολών είναι $p_{\min}=400/3 \cdot 10^2 \text{ N/m}^2$.

β) Εφόσον η μάζα του αερίου δε μεταβάλλεται, συμπεραίνουμε από τη σχέση $d=m/V$, πως η μέγιστη πυκνότητα του αερίου επιτυγχάνεται στην κατάσταση όπου ο όγκος του αερίου είναι ελάχιστος, δηλαδή στην κατάσταση Α, όπως φαίνεται και από το διάγραμμα.
Είναι:

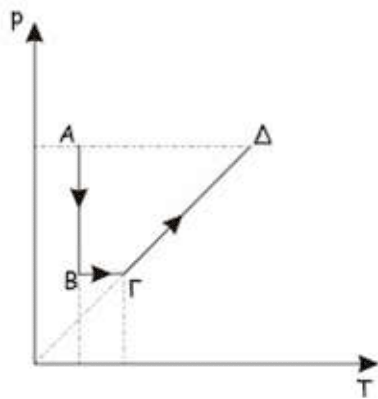
$$m_{\text{αερ}} = n \cdot M = 0,004 \text{ kg και}$$

$$V_A = V_{\Delta} / 4 = 1,5 \text{ L} = 0,0015 \text{ m}^3$$

$$\mathbf{\text{Άρα } d=2,66 \text{ kg/m}^3}$$

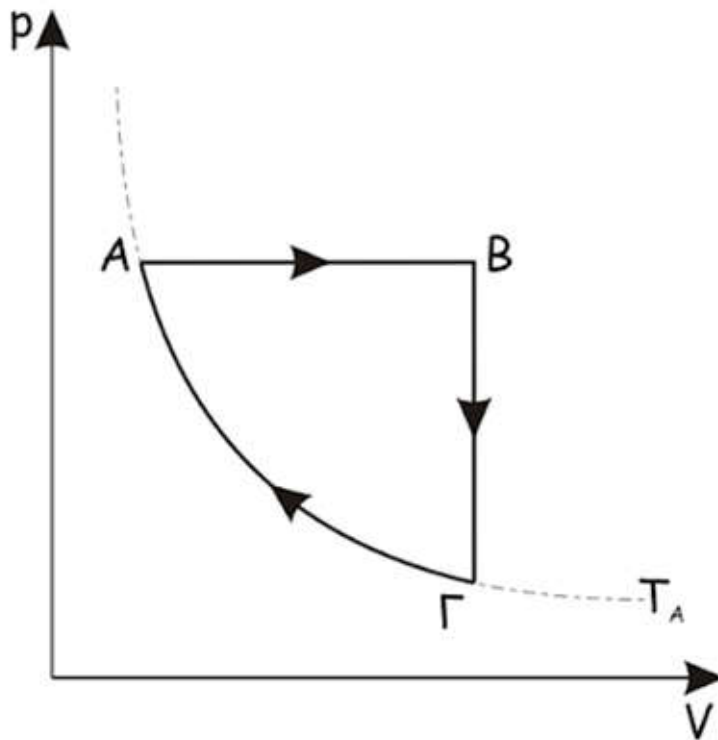
Άρα η μέγιστη πυκνότητα του αερίου είναι $d=2,66 \text{ kg/m}^3$.

γ) Το διάγραμμα p - T (ποιοτικά) φαίνεται παρακάτω:



ΑΣΚΗΣΗ 6

$n=2/R$ mol ιδανικού αερίου βρίσκονται σε κυλινδρικό δοχείο, που κλείνεται με έμβολο, ασκώντας πίεση $p_A=5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ και καταλαμβάνουν όγκο $V_A=0,8L$. Το αέριο εκτελεί τις μεταβολές που φαίνονται στο σχήμα.



α) Να βρείτε τη θερμοκρασία στην κατάσταση A.

β) Αν η θερμοκρασία στην κατάσταση B είναι $T_B=600 \text{ K}$, να βρείτε τον όγκο και την πίεση στην κατάσταση Γ.

γ) Να παραστήσετε τη μεταβολή σε διαγράμματα p - T και V - T .

ΛΥΣΗ

α) Για την κατάσταση Α ισχύει η καταστατική εξίσωση:

$$p_A V_A = n R T_A \quad \text{ή}$$

$$T_A = p_A V_A / n R \quad \text{ή}$$

$$T_A = p_A V_A / n R \quad \text{ή}$$

$$T_A = 5 \cdot 10^5 \cdot 0,8 \cdot 10^{-3} / 2/R \cdot R \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{T_A = 200 K}$$

Άρα η θερμοκρασία στην κατάσταση Α είναι $T_A = 200 \text{ K}$.

β) Η μεταβολή ΑΒ είναι ισοβαρής, επομένως ισχύει ο νόμος του Gay-Lussac:

$$V_A / T_A = V_B / T_B \quad \text{ή}$$

$$V_B = T_B \cdot V_A / T_A \quad \text{ή}$$

$$V_B = 600 \text{ K} \cdot 0,8 \text{ L} / 200 \text{ K} \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{V_B = 2,4 L}$$

Η μεταβολή ΒΓ είναι ισόχωρη, άρα ισχύει ο νόμος του Charles:

$$p_A / T_B = p_\Gamma / T_\Gamma \quad \text{ή}$$

$$p_\Gamma = T_\Gamma \cdot p_B / T_B \quad (1)$$

Όμως $T_\Gamma = T_A$, αφού η μεταβολή ΓΑ είναι ισόθερμη, επομένως η σχέση (1) δίνει:

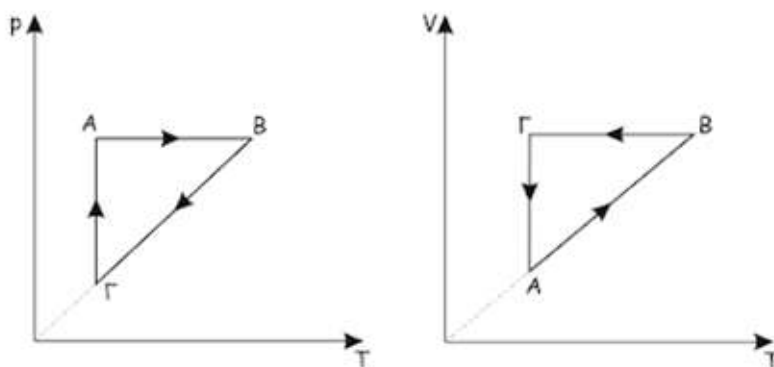
$$p_\Gamma = 5/3 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

και

$$\mathbf{V_\Gamma = V_B = 2,4 \text{ L}}$$

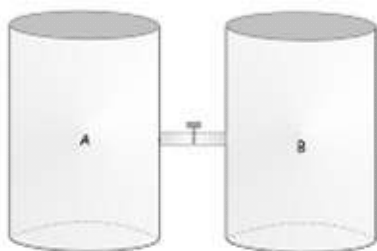
Άρα ο όγκος στην κατάσταση Γ είναι $V_\Gamma = 2,4 \text{ L}$.

γ) Τα διαγράμματα p - T και V - T φαίνονται παρακάτω:



ΑΣΚΗΣΗ 7

Δύο θερμικά μονωμένα δοχεία A και B με όγκους $V_1=1\text{ L}$ και $V_2=4\text{ L}$, συνδέονται με σωλήνα αμελητέου όγκου. Αρχικά η στρόφιγγα είναι κλειστή και στα δοχεία περιέχεται υδρογόνο ποσότητα $n_1=1/R\text{ mol}$ (δοχείο A) και $n_2=2/R\text{ mol}$ (δοχείο B). Αν η θερμοκρασία του υδρογόνου σε κάθε δοχείο είναι $T=200\text{ K}$:



- α)** Να υπολογίσετε την πίεση του υδρογόνου σε κάθε δοχείο.
β) Ανοίγουμε τη στρόφιγγα και μετά από λίγο το υδρογόνο ισορροπεί στα δύο δοχεία. Να υπολογιστεί η τελική πίεση σε κάθε δοχείο, αν είναι γνωστό πως η θερμοκρασία στην κατάσταση ισορροπίας είναι $T=200\text{ K}$.

ΛΥΣΗ

α) Για να υπολογίσουμε την αρχική πίεση του υδρογόνου σε κάθε δοχείο, εφαρμόζουμε την καταστατική εξίσωση σε κάθε δοχείο χωριστά.

Για το δοχείο A ισχύει:

$$p_1 \cdot V_1 = n_1 \cdot R \cdot T \quad \text{ή}$$

$$p_1 = n_1 \cdot R \cdot T / V_1 \quad \text{ή}$$

$$p_1 = 200\text{ atm}$$

Άρα η πίεση του υδρογόνου στο δοχείο A είναι $p_1=200\text{ atm}$.

Για το δοχείο Β ισχύει:

$$p_2 \cdot V_2 = n_2 \cdot R \cdot T \quad \text{ή}$$

$$p_2 = n_2 \cdot R \cdot T / V_2 \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{p_2 = 100 \text{ atm}}$$

Άρα η πίεση του υδρογόνου στο δοχείο Β είναι $p_2 = 100 \text{ atm}$.

β) Μόλις ανοίξουμε τη στρόφιγγα, το υδρογόνο μετακινείται από το ένα δοχείο στο άλλο, μέχρι να εξισωθεί η πίεση και στα δύο δοχεία. Ο όγκος που καταλαμβάνει το αέριο στην τελική κατάσταση είναι $V = V_1 + V_2$, η πίεση που ασκεί το αέριο είναι p και η θερμοκρασία είναι $T = 200 \text{ K}$. Ο αριθμός των moles του αερίου είναι ίδιος στην αρχική και τελική κατάσταση, δηλαδή ισχύει η αρχή διατήρησης της μάζας:

$$n_1 + n_2 = n \quad (1)$$

Από την καταστατική εξίσωση προκύπτει:

$$n_1 = p_1 \cdot V_1 / R \cdot T,$$

$$n_2 = p_2 \cdot V_2 / R \cdot T \text{ και}$$

$$n = p \cdot V / R \cdot T$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1) έχουμε:

$$p_1 \cdot V_1 / R \cdot T + p_2 \cdot V_2 / R \cdot T = p \cdot V / R \cdot T \quad \text{ή}$$

$$p_1 \cdot V_1 + p_2 \cdot V_2 = p \cdot (V_1 + V_2) \quad \text{ή}$$

$$p = (p_1 \cdot V_1 + p_2 \cdot V_2) / (V_1 + V_2) \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{p = 120 \text{ atm}}$$

Άρα η κοινή τελική πίεση σε κάθε δοχείο είναι $p = 120 \text{ atm}$.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Στην αρχή ενός ταξιδιού η θερμοκρασία των ελαστικών ενός αυτοκινήτου είναι 7°C . Κατά τη διάρκεια του ταξιδιού τα ελαστικά θερμαίνονται στους 27°C .

Αν στην αρχή του ταξιδιού ο αέρας στο εσωτερικό των ελαστικών βρισκόταν σε πίεση 3 atm , πόση θα έχει γίνει η πίεση στο τέλος του ταξιδιού;

Υποθέτουμε ότι ο όγκος των ελαστικών παραμένει αμετάβλητος.

ΛΥΣΗ

Αφού ο όγκος των ελαστικών παραμένει σταθερός, η μεταβολή είναι ισόχωρη και ισχύει:

$$p/T = \text{σταθ.}$$

Αν p_1, T_1 είναι η αρχική πίεση και θερμοκρασία και p_2, T_2 η τελική πίεση και θερμοκρασία των ελαστικών, έχουμε:

$$p_1/T_1 = p_2/T_2 \quad \text{ή}$$

$$p_2 = T_2 \cdot p_1 / T_1 \quad \text{ή}$$

$$p_2 = 300\text{K} \cdot 3 \text{ atm} / 280\text{K} \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{p_2 = 3,2 \text{ atm}}$$

Άρα στο τέλος του ταξιδιού η πίεση θα γίνει $p_2 = 3,2 \text{ atm}$.

ΑΣΚΗΣΗ 9

Να βρεθεί η πυκνότητα του αέρα μια καλοκαιρινή μέρα που η θερμοκρασία είναι 27°C . Υποθέτουμε ότι η ατμοσφαιρική πίεση είναι $1 \text{ atm} = (1,013 \times 10^5 \text{ N/m}^2)$ και ότι ο αέρας συμπεριφέρεται σαν ιδανικό αέριο με γραμμομοριακή μάζα $29 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$.

ΛΥΣΗ

Η καταστατική εξίσωση γράφεται με τη μορφή:

$$p = \rho / M \cdot R \cdot T \quad \text{ή}$$

$$\rho = p \cdot M / R \cdot T \quad \text{ή}$$

Αντικαθιστώντας στο SI έχουμε:

$$\rho = 1,013 \times 10^5 \text{ N / m}^2 \cdot 29 \times 10^{-3} \text{ kg / mol} / 8,314 \text{ J / (mol K)} \cdot 300 \text{ K}$$

$$\mathbf{\rho = 1,18 \text{ kg / m}^3}$$

Άρα η πυκνότητα του αέρα μια καλοκαιρινή μέρα είναι $\rho = 1,18 \text{ kg / m}^3$

ΑΣΚΗΣΗ 10

0,2 mol H₂ βρίσκονται σε δοχείο με κινητό έμβολο σε θερμοκρασία T₁=300 K και πίεση 2 atm (κατάσταση Α). Διατηρώντας σταθερή την πίεσή του θερμαίνουμε το αέριο μέχρις ότου η θερμοκρασία του γίνει T₂=400 K (κατάσταση Β). Στη συνέχεια το αέριο εκτονώνεται ισόθερμα μέχρις ότου η πίεσή του γίνει ίση με 1,5 atm (κατάσταση Γ) και μετά ψύχεται με σταθερό όγκο μέχρι η θερμοκρασία του να γίνει T₁=300 K (κατάσταση Δ). Τέλος, το αέριο συμπιέζεται ισόθερμα μέχρι να φτάσει στην αρχική του κατάσταση.

Να βρείτε τις τιμές του όγκου της πίεσης, και της θερμοκρασίας που αντιστοιχούν στις καταστάσεις Α, Β, Γ και Δ και να αποδώσετε την παραπάνω διαδικασία σε διαγράμματα με άξονες P-V, P-T, και V-T. Δίνεται η τιμή της σταθεράς R=0,082 L·atm/ mol·K

ΛΥΣΗ

Α) Στην κατάσταση Α, το αέριο έχει πίεση **p_A=2 atm** και **T_A=300 K**. Τον όγκο του αερίου μπορούμε να τον υπολογίσουμε από την καταστατική εξίσωση.

$$p_A \cdot V_A = n \cdot R \cdot T_A \quad \text{ή}$$

$$V_A = n \cdot R \cdot T_A / p_A \quad \text{ή}$$

$$V_A = 0,2 \text{ mol} \cdot 0,082 \text{ L} \cdot \text{atm} / (\text{mol} \cdot \text{K}) \cdot 300 \text{ K} / 2 \text{ atm} \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{V_A = 2,46 \text{ L.}}$$

Άρα στην κατάσταση Α, το αέριο έχει πίεση p_A=2 atm, θερμοκρασία T_A=300 K και όγκο V_A = 2,46 L.

Β) Στην κατάσταση Β, το αέριο έχει πίεση **p_B=p_A=2 atm** και θερμοκρασία **T_B=400 K**. Ο όγκος του υπολογίζεται από τη σχέση:

$$V_A / T_A = V_B / T_B \quad \text{ή}$$

$$V_B = T_B \cdot V_A / T_A \quad \text{ή}$$

$$V_B = 400 \text{ K} \cdot 2,46 \text{ L} / 300 \text{ K} \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{V_B = 3,28 \text{ L}}$$

Άρα στην κατάσταση Β, το αέριο έχει πίεση p_B=2 atm, θερμοκρασία T_B=400 K και όγκο V_B = 3,28 L.

Γ) Στην κατάσταση Γ, το αέριο έχει θερμοκρασία **T_Γ=400 K** και πίεση **p_Γ=1,5 atm**. Ο όγκος του υπολογίζεται από τη σχέση:

$$p_B \cdot V_B = p_\Gamma \cdot V_\Gamma \quad \text{ή}$$

$$V_\Gamma = p_B \cdot V_B / p_\Gamma \quad \text{ή}$$

$$V_\Gamma = 2 \text{ atm} \cdot 3,28 \text{ L} / 1,5 \text{ atm} \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{V_\Gamma = 4,37 \text{ L}}$$

Άρα στην κατάσταση Γ, το αέριο έχει πίεση $p_\Gamma = 1,5 \text{ atm}$, θερμοκρασία $T_\Gamma = 400 \text{ K}$ και όγκο $V_\Gamma = 4,37 \text{ L}$.

Δ) Στην κατάσταση Δ, το αέριο έχει θερμοκρασία $T_\Delta = 300 \text{ K}$ και όγκο $V_\Delta = V_\Gamma = 4,37 \text{ L}$.

Ο πίεσή του υπολογίζεται από τη σχέση:

$$p_\Delta / T_\Delta = p_\Gamma / T_\Gamma \quad \text{ή}$$

$$p_\Delta = T_\Delta \cdot p_\Gamma / T_\Gamma \quad \text{ή}$$

$$p_\Delta = 300 \text{ K} \cdot 1,5 \text{ atm} / 400 \text{ K} \quad \text{ή}$$

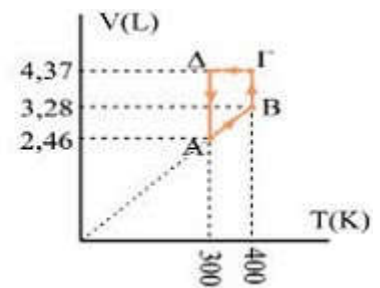
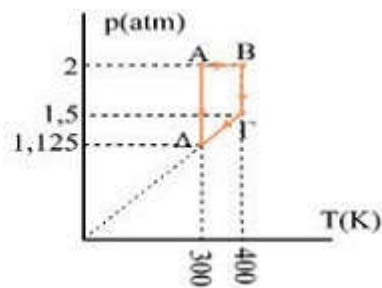
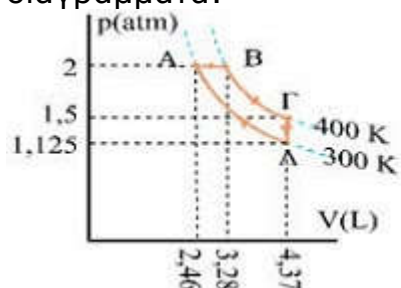
$$\mathbf{p_\Delta = 1,125 \text{ atm.}}$$

Άρα στην κατάσταση Δ, το αέριο έχει πίεση $p_\Delta = 1,125 \text{ atm}$, θερμοκρασία $T_\Delta = 300 \text{ K}$ και όγκο $V_\Delta = 4,37 \text{ L}$.

Οι τιμές που βρήκαμε φαίνονται συγκεντρωτικά στον πίνακα:

	p(atm)	V(L)	T(K)
A	2	2,46	300
B	2	3,28	400
Γ	1,5	4,37	400
Δ	1,125	4,37	300

Με βάση τις τιμές του πίνακα μπορούμε να κατασκευάσουμε τα διαγράμματα:



ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ιδανικό αέριο βρίσκεται σε κυλινδρικό δοχείο, το ένα άκρο του οποίου κλείνεται με έμβολο εμβαδού $A=20 \text{ cm}^2$, το οποίο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Η ατμοσφαιρική πίεση είναι $p_{\text{atm}}=1 \text{ atm}$ και η θερμοκρασία του αερίου είναι $T_1=300 \text{ K}$. Αρχικά το έμβολο ισορροπεί σε απόσταση $d_1=10 \text{ cm}$ από το άλλο άκρο του δοχείου. Θερμαίνουμε κατόπιν το αέριο και το έμβολο μετατοπίζεται αργά και ισορροπεί σε νέα θέση, που απέχει απόσταση $d_2=40 \text{ cm}$ από το άλλο άκρο του δοχείου.

α) Να υπολογίσετε τον αριθμό των μορίων του αερίου.

β) Να βρείτε το πηλίκο των ενεργών ταχυτήτων των μορίων του αερίου στην αρχική και τελική κατάσταση.

γ) Να βρείτε τη μεταβολή της μέσης κινητικής ενέργειας των μορίων του αερίου.

Οι σταθερές k, R θεωρούνται γνωστές.

ΛΥΣΗ

α) Ο αρχικός όγκος του αερίου είναι:

$$V_1 = A \cdot d_1 \quad \text{ή}$$

$$V_1 = 200 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

Το έμβολο αρχικά ισορροπεί, άρα η πίεση του αερίου είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση ($p_{\text{atm}}=p_1$), δηλαδή:

$$p_1 = 10^5 \text{ N/m}^2$$

Από την καταστατική εξίσωση έχουμε ότι:

$$p_1 \cdot V_1 = N \cdot k \cdot T_1 \quad \text{ή}$$

$$N = p_1 \cdot V_1 / k \cdot T_1 \quad \text{ή}$$

$$N = 0,48 \cdot 10^{22} \text{ μόρια}$$

Άρα ο αριθμός των μορίων του αερίου είναι $N = 0,48 \cdot 10^{22}$ μόρια.

β) Στη διάρκεια της μεταβολής, η πίεση παραμένει σταθερή και ίση με την ατμοσφαιρική πίεση, επομένως το αέριο υφίσταται ισοβαρή

θέρμανση και ισχύει ο νόμος του Gay-Lussac:

$$V_1/T_1 = V_2/T_2 \quad \text{ή}$$

$$A \cdot d_1/T_1 = A \cdot d_2/T_2 \quad \text{ή}$$

$$T_2 = d_2 \cdot T_1 / d_1 \quad \text{ή}$$

$$T_2 = 1200\text{K}$$

Το πηλίκο των τετραγώνων των ενεργών ταχυτήτων στην αρχική και την τελική κατάσταση είναι:

$$u_{\text{εν}1}^2 / u_{\text{εν}2}^2 = 3kT_1/m / 3kT_2/m \quad \text{ή}$$

$$u_{\text{εν}1}^2 / u_{\text{εν}2}^2 = T_1/T_2 \quad \text{ή}$$

$$u_{\text{εν}1}^2 / u_{\text{εν}2}^2 = 300\text{K}/1200\text{K} \quad \text{ή}$$

$$u_{\text{εν}1}^2 / u_{\text{εν}2}^2 = 1/4 \quad \text{ή}$$

$$u_{\text{εν}1} / u_{\text{εν}2} = 1/2$$

Άρα το πηλίκο των ενεργών ταχυτήτων των μορίων του αερίου στην αρχική και τελική κατάσταση είναι $u_{\text{εν}1} / u_{\text{εν}2} = 1/2$.

γ) Η μεταβολή της μέσης κινητικής ενέργειας είναι:

$$\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} \quad \text{ή}$$

$$\Delta E_k = 3/2 \cdot k \cdot T_2 - 3/2 \cdot k \cdot T_1 \quad \text{ή}$$

$$\Delta E_k = 1863 \cdot 10^{-23} \text{ J}$$

Άρα η μεταβολή της μέσης κινητικής ενέργειας των μορίων του αερίου είναι $\Delta E_k = 1863 \cdot 10^{-23} \text{ J}$.

ΤΑ ΠΡΩΤΑ ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να βρεθεί η ενεργός ταχύτητα των μορίων του υδρογόνου σε θερμοκρασία 27 °C.

Δίνεται ότι η γραμμομοριακή μάζα του υδρογόνου είναι $2 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$.

ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι:

$$v_{\text{av}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή του υπόρριζου με τον αριθμό Αβογάδρου (N_A) προκύπτει:

$$v_{\text{av}} = \sqrt{\frac{3kN_A T}{N_A m}}$$

Όμως:

$$k = R/N_A$$

επομένως

$$k \cdot N_A = R \text{ και}$$

$$N_A \cdot m = M$$

(M : η γραμμομοριακή μάζα)

Άρα:

$$v_{\text{av}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Στο SI:

$$v_{\text{av}} = \sqrt{\frac{3 \cdot (8,314 \text{ J/mol K}) \cdot (273 + 27) \text{ K}}{2 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}}}$$

ή

$$u_{\text{εν}} = 1,93 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Άρα η ενεργός ταχύτητα των μορίων του υδρογόνου σε θερμοκρασία 27 °C είναι $u_{\text{εν}} = 1,93 \times 10^3 \text{ m/s}$.

Η ταχύτητα αυτή είναι πολύ μεγάλη, είναι περίπου **6900 km/h**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

ΝΟΜΟΙ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Αέριο έχει αρχικό όγκο $0,5 \text{ m}^3$, πίεση 1 atm και θερμοκρασία 300 K . Συμπιέζουμε το αέριο στο $1/5$ του αρχικού του όγκου και παρατηρούμε ότι η θερμοκρασία του γίνεται 900 K .

α) Να υπολογιστεί η νέα πίεση P_2 του αερίου.

β) Στη συνέχεια εκτονώνουμε το αέριο ώστε η πίεση να γίνει $1,5 \text{ atm}$ και ο όγκος του $0,4 \text{ m}^3$.

Πόση είναι η τελική θερμοκρασία του αερίου T ;

ΛΥΣΗ

α) $P_2 = 15 \text{ atm}$

β) $T_3 = 360 \text{ K}$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Η πίεση μιας ποσότητας αερίου είναι 3 atm όταν βρίσκεται σε θερμοκρασία 300 K .

Πόση θα γίνει η πίεση του αερίου σε atm , αν η θερμοκρασία ανέβει στους 400 K υπό σταθερό όγκο;

Να παρασταθεί η μεταβολή σε διαγράμματα $(P-V)$, $(P-T)$, $(V-T)$.

ΛΥΣΗ

$P = 4 \text{ atm}$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Ποσότητα ιδανικού αερίου είναι εγκλωβισμένη σε μπαλόνι και βρίσκεται μέσα στη θάλασσα συμπιεσμένο έτσι ώστε η πίεση του αερίου να είναι $3,6 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$. Μειώνουμε την πίεση χωρίς να μεταβάλλουμε την ποσότητα του αερίου μέσα στο μπαλόνι και παρατηρούμε ότι ο όγκος του αυξάνεται κατά 20% σε σχέση με

τον αρχικό. Αν το αέριο βρίσκεται συνεχώς σε θερμική ισορροπία με το θαλασσινό νερό, πόση είναι η τελική πίεση του αερίου;

ΛΥΣΗ

$$p = 3 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Ιδανικό αέριο περιέχεται σε κυλινδρικό δοχείο του οποίου το πάνω μέρος είναι κινητό έμβολο το οποίο σε θερμοκρασία $T_1 = 200 \text{ K}$ ισορροπεί σε ύψος $h_1 = 20 \text{ cm}$ πάνω από τον πυθμένα του δοχείου. Ψύχουμε το αέριο ώστε η θερμοκρασία του γίνει $T_2 = 100 \text{ K}$ και παρατηρούμε ότι το έμβολο ισορροπεί και πάλι σε νέα θέση.

α) Ποιο θα είναι το νέο ύψος, h_2 που θα ισορροπήσει το έμβολο από τον πυθμένα του δοχείου; Ο όγκος του δοχείου είναι $V = h, A$ όπου A το εμβαδόν της βάσης του.

β) Να παρασταθεί η μεταβολή σε ποιοτικά διαγράμματα ($P-V$) και ($V-T$).

ΛΥΣΗ

$$h_2 = 10 \text{ cm}$$

ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΩΝ ΙΔΑΝΙΚΩΝ ΑΕΡΙΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Για μια ποσότητα ιδανικού αερίου σε θερμοκρασία $T = 400 \text{ K}$ και πίεση $P = 8,31 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ η πυκνότητα είναι $\rho = 1 \text{ Kgr/m}^3$.

Να βρείτε μοριακό βάρος του αερίου δίνεται $R = 8,31 \text{ J/mole} \cdot \text{K}$

ΛΥΣΗ

$$M \cdot B = 4$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ποσότητα $n \text{ mol}$ ηλίου (He) έχει όγκο $8,31 \text{ L}$ και βρίσκεται υπό πίεση $3 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ και θερμοκρασία 27°C .

α) Πόσα είναι τα mol και πόση είναι η μάζα του αερίου σε kg .

β) Πόση θα γίνει η πίεση της ίδιας ποσότητας ηλίου, αν η θερμοκρασία αυξηθεί κατά 100 K και ο όγκος διπλασιαστεί; Δίνεται για το ήλιο $M_r = 4$ και $R = 8,31 \text{ J/mole} \cdot \text{K}$.

ΛΥΣΗ

- α)** $n=1 \text{ mol}, m= 4 \cdot 10^{-3} \text{ kg},$
β) $2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Ποσότητα $n=100 \text{ mol}$ ιδανικού αερίου έχει όγκο V , θερμοκρασία T και ασκεί στα τοιχώματα του δοχείου πίεση P .
Πόση ποσότητα του ίδιου αερίου έπρεπε να είχαμε σε διπλάσιο όγκο και σε τετραπλάσια θερμοκρασία ώστε να ασκούσε την ίδια πίεση P ;

ΛΥΣΗ

$$n=50 \text{ mol}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Ποσότητα $n \text{ mol}$ ηλίου (He) έχει όγκο $8,31 \text{ L}$ και βρίσκεται υπό πίεση $3 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ και θερμοκρασία 27°C .

- α)** Πόσα είναι τα mol και πόση είναι η μάζα του αερίου σε kg .
β) Πόση θα γίνει η πίεση της ίδιας ποσότητας ηλίου, αν η θερμοκρασία αυξηθεί κατά 100 K και ο όγκος διπλασιαστεί; Δίνεται για το ήλιο $M_r=4$ και $R=8,31 \text{ J/mole}\cdot\text{K}$.

ΛΥΣΗ

- α)** $n=1 \text{ mol}, m= 4 \cdot 10^{-3} \text{ kg},$
β) $2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Υπό ποια πίεση βρίσκονται 16 g O_2 , όγκου 2 L , θερμοκρασίας 27°C .
Δίνεται η γραμμομοριακή μάζα του O_2 ίση με 32 g/mole και $R=0,082 \text{ L}\cdot\text{atm/mole}\cdot\text{K}$.

ΛΥΣΗ

$$P=6,15 \text{ atm}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Ποσότητα $n=100 \text{ mol}$ ιδανικού αερίου έχει όγκο V , θερμοκρασία T και ασκεί στα τοιχώματα του δοχείου πίεση P .
Πόση ποσότητα του ίδιου αερίου έπρεπε να είχαμε σε διπλάσιο όγκο και σε τετραπλάσια θερμοκρασία ώστε να ασκούσε την ίδια πίεση P ;

ΛΥΣΗ

$$n=50 \text{ mol}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Να υπολογιστεί η πυκνότητα ποσότητας H_2 σε θερμοκρασία $T=400K$ πίεση $P=10^5 \text{ N/m}^2$, αν δίνεται η γραμμομοριακή του μάζα 2 g/mole και $R=8,31 \text{ J/mol}\cdot K$.

Κατά πόσο θα μεταβληθεί η πυκνότητα της ίδιας ποσότητας αερίου, αν διπλασιάσουμε τη θερμοκρασία υπό σταθερή πίεση;

ΛΥΣΗ

$$\rho=0,06 \text{ kg/m}^3,$$

υποδιπλασιάζεται

ΑΣΚΗΣΗ 8

Για μια ποσότητα ιδανικού αερίου γνωρίζουμε την πίεση $P=8,31\cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ και ότι σε κάθε cm^3 υπάρχουν $2\cdot 10^4$ NA μόρια.

Να βρείτε την θερμοκρασία του αερίου δίνεται $R=8,31 \text{ J/mole}\cdot K$ και ότι NA ο αριθμός του Avogandro

ΛΥΣΗ

$$T=500 \text{ K}$$

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΝΟΜΟΙ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Μια ποσότητα αερίου βρίσκεται σε δοχείο που κλείνεται με έμβολο βάρους 20 N και εμβαδού $A=10 \text{ cm}^2$. Όταν το δοχείο είναι οριζόντιο το έμβολο απέχει κατά 24 cm από την βάση του δοχείου. Όταν γυρίσουμε όρθιο το δοχείο (με σταθερή θερμοκρασία), πόσο θα απέχει το έμβολο από την βάση;
 $P_{\text{ατμ}}=10^5 \text{ N/m}^2$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Μια ποσότητα $n=2/R \text{ mol}$ βρίσκεται σε δοχείο που κλείνεται με έμβολο βάρους 60 N και εμβαδού $A=3 \text{ cm}$ σε θερμοκρασία $T=300 \text{ K}$.

α) Αν το δοχείο είναι οριζόντιο, πόσο θα μετακινηθεί το έμβολο κατά τη θέρμανση του αερίου, μέχρι να διπλασιαστεί η απόλυτη θερμοκρασία του;

β) Πόσο θα μετακινηθεί το έμβολο αν το δοχείο είναι κατακόρυφο και θερμάνουμε το αέριο μέχρι διπλασιασμού της απόλυτης θερμοκρασίας του αερίου;

ΑΣΚΗΣΗ 3

Μια ποσότητα αερίου βρίσκεται σε δοχείο που κλείνεται με έμβολο εμβαδού 10 cm^2 και μάζας 2 kg . Η θερμοκρασία του αερίου είναι 27°C . Θερμαίνουμε το αέριο και για να μην μετακινείται το έμβολο ρίχνουμε πάνω του αργά-αργά άμμο. Σε μια στιγμή έχουμε προσθέσει 2 kg άμμου.

Ποια είναι η θερμοκρασία του αερίου τη στιγμή αυτή;

Δίνονται: $p_{\text{ατμ}} = 10^5 \text{ N/m}^2$, $g = 10 \text{ m/s}^2$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Ένα δοχείο χωρίζεται με διάφραγμα, το οποίο έχει μια μικρή τρύπα, σε δύο μέρη με όγκους V και $3V$ και περιέχει αέριο στους 27°C . Θερμαίνουμε το αριστερό μέρος του δοχείου στους 127°C .

Ποια θερμοκρασία πρέπει να αποκτήσει το δεξιό μέρος του δοχείου ώστε η πίεση να παραμείνει σταθερή.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Ένα δοχείο που περιέχει αέρα έχει μια μικρή οπή και επικοινωνεί με την ατμόσφαιρα. Αν θερμάνουμε το δοχείο στους 127°C , να υπολογιστεί το % ποσοστό των μορίων που θα διαφύγει στην ατμόσφαιρα.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου βρίσκεται μέσα σε κυλινδρικό δοχείο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το δοχείο κλείνεται από το ένα μέρος του με έμβολο, το οποίο μπορεί να κινείται ελεύθερο χωρίς τριβές. Αν το αέριο έχει αρχικά θερμοκρασία $\theta_1 = 27^\circ \text{C}$ και το έμβολο ισορροπεί σε απόσταση $d_1 = 30 \text{ cm}$ από τη βάση του κυλίνδρου και η ατμοσφαιρική πίεση είναι $p_{\text{ατμ}} = 1 \text{ atm}$, να βρείτε:

α) την πίεση του αερίου

β) αν θερμάνουμε το αέριο πολύ αργά μέχρι να αποκτήσει θερμοκρασία $\theta_2 = 127^\circ \text{C}$, να υπολογίσετε την νέα απόσταση d_2 που θα απέχει το έμβολο από τη βάση του δοχείου.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Δοχείο με όγκο 2 L περιέχει αέρα με πίεση 1 atm και θερμοκρασία $\theta=27\text{ }^{\circ}\text{C}$. Θερμαίνουμε το δοχείο ώσπου η πίεση να φτάσει στις 5 atm.

α) Πόση θα είναι τότε η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου; Να υποθεθεί ότι ο όγκος του δοχείου παραμένει σταθερός.

β) Αν η θερμοκρασία διατηρηθεί σταθερή στην τιμή του προηγούμενου ερωτήματος και το αέριο αφεθεί να διασταλεί, πόσος θα είναι ο όγκος όταν η πίεση επανέλθει στην τιμή 1 atm;

ΑΣΚΗΣΗ 8

Κατακόρυφος κύλινδρος περιέχει αέρα και κλείνεται αεροστεγώς με έμβολο, που μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές. Το έμβολο έχει βάρος $W=4\text{ N}$ και εμβαδόν διατομής $A=20\text{ cm}^2$.

α) Αν $p_0=1\text{ atm}$ να βρεθεί η πίεση του αέρα στον κύλινδρο.

β) Αν στο σχήμα αρχικά είναι $x=20\text{ cm}$, κατά πόσο θα κατέβει το έμβολο αν πάνω του τοποθετήσουμε πρόσθετο βάρος $W_1=2\text{ N}$;

γ) Σε ποια θερμοκρασία πρέπει να φέρουμε το αέριο ώστε το έμβολο να επανέλθει στην αρχική του θέση; Δίνεται $1\text{ atm}=10^5\text{ N/m}^2$

ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΩΝ ΙΔΑΝΙΚΩΝ ΑΕΡΙΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Υπό ποια πίεση βρίσκονται 16 g O_2 , όγκου 2 L, θερμοκρασίας $27\text{ }^{\circ}\text{C}$; Δίνεται η γραμμομοριακή μάζα του O_2 ίση με 32 g/mole και $R=0,082\text{ L}\cdot\text{atm/mole}\cdot\text{K}$. $P=6,15\text{ atm}$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ποσότητα ιδανικού αερίου αρχικής θερμοκρασίας $\theta_1=27\text{ }^{\circ}\text{C}$ εκτονώνεται ισοβαρώς από όγκο V σε όγκο $4\cdot V$. Να υπολογιστεί η τελική θερμοκρασία του αερίου σε K. Να παρασταθεί η μεταβολή σε διαγράμματα $(P-V)$, $(P-T)$, $(V-T)$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Ποσότητα H_2 βρίσκεται μέσα σε κυλινδρικό που κλείνεται με έμβολο, το οποίο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Η πίεση του αερίου είναι $p_1=8,2\text{ atm}$, ο όγκος του είναι $V_1=20\text{ L}$ και η θερμοκρασία $T_1=300\text{ K}$.

α) Να υπολογιστεί ο αριθμός των moles του αερίου

β) Εισάγουμε στο δοχείο ορισμένη ποσότητα H_2 και παρατηρούμε ότι ο όγκος του αερίου διπλασιάζεται, η θερμοκρασία γίνεται $T_2=500\text{ K}$, ενώ η πίεση παραμένει σταθερή.

Να υπολογιστεί η μάζα του H_2 που εισάγαμε στο δοχείο.

Δίνονται: $R=0,082\text{ L}\cdot\text{atm/mol}\cdot\text{K}$ και $M_B(H_2)=2$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Το κλειστό δοχείο του σχήματος χωρίζεται σε δύο μέρη με λεπτό έμβολο, το οποίο ισορροπεί. Στο αριστερό μέρος υπάρχει ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου σε θερμοκρασία $\theta_1=27^\circ\text{C}$, ενώ στο δεξιό μέρος υπάρχει ίση ποσότητα του ίδιου αερίου σε θερμοκρασία $\theta_2=127^\circ\text{C}$. Αν ο συνολικός όγκος του δοχείου είναι $V=7\text{ L}$, να υπολογίσετε τους όγκους V_1 και V_2 .

ΑΣΚΗΣΗ 5

Ο όγκος $n\text{ mol}$ αερίου είναι V_1 και βρίσκεται υπό πίεση P_1 . Το αέριο συμπιέζεται υπό σταθερή θερμοκρασία T_1 μέχρι υποδιπλασιασμού του αρχικού του όγκου.

α) Να υπολογιστεί η τελική τιμή της πίεσης του αερίου.

β) Αν πραγματοποιήσουμε το προηγούμενο πείραμα χρησιμοποιώντας $n/2\text{ mol}$ από το αέριο με ίδιο όγκο και θερμοκρασία, ποια θα είναι η τελική πίεση του αερίου;

γ) Να παρασταθούν οι πειραματικές διαδικασίες των ερωτημάτων (α) και (β) σε κοινό διάγραμμα $P-V$.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Ποσότητα $n=10/R\text{ mol}$ ιδανικού αερίου κλείνεται σε κατακόρυφο κυλινδρικό δοχείο από έμβολο βάρους $B=400\text{ N}$ και διατομής $S=20\text{ cm}^2$. Η θερμοκρασία του αερίου είναι $T_1=300\text{ K}$. Το αέριο εκτονώνεται πολύ αργά υπό σταθερή πίεση μέχρι διπλασιασμού του όγκου του και στη συνέχεια συμπιέζεται υπό σταθερή θερμοκρασία μέχρι τον αρχικό του όγκο.

Να υπολογιστούν :

α) Ο αρχικός όγκος του αερίου.

β) Η τελική πίεση και θερμοκρασία του.

Δίνεται η ατμοσφαιρική πίεση $P_0=1\text{ atm}$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Μια ποσότητα $n=0,2$ mol ιδανικού αερίου, το οποίο έχει όγκο $V_1=4$ L σε θερμοκρασία $T_1=300$ K, παθαίνει τις εξής διαδοχικές αντιστρεπτές μεταβολές:

- (1) θερμαίνεται ισόχωρα σε θερμοκρασία $T_2=400$ K,
- (2) εκτονώνεται ισοβαρώς σε θερμοκρασία $T_3=500$ K.

Ζητούνται:

- α)** Ο τελικός όγκος του αερίου.
- β)** Τα διαγράμματα $P-V$, $P-T$, $V-T$.

ΑΣΚΗΣΗ 8

$4/R$ mole ιδανικού αερίου, βρίσκονται σε θερμοκρασία $T=300$ K και πίεση $P=1$ atm. Διπλασιάζουμε την πίεση του αερίου ενώ ο όγκος του αερίου μένει σταθερός, στη συνέχεια τετραπλασιάζουμε όγκο του αερίου διατηρώντας σταθερή τη θερμοκρασία του αερίου και τέλος υποδιπλασιάζουμε τον όγκο του αερίου διατηρώντας σταθερή την πίεσή του αερίου.

- α)** Να βρεθούν οι τελικές τιμές πίεσης, όγκου και θερμοκρασίας του αερίου.
- β)** Να αποδώσετε την παραπάνω μεταβολή του αερίου σε διάγραμμα $P-V$ και διάγραμμα $P-T$.

ΑΣΚΗΣΗ 9

$4/R$ mole ιδανικού αερίου, βρίσκονται σε θερμοκρασία $T=400$ K και πίεση $P=2$ atm. Διπλασιάζουμε τον όγκο του αερίου ενώ η θερμοκρασία του αερίου μένει σταθερή, στη συνέχεια τετραπλασιάζουμε την πίεση του αερίου διατηρώντας σταθερό τον όγκο του αερίου.

- α)** Να βρεθούν οι τελικές τιμές πίεσης, όγκου και θερμοκρασίας του αερίου.
- β)** Να αποδώσετε την παραπάνω μεταβολή του αερίου σε διάγραμμα $P-V$ και διάγραμμα $P-T$.

ΑΣΚΗΣΗ 10

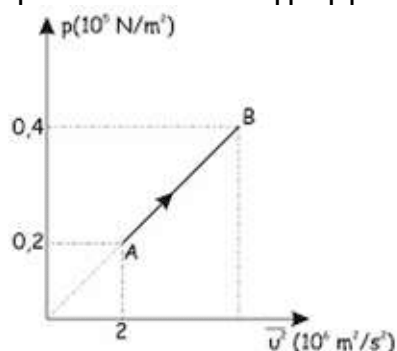
Ποσότητα ιδανικού αερίου $2n=R$ mol και όγκου V_1 βρίσκεται σε θερμοκρασία $\theta_1=127^\circ\text{C}$ και σε πίεση $p_1=4\times 10^5\text{ N/m}^2$. Διπλασιάζουμε την πίεση του αερίου διατηρώντας σταθερή τη θερμοκρασία του και στη συνέχεια ψύχουμε το αέριο στους $\theta_2=27^\circ\text{C}$ διατηρώντας τον όγκο του σταθερό. Να υπολογίσετε:

- α)** τον αρχικό όγκο V_1 του αερίου.
- β)** τον τελικό όγκο V_T του αερίου.
- γ)** την τελική πίεση p_T του αερίου.

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ-ΤΑ ΠΡΩΤΑ ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ποσότητα $n=2/R$ mol ιδανικού αερίου (R : παγκόσμια σταθερά των ιδανικών αερίων σε $\text{J/mol}\cdot\text{K}$) υποβάλλεται στη μεταβολή που φαίνεται στο διάγραμμα.



- α)** Να χαρακτηρίσετε το είδος της κάθε μεταβολής.
- β)** Να υπολογίσετε την ενεργό ταχύτητα των μορίων του αερίου στην τελική κατάσταση.
- γ)** Να υπολογίσετε τον όγκο του αερίου στην αρχική κατάσταση. Δίνονται: $3R=25\text{ J/(mol}\cdot\text{K)}$ και η γραμμομοριακή μάζα του αερίου $M=2\text{ g/mol}$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Οριζόντιος κυλινδρικός σωλήνας κλειστός στα δύο άκρα του, χωρίζεται σε δύο διαμερίσματα με αγωγίμο έμβολο. Στο ένα διαμέρισμα περιέχεται οξυγόνο και στο άλλο υδρογόνο. Αν για το O_2 $v_{\text{rms}}=1000\text{ m/s}$ να βρείτε την ενεργό ταχύτητα των μορίων του H_2 .

Δίνονται τα Α.Β. $H=1, O=16$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να βρείτε την τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής των τετραγώνων των ταχυτήτων για ένα αέριο σε θερμοκρασία $T_1=300\text{ K}$ και $T_2=400\text{ K}$.

Δίνονται η πίεση $P_1=1\text{ atm}$ και η πυκνότητα $\rho=15/8\text{ kg/m}^3$ για την θερμοκρασία T_1 .

ΑΣΚΗΣΗ 4

Σε δοχείο όγκου V περιέχονται N μόρια He με τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής των τετραγώνων των ταχυτήτων του (ενεργό ταχύτητα) 200 m/s και σε άλλο δοχείο, ίδιου όγκου περιέχονται N μόρια H_2 με την ίδια ενεργό ταχύτητα.

Ποιο αέριο έχει μεγαλύτερη θερμοκρασία, μεγαλύτερη εσωτερική ενέργεια και ασκεί μεγαλύτερη πίεση;

ΑΣΚΗΣΗ 5

Σε δοχείο που κλείνεται με έμβολο περιέχονται $N=3 \times 10^{23}$ μόρια H_2 .

Ζητούνται:

α) Η μέση κινητική ενέργεια των μορίων του αερίου και η απόλυτη θερμοκρασία του αερίου στην κατάσταση Α.

β) Η θερμοκρασία στην κατάσταση Β.

γ) Η ενεργός ταχύτητα των μορίων στις καταστάσεις Α, Β και Γ.

Δίνονται $N_A=6 \times 10^{23}$ μόρια/mol, $R=8,314\text{ J/mol K}$ και η γραμμομοριακή μάζα του H_2 $M=4 \times 10^{-3}\text{ kg/mol}$.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Σε δοχείο όγκου 2 L περιέχεται ήλιο υπό πίεση $0,1\text{ N/m}^2$ και θερμοκρασία 300 K .

Α) Πόσα μόρια περιέχονται στο δοχείο;

Β) Βρείτε την ενεργό ταχύτητα των μορίων.

Γ) Συμπιέζουμε το αέριο ώστε να αποκτήσει όγκο 1 L .

Πόση θα είναι τώρα η ενεργός ταχύτητα των μορίων, αν η συμπίεση γίνει:

α) Υπό σταθερή πίεση

β) Με σταθερή θερμοκρασία.

Δίνονται $R=8,314\text{ J/mol K}$, $N_A=6 \times 10^{23}$ μόρια/mol και $M_{He}=4 \times 10^{-3}\text{ kg/mol}$.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Δυο δοχεία Α,Β με όγκους V και $2V$ αντίστοιχα επικοινωνούν με λεπτό σωλήνα που κλείνεται με στρόφιγγα. Τα δοχεία περιέχουν Ήλιο, το μεν Α σε πίεση 1 atm και θερμοκρασία 300 K , το δε Β σε πίεση 2 atm και θερμοκρασία 400 K . Ανοίγουμε τη στρόφιγγα οπότε μετά την αποκατάσταση θερμικής ισορροπίας η πίεση του αερίου στα δοχεία γίνεται ίση με $p_{\text{τελ}} = 1,6 \text{ atm}$.

Να βρεθούν για την τελική κατάσταση..

α) Η θερμοκρασία και η μέση κινητική ενέργεια των μορίων του αερίου.

β) Η ενεργός ταχύτητα των μορίων.

$R = 8,31 \text{ J/mol K}$ και $N_A = 6 \times 10^{23} \text{ μόρια/mol}$ και $M_{\text{He}} = 4 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Για μια ποσότητα ιδανικού αερίου σε θερμοκρασία $T = 300 \text{ K}$ και πίεση $P = 4 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ η πυκνότητα του είναι $\rho = 0,3 \text{ Kg/m}^3$. Να βρείτε την ενεργό ταχύτητα των μορίων του αερίου σε θερμοκρασία $T' = 1200 \text{ K}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ Β ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΠΡΩΤΟΣ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΝΟΜΟΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου καταλαμβάνει όγκο $V_1 = 10 \text{ L}$ σε πίεση $p_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$. Το αέριο υποβάλλεται σε ισόθερμη αντιστρεπτή εκτόνωση μέχρι να υποδιπλασιαστεί η πίεση του. Να υπολογίσετε:

α) Τον τελικό όγκο του αερίου.

β) Τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου.

γ) Το ποσό της θερμότητας που απορρόφησε το αέριο.

Δίνεται: $\ln = 0,7$.

ΛΥΣΗ

α) Έστω V_2 ο τελικός όγκος και p_2 η τελική πίεση του αερίου. Πρέπει να είναι:

$$p_2 = p_1/2$$

Από το νόμο της ισόθερμης μεταβολής έχουμε:

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 \quad \text{ή}$$

$$p_1 \cdot V_1 = p_1/2 \cdot V_2 \quad \text{ή}$$

$$V_2 = 2 \cdot V_1 \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{V_2 = 20L}$$

Άρα ο τελικός όγκος του αερίου είναι $V_2 = 20L$.

β) Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι η εσωτερική ενέργεια ποσότητας ιδανικού αερίου εξαρτάται μόνον από τη θερμοκρασία του. Επειδή στην ισόθερμη μεταβολή η θερμοκρασία του αερίου παραμένει σταθερή, θα παραμείνει σταθερή και η εσωτερική του ενέργεια. Συνεπώς έχουμε:

$$\mathbf{\Delta U = 0}$$

Άρα η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου είναι $\Delta U = 0$.

γ) Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι το ποσό της θερμότητας Q που απορρόφησε το αέριο δίνεται από τη σχέση:

$$Q = n \cdot R \cdot T \cdot \ln V_2/V_1$$

όπου:

n ο αριθμός των moles και

T η απόλυτη θερμοκρασία του αερίου.

Από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων για την αρχική κατάσταση του αερίου, έχουμε:

$$p_1 \cdot V_1 = n \cdot R \cdot T$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε:

$$Q = p_1 \cdot V_1 \cdot \ln V_2/V_1 \quad \text{ή}$$

$$Q = 2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \ln 20 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 / 10 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \quad \text{ή}$$

$$Q = 2 \cdot 10^3 \cdot \ln 2 \text{ J} \quad \text{ή}$$

$$Q = 2 \cdot 10^3 \cdot 0,7 \text{ J} \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{Q = 1400 \text{ J}}$$

Άρα το ποσό της θερμότητας που απορρόφησε το αέριο είναι $Q = 1400 \text{ J}$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Σε ένα αερόστατο προσφέρεται θερμότητα και αυξάνεται ο όγκος του μπαλονιού και η θερμοκρασία του αέρα που βρίσκεται μέσα στο μπαλόνι. Αν θεωρήσουμε την μάζα του αέρα μέσα στο μπαλόνι σαν ιδανικό αέριο, όπου θα υπάρχουν 100 mole αέρα σε αρχική θερμοκρασία περιβάλλοντος 27 °C και πίεση 1 atm, τι ποσό θερμότητας πρέπει να προσφέρουμε στο αέριο, για δεκαπλασιαστεί ο όγκος του, χωρίς η θερμοκρασία του αέρα μέσα στο μπαλόνι να ξεπεράσει τους 67 °C.

Δίνονται: $R=8.3 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$ και $1\text{atm}=100.000 \text{ N/m}^2$.

ΛΥΣΗ

Βρίσκουμε τις πιέσεις P_1 και P_2 με την καταστατική εξίσωση των αερίων. Θα βρούμε:

$$P_1=1,25 \text{ atm και}$$

$$P_2=0,14 \text{ atm}$$

Βλέπουμε ότι η πίεση μικραίνει, γι' αυτό η μεταβολή AB, πρέπει να σχεδιαστεί προς τα κάτω.

Στην συνέχεια βρίσκουμε το W από το εμβαδόν του τραpezίου.

Μετά βρίσκουμε το

$$\Delta U=3/2\cdot n\cdot R\cdot T$$

και μετά

$$Q=\Delta U+W.$$

Τελικά πρέπει να βρούμε :

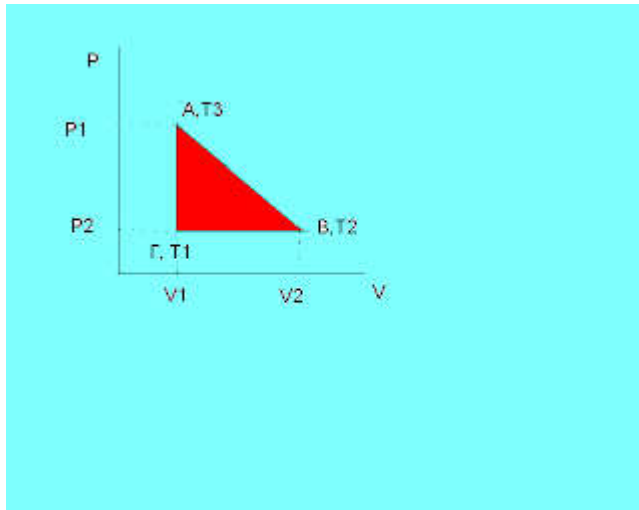
$$Q = 1300000 \text{ J}$$

Άρα πρέπει να προσφέρουμε στο αέριο ποσό θερμότητας $Q=1300000 \text{ J}$.

ΘΕΡΜΙΚΕΣ ΜΗΧΑΝΕΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

10 mol ιδανικού αερίου εκτελούν την μεταβολή του σχήματος.



Να υπολογιστούν:

Το $W_{\omega\phi}$ και το $W_{\delta\alpha\pi}$, καθώς και το συνολικό ποσό θερμότητας που ανταλλάσσει το αέριο με το περιβάλλον.

Δίνονται: $P_1=4\text{atm}$, $P_2=1\text{atm}$, $V_1=4\text{L}$, $V_2=8\text{L}$.

ΛΥΣΗ

Κατά την μεταβολή AB έχουμε το αέριο προσφέρει έργο. Άρα από το εμβαδόν του τραπεζίου έχουμε:

$$W_{\omega\phi}=10 \text{ L}\cdot\text{atm}$$

Άρα το ωφέλιμο έργο $W_{\omega\phi}$ είναι $W_{\omega\phi}=10 \text{ L}\cdot\text{atm}$.

Κατά την μεταβολή ΒΓ το αέριο καταναλώνει έργο. Άρα από το εμβαδόν του ορθογωνίου έχουμε:

$$W_{\delta\alpha\pi}=4 \text{ L}\cdot\text{atm}$$

Άρα το δαπανώμενο έργο $W_{\delta\alpha\pi}$ είναι $W_{\delta\alpha\pi}=4 \text{ L}\cdot\text{atm}$.

Κατά την μεταβολή ΓΑ έχουμε:

$$W = 0$$

$$Q_{AB}=\Delta U_{AB} + W_{AB} =\Delta U_{AB} + 10 \quad (1)$$

$$\Delta U_{AB}=\frac{3}{2}\cdot n\cdot R\cdot\Delta T=\frac{3}{2}\cdot n\cdot R\cdot(T_2-T_3) \quad (2)$$

Εφαρμόζουμε την καταστατική εξίσωση στα σημεία Α και Β:

$$P_1\cdot V_1=n\cdot R\cdot T_3$$

άρα

$$T_3 = (P_1 \cdot V_1) / (n \cdot R) \quad (3)$$

$$P_2 \cdot V_2 = n \cdot R \cdot T_2 \text{ άρα } T_2 = (P_2 \cdot V_2) / (n \cdot R) \quad (4)$$

Από τις (1),(2),(3) και (4) βρίσκουμε :

$$Q_{AB} = -2 \text{ L} \cdot \text{atm}$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε :

$$Q_{B\Gamma} = -10 \text{ L} \cdot \text{atm} \text{ και}$$

$$Q_{\Gamma A} = 18 \text{ L} \cdot \text{atm}$$

Έτσι έχουμε:

$$Q_{ολ} = 6 \text{ L} \cdot \text{atm} \text{ και}$$

$$\Delta U_{ολ} = 0$$

Άρα το συνολικό ποσό θερμότητας που ανταλλάσσει το αέριο με το περιβάλλον είναι $Q_{ολ} = 6 \text{ L atm}$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ένα ιδανικό αέριο εκτελεί τις παρακάτω μεταβολές:

α) Από πίεση P_1 και όγκο V_1 ,εκτονώνεται ισοβαρώς μέχρι τον διπλάσιο όγκο. (AB)

β) Μετά ψύχεται ισόχωρα μέχρι την αρχική θερμοκρασία T_1 . (BΓ)

γ) Μετά γυρίζει ισόθερμα στην αρχική κατάσταση. (ΓΑ)

Να υπολογιστούν η θερμότητα Q και το έργο W και η ΔU σε κάθε μεταβολή, καθώς και η απόδοση του κύκλου.

Δίνονται:

Αρχική θερμοκρασία $T_1 = 300 \text{ K}$, $n = 10 \text{ mol}$ και $R = 8,3 \text{ J/mol.K}$, $\ln 2 = 0.7$.

ΛΥΣΗ

Για την μεταβολή AB έχουμε:

$$Q_{AB} = 62250 \text{ J},$$

$$W_{AB} = 24900 \text{ J},$$

$$\Delta U_{AB} = 37350 \text{ J}.$$

Για την μεταβολή ΒΓ έχουμε:

$$Q_{BG} = -24900 \text{ J},$$

$$W_{BG} = 0,$$

$$\Delta U_{BG} = -24900 \text{ J}$$

Για την μεταβολή ΓΑ έχουμε:

$$Q_{GA} = -17430 \text{ J},$$

$$\Delta U_{GA} = 0,$$

$$W_{GA} = -17430 \text{ J},$$

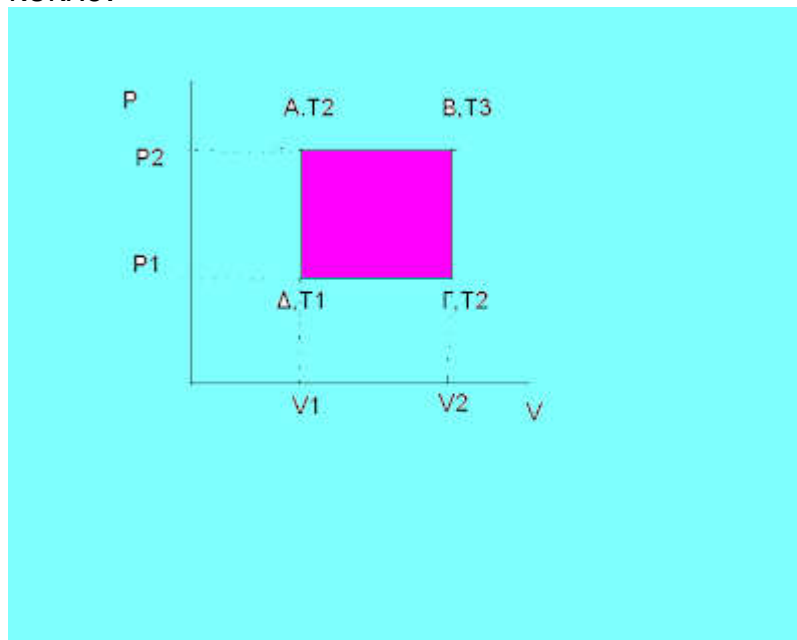
Η απόδοση του κύκλου είναι:

$$\alpha = 12\%$$

Άρα η απόδοση του κύκλου είναι $\alpha = 12\%$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

10 mol ιδανικού μονοατομικού αερίου εκτελούν τον παρακάτω κύκλο.



Να υπολογιστεί η απόδοση του κύκλου.

Δίνονται: $T_2 = 400^\circ \text{ K}$, $V_2 = 2V_1$, $R = 8,3 \text{ J/mol.K}^\circ$

ΛΥΣΗ

$$\alpha = W_{\omega\phi} / Q_{\delta\alpha\pi} = (W_{AB} - W_{\Gamma\Delta}) / (Q_{AB} + Q_{\Delta A})$$

$$P_2 \cdot V_1 = P_1 \cdot V_2 = n \cdot R \cdot T = 10 \cdot 8,3 \cdot 400 = 33200 \text{ J}$$

$$P_2 \cdot V_2 = 2 P_2 \cdot V_1 = 66400 \text{ J}$$

$$P_1 \cdot V_1 = P_1 \cdot V_2 / 2 = 16600 \text{ J}$$

$$W_{\omega\phi} = (P_2 - P_1) \cdot (V_2 - V_1) = P_1 \cdot V_1 = 16600 \text{ J}$$

$$T_3 = 800^\circ \text{K} ,$$

$$T_1 = 200^\circ \text{K} ,$$

$$P_2 = 2 \cdot P_1$$

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} + W_{AB} = 3/2 \cdot n \cdot R (T_3 - T_2) + P_2 \cdot (V_2 - V_1) = 83000 \text{ J}$$

$$Q_{\Delta A} = \Delta U_{\Delta A} + W_{\Delta A} = 3/2 \cdot n \cdot R (T_2 - T_1) + 0 = 24900 \text{ J}$$

$$Q_{\delta\alpha\pi} = 107900 \text{ J}$$

$$\alpha = 16600 / 107900 = 15\%$$

Άρα η απόδοση του κύκλου είναι $\alpha = 15\%$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Μηχανή εσωτερικής καύσης καταναλώνει σε κάθε κύκλο λειτουργίας της θερμότητα 5000 J και αποβάλλει στην εξάτμιση θερμότητα 3500 J. Υπολογίστε το συντελεστή απόδοσης της μηχανής.

ΛΥΣΗ

Ο συντελεστής απόδοσης μιας μηχανής είναι:

$$e = 1 - |Q_C| / Q_h = 1 - 3500 \text{ J} / 5000 \text{ J} = 0,3 \quad \text{ή}$$

$$30\%$$

Άρα ο συντελεστής απόδοσης της μηχανής είναι 0,3 ή 30%.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Θερμική μηχανή έχει απόδοση 25%, και σε κάθε κύκλο παράγει ωφέλιμο έργο 2000 J. Υπολογίστε την ενέργεια που δαπανάται για κάθε κύκλο λειτουργίας της μηχανής.

ΛΥΣΗ

Ο συντελεστής απόδοσης μιας μηχανής είναι:

$$e = W/Q_h$$

Άρα:

$$Q_h = W/e \quad \text{ή}$$

$$Q_h = 8000 \text{ J}$$

Άρα η ενέργεια που δαπανάται για κάθε κύκλο λειτουργίας της μηχανής είναι $Q_h = 8000 \text{ J}$.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Ο κινητήρας Diesel της εικόνας χρησιμοποιείται σε μικρά φορτηγά πλοία. Ο συντελεστής απόδοσης ενός τέτοιου κινητήρα είναι 0,25. Το πλοίο που τον φέρει ταξιδεύει με 15 κόμβους.



**Φινλανδικός κινητήρας Diesel Wartsila
12 κύλινδροι σε διάταξη V.
Εσωτερική διάμετρος κυλίνδρου: 200 mm.
Διαδρομή εμβόλου: 240 mm.**

Κυλινδρισμός: 7,54 L ανά κύλινδρο.

Ισχύς: 220 kW ανά κύλινδρο για ταχύτητα 15 κόμβων.

Οι δεξαμενές του πλοίου περιέχουν 150 τόνους καυσίμου. Ποια απόσταση μπορεί να διανύσει το πλοίο με αυτά τα καύσιμα;
[1 κόμβος = 1 ναυτικό μίλι /h = 1852 m/h. 1 kg καυσίμου αποδίδει κατά την καύση του 39800 kJ].

ΛΥΣΗ

Ο κινητήρας αποδίδει ισχύ $P = 12 \times 220kW = 2640kW$

Η απόδοση του κινητήρα είναι ο λόγος της μηχανικής ισχύος (P) που αποδίδει ο κινητήρας κατά τη λειτουργία του προς την θερμική ισχύ (P_h) που παίρνει κατά την καύση του καυσίμου.

$$e = P/P_h$$

Άρα:

$$P_h = P/e \quad \text{ή}$$

$$P_h = 1056kW$$

Από τα καύσιμα, σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 1 \text{ h}$ αποδίδεται θερμότητα:

$$Q_h = P_h \Delta t = 10.560kW \cdot 3.600 \text{ s} = 38.016.000kJ$$

Η μάζα του καυσίμου που αποδίδει τόση θερμότητα κατά την καύση της είναι:

$$m = 38.016.000kJ / 39.800 \text{ kJ/kg} \approx 955 \text{ kg}$$

Σε μια ώρα το πλοίο διανύει $15 \text{ ν.μ} / \text{h} \times 1852 \text{ m} / \text{ν.μ} \times 1 \text{ h} = 27780 \text{ m} = 27,78 \text{ km}$.

Αφού με 955 kg καυσίμου το πλοίο διανύει 27,78 km με τους 150 τόνους θα διανύσει:

$$27,78 \text{ km} \cdot 150000 \text{ kg} / 955 \text{ kg} \approx \mathbf{4363 \text{ km}}$$

Άρα το πλοίο με αυτά τα καύσιμα μπορεί να διανύσει απόσταση 4363 km.

ΜΗΧΑΝΗ ΤΟΥ CARNOT

ΑΣΚΗΣΗ 1

Μηχανή Carnot λειτουργεί ανάμεσα στις θερμοκρασίες $T_h=500\text{ K}$ και $T_c=300\text{ K}$. Σε κάθε κύκλο αποδίδει έργο $W=2000\text{ J}$. Υπολογίστε την απόδοση της μηχανής και την ενέργεια που δαπανάται σε κάθε κύκλο.

ΛΥΣΗ

Η απόδοση της μηχανής είναι:

$$e_{\text{carnot}} = 1 - T_c/T_h = 2/5 = 0,4$$

Η θερμότητα που δαπανάται για κάθε κύκλο λειτουργίας της μηχανής είναι:

$$e = W/Q_h$$

Άρα:

$$Q_h = W/e \quad \text{ή}$$

$$Q_h = 2000\text{ J}/0,4 \quad \text{ή}$$

$$Q_h = 5000\text{ J}$$

Άρα η απόδοση της μηχανής και την ενέργεια που δαπανάται σε κάθε κύκλο είναι $Q_h=5000\text{ J}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να υπολογιστεί η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας ιδανικού μονοατομικού αερίου, ποσότητας 100 mol , που εκτελεί την μεταβολή από την κατάσταση P_1, V_1, T_1 στην κατάσταση P_2, V_2, T_2 , με οποιονδήποτε τρόπο.

Να υπολογιστεί σε joule και cal.

Δίνονται: $P_1=2\text{ atm}$, $P_2=1,5\text{ atm}$, $V_1=1\text{ m}^3$, $V_2=4\text{ m}^3$

$R=8,3\text{ joule/mol.K}^\circ$, $1\text{ atm}=100.000\text{ N/m}^2$

$1\text{ cal}=4,2\text{ J}$.

ΛΥΣΗ

$$\Delta U = 600.090\text{ joule}$$

$$\Delta U = 142.878\text{ cal}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Η πίεση μιας ποσότητας αερίου είναι 3atm όταν βρίσκεται σε θερμοκρασία 300K . Πόση θα γίνει η πίεση του αερίου σε atm , αν η θερμοκρασία ανέβει στους 400K υπό σταθερό όγκο; Να παρασταθεί η μεταβολή σε διαγράμματα $(P-V)$, $(P-T)$, $(V-T)$

ΛΥΣΗ

$$P=4\text{atm}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Ιδανικό αέριο βρίσκεται στην κατάσταση A με θερμοδυναμικές συντεταγμένες P_A, V_A και $T_A=300\text{K}$ και εκτελεί τις ακόλουθες διαδοχικές μεταβολές:

AB: Ισόχωρη, μέχρι πίεση $2P_A$.

BΓ: Ισοβαρή, μέχρι όγκο $4V_A$.

α) Να απεικονιστεί η διεργασία ABΓ σε ποιοτικά διαγράμματα $P-V$, $P-T$ και $V-T$.

β) Να υπολογιστούν οι θερμοκρασίες του αερίου στις καταστάσεις B και Γ.

ΛΥΣΗ

$$T_B=600\text{K},$$

$$T_\Gamma=2400\text{K}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Ιδανικό αέριο βρίσκεται στην κατάσταση A με θερμοδυναμικές συντεταγμένες $P_A=2\text{atm}$, $V_A=1\text{m}^3$, $T_A=600\text{K}$ και εκτελεί τις ακόλουθες διαδοχικές μεταβολές:

AB: Ισόθερμη εκτόνωση μέχρι όγκο $2V_A$.

BΓ: Ισοβαρή εκτόνωση μέχρι όγκο $4V_A$.

α) Να απεικονιστεί η διεργασία ABΓ σε διαγράμματα $P-V$, $P-T$ και $V-T$.

β) Να υπολογιστεί η πίεση στην κατάσταση B και η θερμοκρασία στην κατάσταση Γ.

ΛΥΣΗ

$$P_B=1\text{atm},$$

$$T_\Gamma=1200\text{K}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Ιδανικό αέριο βρίσκεται στην κατάσταση Α με θερμοδυναμικές συντεταγμένες $P_A=10\text{atm}$, $V_A=1\text{m}^3$, $T_A=600\text{K}$ και εκτελεί τις ακόλουθες διαδοχικές μεταβολές:

ΑΒ: Ισόχωρη ψύξη μέχρι $T_B=300\text{K}$.

ΒΓ: Ισόθερμη εκτόνωση μέχρι πίεση $P_\Gamma=P_B/2$.

α) Να γίνει το διάγραμμα $P-V$ και να υπολογιστούν η πίεση P_Γ και ο όγκος V_Γ .

β) Να υπολογιστεί ο αριθμός των mol του αερίου συναρτήσει της σταθεράς R .

ΛΥΣΗ

α) $P_B=5\text{atm}$, $V_B=2\text{m}^3$,

β) $n=1/60R$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Ιδανικό αέριο βρίσκεται στην κατάσταση Α με θερμοδυναμικές συντεταγμένες $P_A=4\text{atm}$, $V_A=0,1\text{m}^3$, $T_A=1000\text{K}$ και εκτελεί τις ακόλουθες διαδοχικές μεταβολές:

ΑΒ: Ισόθερμη εκτόνωση μέχρι όγκο $V_B=4V_A$.

ΒΓ: Ισοβαρή συμπίεση μέχρι τον αρχικό όγκο.

ΓΑ: Ισόχωρη θέρμανση μέχρι την αρχική κατάσταση, Α.

α) Να απεικονιστεί η διεργασία ΑΒΓΑ σε διαγράμματα $P-V$, $P-T$ και $V-T$.

β) Να υπολογιστούν η πίεση P_B και η θερμοκρασία T_Γ .

ΛΥΣΗ

β) $P_B=1\text{atm}$, $T_\Gamma=250\text{K}$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Ιδανικό αέριο βρίσκεται στην κατάσταση Α με θερμοδυναμικές συντεταγμένες $P_A=2\text{atm}$, $V_A=1\text{m}^3$, $T_A=600\text{K}$ και εκτελεί τις ακόλουθες διαδοχικές μεταβολές:

ΑΒ: Ισόθερμη εκτόνωση μέχρι όγκο $2V_A$.

ΒΓ: Ισοβαρή εκτόνωση μέχρι όγκο $4V_A$.

α) Να απεικονιστεί η διεργασία ΑΒΓ σε διαγράμματα $P-V$, $P-T$ και $V-T$.

β) Να υπολογιστεί η πίεση στην κατάσταση Β και η θερμοκρασία στην κατάσταση Γ.

ΛΥΣΗ

$P_B=1\text{atm}$,

$T_\Gamma=1200\text{K}$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Ιδανικό αέριο βρίσκεται στην κατάσταση A με θερμοδυναμικές συντεταγμένες $P_A=10\text{atm}$, $V_A=1\text{m}^3$ $T_A=600\text{K}$ και εκτελεί τις ακόλουθες διαδοχικές μεταβολές:

AB: Ισόχωρη ψύξη μέχρι $T_B=300\text{K}$.

BΓ: Ισόθερμη εκτόνωση μέχρι πίεση $P_\Gamma=P_B/2$.

α) Να γίνει το διάγραμμα $P-V$ και να υπολογιστούν η πίεση P_Γ και ο όγκος V_Γ .

β) Να υπολογιστεί ο αριθμός των mol του αερίου συναρτήσει της σταθεράς R .

ΛΥΣΗ

α) $P_B=5\text{atm}$,

$V_B=2\text{m}^3$,

β) $n=1/60R$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Ιδανικό αέριο βρίσκεται στην κατάσταση A με θερμοδυναμικές συντεταγμένες $P_A=4\text{atm}$, $V_A=0,1\text{m}^3$ $T_A=1000\text{K}$ και εκτελεί τις ακόλουθες διαδοχικές μεταβολές:

AB: Ισόθερμη εκτόνωση μέχρι όγκο $V_B=4V_A$.

BΓ: Ισοβαρή συμπίεση μέχρι τον αρχικό όγκο.

ΓΑ: Ισόχωρη θέρμανση μέχρι την αρχική κατάσταση, A.

α) Να απεικονιστεί η διεργασία ABΓΑ σε διαγράμματα $P-V$, $P-T$ και $V-T$.

β) Να υπολογιστούν η πίεση P_B και η θερμοκρασία T_Γ .

ΛΥΣΗ

β) $P_B=1\text{atm}$, $T_\Gamma=250\text{K}$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Ιδανικό αέριο με αρχικές συνθήκες $V_A=1\text{m}^3$, $P_A=2\text{atm}$ και $T_A=300\text{K}$ εκτελεί κυκλική μεταβολή ABΓΔΑ, που αποτελείται από τις ακόλουθες διεργασίες:

AB: Ισόχωρη θέρμανση από μέχρι διπλάσια θερμοκρασία.

BΓ: Ισόθερμη μέχρι την αρχική πίεση P_A .

ΓΔ: Ισόχωρη μέχρι την αρχική θερμοκρασία T_A .

ΔΑ: Ισόθερμη μέχρι την αρχική κατάσταση A.

α) Να παρασταθεί η διεργασία σε διαγράμματα $P-V$, $P-T$ και $V-T$.

β) Να υπολογιστούν οι πιέσεις P_B , και P_Δ και ο όγκος V_Γ .

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned}P_B &= 4 \text{ atm}, \\P_\Delta &= 1 \text{ atm}, \\V_\Gamma &= 2 \text{ m}^3\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 11

Αέριο έχει αρχικό όγκο $0,5 \text{ m}^3$, πίεση 1 atm και θερμοκρασία 300 K .

α) Συμπιέζουμε το αέριο στο $1/5$ του αρχικού του όγκου και παρατηρούμε ότι η θερμοκρασία του γίνεται 900 K . Να υπολογιστεί η νέα πίεση P_2 του αερίου.

β) Στη συνέχεια εκτονώνουμε το αέριο ώστε η πίεση να γίνει $1,5 \text{ atm}$ και ο όγκος του $0,4 \text{ m}^3$.

Πόση είναι η τελική θερμοκρασία του αερίου T .

ΛΥΣΗ

α) $P_2 = 15 \text{ atm}$

β) $T_3 = 360 \text{ K}$

ΑΣΚΗΣΗ 12

Ιδανικό αέριο βρίσκεται στην κατάσταση A με θερμοδυναμικές συντεταγμένες

$P_A = 3 \text{ atm}$, $V_A = 0,1 \text{ m}^3$, $T_A = 150 \text{ K}$ και εκτελεί τις ακόλουθες διαδοχικές μεταβολές:

AB: Ισοβαρή εκτόνωση μέχρι όγκο $V_B = 0,3 \text{ m}^3$.

BΓ: Ισόχωρη ψύξη μέχρι πίεση P_Γ .

ΓΑ: Ισόθερμη μέχρι την αρχική κατάσταση A.

α) Να απεικονιστεί η διεργασία ABΓΑ σε διαγράμματα P - V , P - T και V - T .

β) Να υπολογιστούν η θερμοκρασία T_B και η πίεση P_Γ .

ΛΥΣΗ

$$T_B = 450 \text{ K}, P_\Gamma = 1 \text{ atm}$$

ΑΣΚΗΣΗ 13

Ιδανικό αέριο με αρχικές συνθήκες $V_A = 1 \text{ m}^3$, $P_A = 2 \text{ atm}$ και $T_A = 300 \text{ K}$ εκτελεί κυκλική μεταβολή ABΓΔΑ, που αποτελείται από τις ακόλουθες διεργασίες:

AB: Ισόχωρη θέρμανση από μέχρι διπλάσια θερμοκρασία.

BΓ: Ισόθερμη μέχρι την αρχική πίεση P_A .

ΓΔ: Ισόχωρη μέχρι την αρχική θερμοκρασία T_A .

ΔΑ: Ισόθερμη μέχρι την αρχική κατάσταση Α.

α) Να παρασταθεί η διεργασία σε διαγράμματα P-V, P-T και V-T.

β) Να υπολογιστούν οι πιέσεις P_B, και P_Δ και ο όγκος V_Γ.

ΛΥΣΗ

$$P_B = 4\text{atm}, P_\Delta = 1\text{atm}, V_\Gamma = 2\text{m}^3$$

ΑΣΚΗΣΗ 14

Ποσότητα ιδανικού αερίου αρχικής θερμοκρασίας

$\theta_1 = 27^\circ\text{C}$ εκτονώνεται ισοβαρώς από όγκο V σε όγκο 4V.

α) Να υπολογιστεί η τελική θερμοκρασία του αερίου σε K.

β) Να παρασταθεί η μεταβολή σε διαγράμματα (P-V), (P-T), (V-T)

ΛΥΣΗ

$$T_2 = 1200\text{K}$$

ΑΣΚΗΣΗ 18

Ιδανικό αέριο περιέχεται σε κυλινδρικό δοχείο του οποίου το πάνω μέρος είναι κινητό έμβολο το οποίο σε θερμοκρασία $T_1 = 200\text{K}$ ισορροπεί σε ύψος $h_1 = 20\text{cm}$ πάνω από τον πυθμένα του δοχείου.

Ψύχουμε το αέριο ώστε η θερμοκρασία του γίνει $T_2 = 100\text{K}$ και παρατηρούμε ότι το έμβολο ισορροπεί και πάλι σε νέα θέση.

α) Ποιο θα είναι το νέο ύψος, h_2 που θα ισορροπήσει το έμβολο από τον πυθμένα του δοχείου; Ο όγκος του δοχείου είναι $V = h, A$ όπου A το εμβαδόν της βάσης του.

β) Να παρασταθεί η μεταβολή σε ποιοτικά διαγράμματα (P-V) και (V-T).

ΛΥΣΗ

$$h_2 = 10\text{cm}$$

ΑΣΚΗΣΗ 19

Ιδανικό αέριο βρίσκεται στην κατάσταση Α με θερμοδυναμικές συντεταγμένες P_A, V_A , και $T_A = 300\text{K}$ και εκτελεί τις ακόλουθες διαδοχικές μεταβολές:

ΑΒ: Ισόχωρη, μέχρι πίεση $2P_A$. ΒΓ: Ισοβαρή, μέχρι όγκο $4V_A$.

α) Να απεικονιστεί η διεργασία ΑΒΓ σε ποιοτικά διαγράμματα P-V, P-T και V-T.

β) Να υπολογιστούν οι θερμοκρασίες του αερίου στις καταστάσεις Β και Γ.

ΛΥΣΗ

$$T_B = 600\text{K}, T_G = 2400\text{K}$$

ΑΣΚΗΣΗ 20

Ιδανικό αέριο βρίσκεται στην κατάσταση Α με θερμοδυναμικές συντεταγμένες $P_A = 3\text{atm}$, $V_A = 0,1\text{m}^3$, $T_A = 150\text{K}$ και εκτελεί τις ακόλουθες διαδοχικές μεταβολές:

ΑΒ: Ισοβαρή εκτόνωση μέχρι όγκο $V_B = 0,3\text{m}^3$.

ΒΓ: Ισόχωρη ψύξη μέχρι πίεση P_G .

ΓΑ: Ισόθερμη μέχρι την αρχική κατάσταση Α.

α) Να απεικονιστεί η διεργασία ΑΒΓΑ σε διαγράμματα P - V , P - T και V - T .

β) Να υπολογιστούν η θερμοκρασία T_B και η πίεση P_G .

ΛΥΣΗ

$$T_B = 450\text{K}, P_G = 1\text{atm}$$

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1(Πανελλήνιες 1996).

Το ιδανικό αέριο μιας μηχανής υφίσταται κυκλική μεταβολή η οποία αποτελείται από τις εξής αντιστρεπτές μεταβολές.

1) Από μια κατάσταση Α εκτονώνεται ισόθερμα μέχρι την κατάσταση Β.

2) Στην συνέχεια ψύχεται ισόχωρα μέχρι την κατάσταση Γ και τέλος

3) Με αδιαβατική μεταβολή επανέρχεται στην αρχική κατάσταση Α.

α) Να σχεδιάσετε την παραπάνω κυκλική μεταβολή σε διάγραμμα P - V

β) Να δώσετε τη μαθηματική διατύπωση του πρώτου θερμοδυναμικού νόμου με την μορφή που παίρνει σε κάθε μια από τις παραπάνω μεταβολές, λαμβάνοντας υπόψη και τα πρόσημα των μεγεθών σε κάθε περίπτωση .

γ) Η μηχανή που λειτουργεί με αυτή την κυκλική μεταβολή, παράγει ή καταναλώνει έργο; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. Πώς παριστάνεται αυτό το έργο στο διάγραμμα;

ΑΣΚΗΣΗ 2(Πανελλαδικές 1984).

Το αραίο αέριο ενός θερμικού μηχανήματος απο τις τρεις μεταβολές μιας αντιστρεπτής κυκλικής μεταβολής παθαίνει τις εξής δύο:

- 1) Εκτονώνεται ισοβαρώς από ένα σημείο Α της ισόθερμης T_1 έως ένα σημείο Β της ισόθερμης T_2 είναι $T_2 > T_1$.
 - 2) Εκτονώνεται αδιαβατικά από το σημείο Β της ισόθερμης T_2 μέχρι ένα σημείο Γ της ισόθερμης T_1 .
- Ζητείται:
- α)** Να γίνει γραφική παράσταση των μεταβολών αυτών σε διάγραμμα P-V.
 - β)** Να γραφούν οι εξισώσεις που αντιστοιχούν σε κάθε μια από τις μεταβολές αυτές.
 - γ)** Να βρεθεί η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας και η μεταβολή της εντροπίας κατά την αδιαβατική μεταβολή ΒΓ και να γίνει εφαρμογή με τα εξής δεδομένα :
αριθμός moles αερίου 500, $CP = 50 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$, $\gamma = 1,2$, $T_1 = 2430\text{K}$ και $T_2 = 3030\text{K}$.

ΑΣΚΗΣΗ 3(Γενικές εξετάσεις 1988).

- 10 moles ιδανικού αερίου βρίσκονται σε θερμοκρασία 27°C και εκτονώνονται ισοβαρώς μέχρι διπλασιασμού του όγκου τους. Για την μεταβολή αυτή ζητούνται:
- α)** Το έργο που παρήγαγε το αέριο.
 - β)** Η τελική θερμοκρασία του αερίου.
 - γ)** Το ποσό της θερμότητας που προσφέρθηκε στο αέριο.
 - δ)** Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου.
- Δίνονται $R = 8,314 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$ και $CP = 20,8 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$

ΑΣΚΗΣΗ 4(Πανελλήνιες 1995)

Το ιδανικό αέριο μιας θερμικής μηχανής υφίσταται κυκλική μεταβολή, η οποία αποτελείται από τις εξής επιμέρους αντιστρεπτές μεταβολές.

- 1) Από την κατάσταση Α, όπου η πίεση του αερίου είναι $P = 160 \text{ N/m}^2$, εκτονώνεται ισοβαρώς μέχρι την κατάσταση Β, στην οποία ο όγκος του είναι $V_B = 8 \text{ m}^3$.
 - 2) Ψύχεται ισόχωρα μέχρι την κατάσταση Γ και
 - 3) Συμπιέζεται αδιαβατικά μέχρι την κατάσταση Α.
- Για την αδιαβατική μεταβολή ΓΑ δίνεται $PV^\gamma = 160 \text{ N}\cdot\text{m}$ $\gamma = 5/3$.
- α)** Να αποδώσετε σε άξονες P-V την παραπάνω κυκλική μεταβολή.
 - β)** Να υπολογίσετε το έργο για κάθε μια από τις επιμέρους μεταβολές, καθώς και το ολικό έργο.

γ) Να υπολογίσετε τη θερμότητα για κάθε μια από τις επιμέρους μεταβολές.

δ) Να υπολογίσετε την απόδοση της μηχανής

ΑΣΚΗΣΗ 5

Ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου, το οποίο έχει όγκο $V_1 = 5\text{lt}$ υπό πίεση $P_1 = 4 \cdot 10^5 \text{ N / m}^2$, παθαίνει τις εξής αντιστρεπτές μεταβολές :

- 1) Εκτονώνεται ισόθερμα μέχρι διπλασιασμού του όγκου του .
- 2) Συμπιέζεται ισοβαρώς μέχρι να αποκτήσει τον αρχικό του όγκο
- 3) Θερμαίνεται ισόχωρα μέχρι να αποκτήσει την αρχική του κατάσταση .

Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου κατά την ισοβαρή συμπίεση είναι $\Delta U = - 1500 \text{ joules}$. Ζητείται :

α) Να γίνει η γραφική παράσταση της κυκλικής μεταβολής σε διάγραμμα $P - V$.

β) Να βρεθεί για καθεμιά από τις τρεις μεταβολές του κύκλου η ενέργεια που ανταλλάσσει το αέριο με το περιβάλλον μέσω ροής θερμότητας .

γ) Να βρεθεί η απόδοση του κύκλου .

Δίνεται : $\ln 2 = 0,693$.

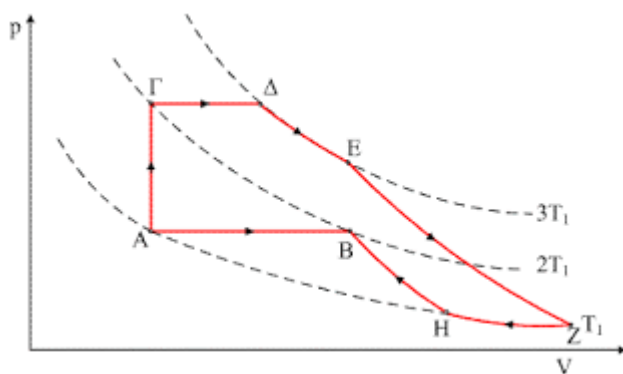
ΑΣΚΗΣΗ 6

Ιδανικό αέριο από την αρχική του κατάσταση P, V, T εκτονώνεται ισόθερμα μέχρι να τριπλασιαστεί ο όγκος του. Στη συνέχεια το συμπιέζουμε ισοβαρώς προσφέροντας του έργο ίσο με το μισό του έργου που απέδωσε κατά την ισόθερμη εκτόνωση του. Να προσδιοριστεί ο τελικός όγκος V_T του αερίου σε συνάρτηση με τον αρχικό όγκο V .

Δίνεται $\ln 3 = 1,1$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Ένα αέριο υπόκειται στις μεταβολές που παρουσιάζονται στο παρακάτω διάγραμμα, στις οποίες περιλαμβάνονται δυο αδιαβατικές και δυο ισόθερμες.

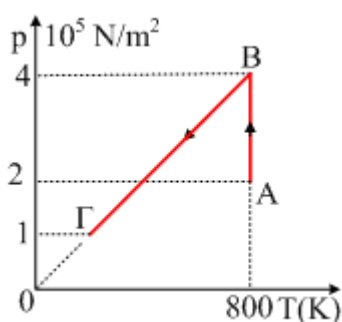


- α)** Ποιες μεταβολές είναι οι αδιαβατικές; Το παραπάνω σχήμα δείχνει μια κυκλική μεταβολή; Ναι , Όχι.
- β)** Να συμπληρώσετε τα παρακάτω τετράγωνα, θέτοντας το πρόσημο (+) ή το (-) ή το μηδέν (0) ανάλογα με το τι συμβαίνει στις παρακάτω μεταβολές.

Μεταβολή	ΔV	Δp	ΔT	W	ΔU	Q
AB						
AΓ						
ΓΔ						
ΔΕ						
ΕΖ						
ΖΗ						
ΗΒ						

ΑΣΚΗΣΗ 8

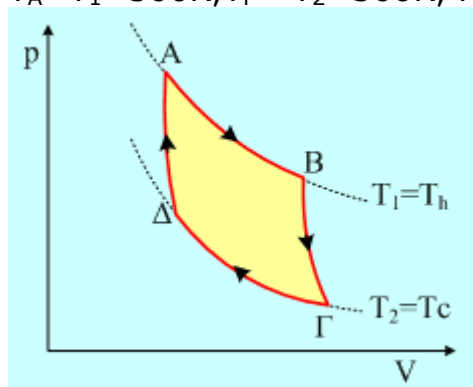
Δίνονται οι μεταβολές AB και BΓ ενός ιδανικού αερίου.



- α)** Πώς ονομάζονται οι μεταβολές αυτές.
- β)** Αν $V_A = 10L$, να υπολογίσετε τη θερμοκρασία και τον όγκο του αερίου στην κατάσταση Γ.
- γ)** Να παραστείτε τις μεταβολές σε άξονες p-V και V-T.
- δ)** Αν η ενεργός ταχύτητα των μορίων στην κατάσταση A είναι $1200m/s$, να υπολογίσετε την ενεργό ταχύτητα για την κατάσταση Γ

ΑΣΚΗΣΗ 9

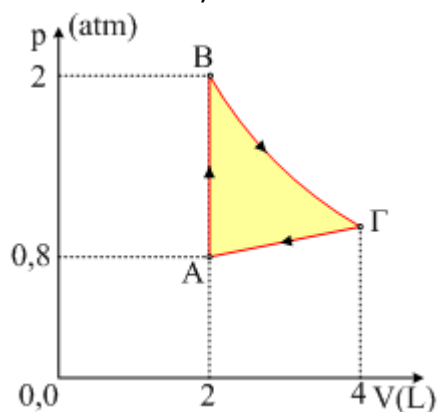
Δίνεται ο κύκλος Carnot του σχήματος, όπου $V_A=10\text{L}$, $V_B=20\text{L}$, $T_A=T_1=500\text{K}$, $T_\Gamma=T_2=300\text{K}$, $P_A=10^5\text{ N/m}^2$ και $C_V=3R/2$.



Η μεταβολή AB ονομάζεται Κατά τη διάρκειά της το αέριο θερμότητα και έργο. Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του αερίου είναι ίση με

ΑΣΚΗΣΗ 10

Μια θερμική μηχανή χρησιμοποιεί μια ποσότητα ιδανικού μονοατομικού αερίου και εκτελεί την κυκλική μεταβολή του σχήματος. Η μεταβολή ΒΓ είναι ισόθερμη. Δίνεται $\ln 2=0,7$

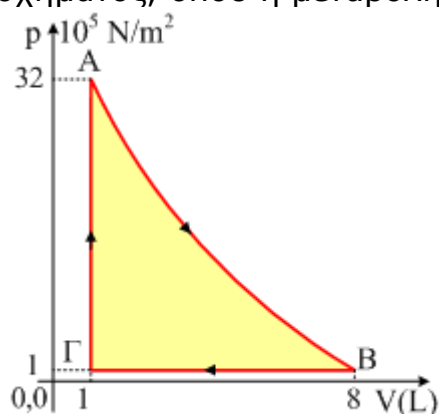


- α)** Η θερμότητα και η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας κατά τη μεταβολή AB.
- β)** Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας κατά τη μεταβολή ΓΑ.
- γ)** Το έργο και η θερμότητα που ανταλλάσσει το αέριο με το περιβάλλον κατά τη μεταβολή ΓΑ.
- δ)** Η απόδοση της θερμικής μηχανής.

ΑΣΚΗΣΗ 11

Μια θερμική μηχανή στρέφεται με συχνότητα $f=30\text{Hz}$ (εκτελεί 30

κύκλους το δευτερόλεπτο), διαγράφοντας την κυκλική μεταβολή του σχήματος, όπου η μεταβολή AB είναι αδιαβατική:

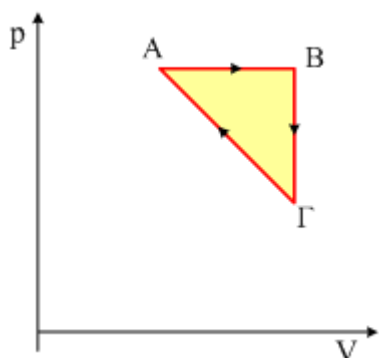


α) Πόση είναι η ισχύς της μηχανής;

β) Να βρεθεί η απόδοση της θερμικής μηχανής.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Ένα αέριο εκτελεί την κυκλική μεταβολή του σχήματος, όπου $P_A = 4 \text{ m}^2 \text{ N/m}^2$, $V_A = 20 \text{ L}$ και $V_B = 40 \text{ L}$.



Αν κατά την μεταβολή AB το αέριο προσλαμβάνει θερμότητα 15.000 J , ενώ κατά την μεταβολή BΓ αποβάλλει θερμότητα 7.000 J , να βρεθούν το έργο, η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας και η θερμότητα που ανταλλάσσει το αέριο με το περιβάλλον στη μεταβολή ΓΑ.

ΑΣΚΗΣΗ 13

Μονοατομικό αέριο εκτονώνεται από όγκο V_1 σε V_2 ($V_2 > V_1$)

α) ισόθερμα

β) ισοβαρώς.

Αν κατά την ισόθερμη εκτόνωση η μεταβολή της εντροπίας είναι $\Delta S_1 = 20 \text{ J/K}$ να βρεθεί πόση είναι η μεταβολή της εντροπίας ΔS_2 κατά την ισοβαρή εκτόνωση από τον όγκο V_1 στον V_2 .

ΑΣΚΗΣΗ 14

Ιδανικό αέριο από την αρχική του κατάσταση P, V, T εκτονώνεται ισόθερμα μέχρι να τριπλασιαστεί ο όγκος του. Στη συνέχεια το συμπιέζουμε ισοβαρώς προσφέροντας του έργο ίσο με το μισό του έργου που απέδωσε κατά την ισόθερμη εκτόνωση του. Να προσδιοριστεί ο τελικός όγκος V_T του αερίου σε συνάρτηση με τον αρχικό όγκο V .

Δίνεται $\ln 3 = 1,1$.

ΑΣΚΗΣΗ 15

Μια ποσότητα αερίου πηγαίνει από την κατάσταση $A (P_1, V_1, T_1)$ στην κατάσταση $B (0,5P_1, 2V_1, T_1)$. Η μετάβαση του αερίου από την κατάσταση A στη B μπορεί να γίνει με τους παρακάτω τρόπους:

- 1) Με μια ισόθερμη μεταβολή
- 2) Με μια ισόβαρη και μια ισόχωρη μεταβολή
- 3) Μια ισόχωρη και μια ισόβαρη μεταβολή
- 4) Με μια ισόβαρη και μια αδιαβατική μεταβολή.

α) Να παρασταθούν γραφικά οι μεταβολές για όλους τους τρόπους σε άξονες P - V

β) Να καταταχθούν οι διάφοροι τρόποι κατά σειρά από αυτόν που αποδίδει περισσότερο έργο προς αυτόν που αποδίδει λιγότερο.

γ) Σε ποια περίπτωση θα δώσουμε λιγότερη θερμότητα στο αέριο;

ΑΣΚΗΣΗ 16

Ιδανικό αέριο βρίσκεται στην κατάσταση $A(P_A, V_A, T_A)$ και του προσφέρουμε ποσό θερμότητας $Q = 10 \text{ joules}$ υπό σταθερό όγκο οπότε μεταβαίνει στην κατάσταση $B(P_B, V_A, T_B)$. Αν στην συνέχεια το αέριο εκτονωθεί αδιαβατικά παράγοντας έργο $W = 10 \text{ joules}$ να αποδείξετε ότι το αέριο θα επανέλθει στην θερμοκρασία T_A .

ΑΣΚΗΣΗ 17

Ένα αέριο βρίσκεται σε δοχείο που κλείνεται με έμβολο σε κατάσταση A με πίεση $p_1 = 32 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$.

A) Απορροφώντας θερμότητα $Q_1 = 19.200 \ln 2 \text{ J}$ ισόθερμα, το αέριο έρχεται σε κατάσταση B με πίεση $p_2 = 4 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$. Να βρεθεί ο όγκος στην κατάσταση A .

B) Το ίδιο αέριο έρχεται από την κατάσταση A σε κατάσταση Γ , σε πίεση $p_3 = 10^5 \text{ N/m}^2$ αδιαβατικά. Αν για το αέριο αυτό $\gamma = 5/3$, ζητούνται:

α) Να βρεθεί ο όγκος V_Γ .

β) Το έργο κατά την αδιαβατική εκτόνωση.

γ) Να παρασταθούν στους ίδιους άξονες p - V οι μεταβολές AB και $A\Gamma$.

δ) Αν το αέριο μετέβαινε από την κατάσταση B στην κατάσταση Γ αντιστρεπτά, ακολουθώντας τον «συντομότερο δρόμο», πόση θερμότητα θα αντάλλαζε το αέριο με το περιβάλλον του;

ΑΣΚΗΣΗ 18

Ιδανικό αέριο βρίσκεται στην κατάσταση A με θερμοδυναμικές συντεταγμένες $P_A, V_A, T_A = 300\text{K}$ και εκτελεί τις ακόλουθες διαδοχικές μεταβολές:

AB: Ισοβαρή μέχρι διπλάσιο όγκο.

ΒΓ: Ισόχωρη μέχρι τη μισή πίεση.

ΓΔ: Ισοβαρή μέχρι τον αρχικό όγκο.

ΔΑ: Ισόχωρη μέχρι την αρχική κατάσταση A.

α) Να απεικονιστεί η διεργασία ΑΒΓΔΑ σε ποιοτικά διαγράμματα P-V, P-T και V-T.

β) Να υπολογιστούν οι απόλυτες θερμοκρασίες του αερίου στις καταστάσεις Β, Γ και Δ.

ΑΣΚΗΣΗ 19

Ποσότητα $2/R$ mol He καταλαμβάνουν όγκο $V_A = 2\text{L}$ ασκώντας πίεση $p_A = 2\text{atm}$.

α) Να υπολογιστεί η θερμοκρασία στην οποία βρίσκεται το αέριο

β) Διατηρώντας το γινόμενο pV σταθερό, αυξάνουμε τον όγκο του αερίου κατά 6L. Ποια είναι η τελική πίεση του αερίου;

γ) Να γίνει η παραπάνω μεταβολή σε διαγράμματα p-V, p-T και V-T

ΑΣΚΗΣΗ 20

Ο όγκος δεδομένης ποσότητας ιδανικού αερίου διπλασιάζεται, υπό σταθερή πίεση, και κατόπιν μειώνεται η πίεση στο μισό της αρχικής της τιμής, υπό σταθερό όγκο. Η τελική θερμοκρασία του αερίου είναι:

α) διπλάσια της αρχικής

β) τετραπλάσια της αρχικής

γ) μισή της αρχικής

δ) ίση με την αρχική

ΑΣΚΗΣΗ 21

Ιδανικό αέριο βρίσκεται μέσα σε δοχείο που κλείνεται με έμβολο από την πάνω μεριά. Αρχικά, το αέριο βρίσκεται σε θερμοκρασία $-1,5$ βαθμών Κελσίου και καταλαμβάνει όγκο 20L. Θερμαίνουμε το αέριο μέχρι να φτάσει σε θερμοκρασία 270 βαθμών Κελσίου.

α) Ποιος είναι ο τελικός όγκος του αερίου;

β) Να παραστήσετε τη μεταβολή σε διαγράμματα p-V, p-T και V-T

ΑΣΚΗΣΗ 22

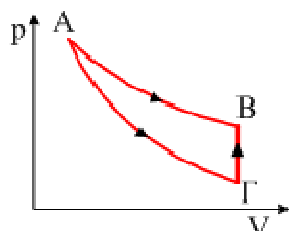
Ιδανικό αέριο βρίσκεται στην κατάσταση A με θερμοδυναμικές συντεταγμένες $P_A, V_A, T_A = 300\text{K}$ και εκτελεί τις ακόλουθες διαδοχικές μεταβολές:

AB: Ισοβαρή μέχρι διπλάσιο όγκο.

BΓ: Ισόχωρη μέχρι τη μισή πίεση.

ΓΔ: Ισοβαρή μέχρι τον αρχικό όγκο.

ΔΑ: Ισόχωρη μέχρι την αρχική κατάσταση A.



α) Να απεικονιστεί η διεργασία ABΓΔΑ σε ποιοτικά διαγράμματα P-V, P-T και V-T.

β) Να υπολογιστούν οι απόλυτες θερμοκρασίες του αερίου στις καταστάσεις B, Γ και Δ.

ΑΣΚΗΣΗ 23

Μια ποσότητα αερίου μεταβαίνει από την κατάσταση A στην κατάσταση B με δύο τρόπους. (α) Με μία ισόθερμη εκτόνωση και (β) με μία αδιαβατική εκτόνωση και μία ισόχωρη θέρμανση όπως στο διπλανό σχήμα.

A) Με ποιον τρόπο παράγεται περισσότερο έργο; Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

B) Ποια από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστή;

α) $\Delta U_{AB} > \Delta U_{AGB}$

β) $\Delta U_{AB} = \Delta U_{AGB}$

γ) $\Delta U_{AB} < \Delta U_{AGB}$

Να δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Γ) Ποια από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστή;

α) $Q_{AB} > Q_{GB}$

β) $Q_{AB} = Q_{GB}$

γ) $Q_{AB} < Q_{GB}$

Να δικαιολογήστε την απάντησή σας.

ΑΣΚΗΣΗ 24

Ορισμένη ποσότητα ιδανικού αερίου βρίσκεται στην κατάσταση Α με όγκο $V_A=30\text{L}$ και θερμοκρασία $T_A=300\text{K}$. Το αέριο θερμαίνεται με σταθερή πίεση μέχρις ότου η θερμοκρασία του να γίνει $T_B=500\text{K}$.

α) Να χαρακτηρίσετε τη μεταβολή του αερίου. Ποιος νόμος ισχύει για τη μεταβολή αυτή;

β) Να υπολογίσετε τον τελικό όγκο του αερίου.

γ) Αν κατά τη διάρκεια της μεταβολής η πίεση είναι $p=2\text{atm}$, να παραστήσετε την παραπάνω μεταβολή σε διαγράμματα p - V , p - T , V - T και V - θ .

ΑΣΚΗΣΗ 25

Ποσότητα ιδανικού αερίου βρίσκεται στην κατάσταση Α(p_0 , V_0 , T_0) και εκτελεί την κυκλική μεταβολή ΑΒΓΑ. Κατά τη μεταβολή ΑΒ το αέριο τριπλασιάζει την πίεσή του με τέτοιο τρόπο, ώστε ο λόγος p/V να παραμένει σταθερός. Στη συνέχεια με μια ισόχωρη μεταβολή επιστρέφει στην αρχική του πίεση και τέλος με μια ισοβαρή συμπίεση επιστρέφει στην αρχική του κατάσταση Α παράγοντας έργο $W_{ΓΑ}=-800\text{J}$.

α) Να γίνει η γραφική παράσταση της παραπάνω κυκλικής μεταβολής σε διάγραμμα p - V .

β) Να βρεθεί η θερμότητα Q_{AB} που απορρόφησε το αέριο κατά τη μεταβολή ΑΒ

γ) Να υπολογιστεί ο συντελεστής απόδοσης μιας θερμικής μηχανής που λειτουργεί με τον παραπάνω κύκλο και να βρεθεί η σχέση του με το συντελεστή απόδοσης μιας μηχανής Carnot, της οποίας οι ισόθερμες αντιστοιχούν στη μέγιστη και στην ελάχιστη θερμοκρασία του παραπάνω κύκλου.

δ) Να βρεθεί η ειδική γραμμομοριακή θερμότητα του αερίου C_x κατά τη μεταβολή ΑΒ.

Δίνεται για το αέριο $\gamma=5/3$

ΑΣΚΗΣΗ 26

Η κυκλική μεταβολή μιας ποσότητας ιδανικού αερίου μιας θερμικής μηχανής αποτελείται από τις εξής μεταβολές:

ΑΒ: ισόχωρη θέρμανση μέχρι να τριπλασιαστεί η πίεση του.

ΒΓ: ισοβαρή εκτόνωση μέχρι να τριπλασιαστεί ο όγκος του.

ΓΔ: ισόχωρη ψύξη μέχρι την αρχική πίεση.

ΔΑ: ισοβαρή συμπίεση μέχρι την αρχική κατάσταση.

Να βρείτε:

α) το λόγο $|Q_{ΒΓ}|/|Q_{ΓΔ}|$.

β) το συντελεστή απόδοσης της μηχανής.

Δίνεται $\gamma=5/3$

ΕΡΓΟ ΑΕΡΙΟΥ-ΠΡΩΤΟΣ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΝΟΜΟΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Αέριο με όγκο $0,004\text{m}^3$ θερμαίνεται με σταθερή πίεση $p = 1,2\text{atm}$ μέχρι ο όγκος του να γίνει $0,006\text{m}^3$. Υπολογίστε το έργο που παράγει το αέριο.

Δίνεται $1\text{atm} = 1,013 \times 10^5 \text{N/m}^2$.

ΛΥΣΗ

243,1J

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δύο mol αερίου θερμαίνονται από τους 27°C στους 127°C . Η θέρμανση του αερίου γίνεται με σταθερή πίεση. Υπολογίστε το έργο που παράγει το αέριο.

Δίνεται $R = 8,314\text{J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$.

ΛΥΣΗ

1663J

ΑΣΚΗΣΗ 3

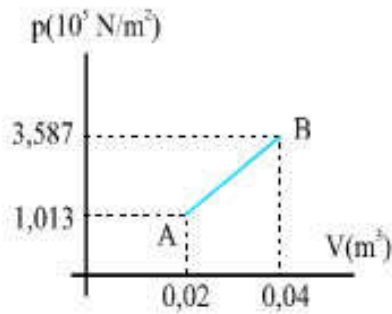
Δύο mol αερίου βρίσκονται σε θερμοκρασία 27°C . Διατηρώντας σταθερή τη θερμοκρασία συμπιέζουμε το αέριο ώστε η πίεσή του να διπλασιαστεί. Να υπολογιστεί το έργο του αερίου. Δίνονται $R = 8,314\text{J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$, $\ln 2 = 0,6931$.

ΛΥΣΗ

-3458J

ΑΣΚΗΣΗ 4

Το διάγραμμα του παρακάτω σχήματος παριστάνει τη μεταβολή ενός αερίου από την κατάσταση A στην κατάσταση B.



Υπολογίστε το έργο του αερίου κατά τη μεταβολή αυτή.

ΛΥΣΗ

$$4600\text{J}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Ποσότητα αερίου καταλαμβάνει όγκο 10L και έχει πίεση 1atm. Το αέριο θερμαίνεται ισόθερμα μέχρι να διπλασιαστεί ο όγκος του. Υπολογίστε το ποσό θερμότητας που απορρόφησε το αέριο. Δίνονται $1\text{L} = 10^{-3}\text{m}^3$, $1\text{atm} = 1,013 \times 10^5 \text{N/m}^2$, $\ln 2 = 0,6931$.

ΛΥΣΗ

$$Q = 702,1\text{J}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Αέριο βρίσκεται μέσα σε δοχείο που κλείνεται με έμβολο. Το αέριο καταλαμβάνει όγκο $V_1 = 0,008\text{m}^3$, έχει θερμοκρασία $T_1 = 300\text{K}$ και πίεση $p_1 = 1,013 \times 10^5 \text{N/m}^2$. Θερμαίνουμε το αέριο υπό σταθερή πίεση, μέχρι η θερμοκρασία του να γίνει $T_2 = 375\text{K}$.

α) Υπολογίστε το έργο του αερίου.

β) Αν κατά τη θέρμανση του το αέριο απορρόφησε θερμότητα $Q = 709,1\text{J}$ υπολογίστε τη μεταβολή της εσωτερικής του ενέργειας.

ΛΥΣΗ

$$W = 202,6\text{J}, \Delta U = 506,5\text{J}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

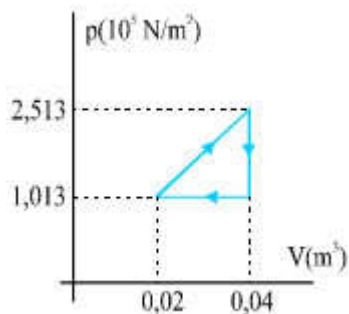
0,2mol αερίου συμπιέζονται ισόθερμα σε θερμοκρασία $\theta = 27^\circ\text{C}$, ώστε ο όγκος του να ελαττωθεί στο μισό. Υπολογίστε το ποσό θερμότητας που αντάλλαξε το αέριο με το περιβάλλον. Δίνονται $R = 8,314\text{J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$, $\ln 2 = 0,6931$.

ΛΥΣΗ

-345,8J

ΑΣΚΗΣΗ 8

Αέριο εκτελεί την κυκλική μεταβολή του του παρακάτω σχήματος.



Υπολογίστε το καθαρό ποσό θερμότητας που απορρόφησε.

ΛΥΣΗ

1500J

ΓΡΑΜΜΟΜΟΡΙΑΚΕΣ ΕΙΔΙΚΕΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΕΣ ΙΔΑΝΙΚΟΥ ΑΕΡΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΗ 9

Ιδανικό αέριο βρίσκεται σε δοχείο σταθερού όγκου $0,004\text{m}^3$. Το αέριο θερμαίνεται ώστε η πίεσή του από $1,013 \times 10^5 \text{N/m}^2$ να γίνει $3,213 \times 10^5 \text{N/m}^2$. Να υπολογιστεί το ποσό θερμότητας που απορρόφησε το αέριο. Δίνεται ότι στα ιδανικά αέρια ισχύει $CV = 3/2R$.

ΛΥΣΗ

1320J

ΑΣΚΗΣΗ 10

Αέριο θερμαίνεται με σταθερή πίεση $1,013 \times 10^5 \text{N/m}^2$, ώστε ο όγκος του από $0,005\text{m}^3$ να γίνει $0,007\text{m}^3$. Να υπολογιστεί το ποσό θερμότητας που απορρόφησε το αέριο. Δίνεται $CV = 3/2R$.

ΛΥΣΗ

506,5J

ΑΣΚΗΣΗ 11

Να υπολογιστεί η αύξηση της εσωτερικής ενέργειας ορισμένης ποσότητας αερίου όταν το θερμάνουμε με σταθερή πίεση προσφέροντάς του θερμότητα $Q = 10\text{cal}$.
Για το αέριο ισχύει $\gamma = 1.41$. Δίνεται $1\text{cal} = 4,18\text{J}$.

ΛΥΣΗ

29,64J

ΘΕΡΜΙΚΕΣ ΜΗΧΑΝΕΣ - ΚΥΚΛΟΣ CARNOT

ΑΣΚΗΣΗ 12

Για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας, ένα εργοστάσιο χρησιμοποιεί λιγνίτη. Από την καύση του λιγνίτη το εργοστάσιο τροφοδοτείται με θερμότητα με ρυθμό 900MW και παράγει 300MW μηχανικής ισχύος που, στη συνέχεια μετατρέπεται σε ηλεκτρική ισχύ. Υπολογίστε την απόδοση του εργοστασίου κατά τη μετατροπή της θερμότητας σε μηχανική ενέργεια.

ΛΥΣΗ

33,3%

ΑΣΚΗΣΗ 13

Θερμική μηχανή παράγει σε κάθε κύκλο λειτουργίας της μηχανικό έργο 200J. Η απόδοση της μηχανής είναι 25%. Υπολογίστε το ποσό θερμότητας που απορροφά, καθώς και το ποσό θερμότητας που αποβάλλει η μηχανή σε κάθε κύκλο της.

ΛΥΣΗ

800J, 600J

ΑΣΚΗΣΗ 14

Οι βενζινομηχανές στα αυτοκίνητα χρησιμοποιούν τη θερμότητα που παράγεται από την καύση της βενζίνης. Μέρος της θερμότητας αυτής τη μετατρέπουν σε μηχανικό έργο και την υπόλοιπη την αποβάλλουν στην ατμόσφαιρα. Η απόδοση μιας τέτοιας μηχανής είναι περίπου 20%. Η θερμοκρασία που επιτυγχάνεται με την καύση της βενζίνης είναι περίπου 2100°C . Αν η θερμοκρασία της ατμόσφαιρας είναι 23°C , υπολογίστε τη θεωρητικά μέγιστη απόδοση που μπορεί να έχει μία τέτοια μηχανή. (Θα θεωρήσετε ότι τα καυσαέρια αποβάλλονται στη θερμοκρασία της ατμόσφαιρας).

ΛΥΣΗ

87%

ΑΣΚΗΣΗ 15

Μια μηχανή Carnot υποβάλλει σε κυκλική μεταβολή 5mol ιδανικού αερίου. Η θερμοκρασία της θερμής δεξαμενής είναι 500K και της ψυχρής 300K. Κατά την ισόθερμη εκτόνωσή του ο όγκος του αερίου από $V_A = 3 \times 10^{-2} \text{m}^3$ γίνεται $V_B = 6 \times 10^{-2} \text{m}^3$.

Υπολογίστε:

α) Το συντελεστή απόδοσης της μηχανής.

β) Το έργο που παράγει η μηχανή σε κάθε κύκλο.

Δίνονται $R = 8,314 \text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$, $\ln 2 = 0,693$.

ΛΥΣΗ

0,4, 5762J

ΕΝΤΡΟΠΙΑ

ΑΣΚΗΣΗ 16

Ποσότητα αερίου καταλαμβάνει όγκο 4L, με πίεση 2atm, και θερμοκρασία 400K. Το αέριο ψύχεται με σταθερό όγκο μέχρι η πίεσή του να γίνει 0,8atm και στη συνέχεια θερμαίνεται με σταθερή πίεση μέχρι ο όγκος του να γίνει 10 L.

α) Να αποδοθούν οι μεταβολές αυτές σε διάγραμμα p-V.

β) Να υπολογιστεί η τελική θερμοκρασία του αερίου.

γ) Να υπολογιστεί η μεταβολή της εντροπίας του.

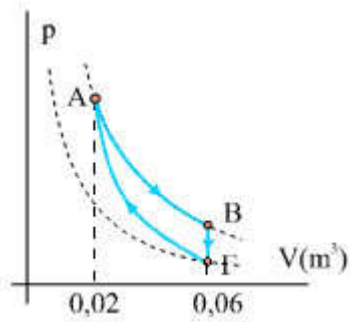
Δίνονται $1 \text{L} = 10^{-3} \text{m}^3$ και $1 \text{atm} = 1,013 \times 10^5 \text{N/m}^2$, $\ln 2,5 = 0,9163$.

ΛΥΣΗ

400K, $\Delta S = 1,86 \text{J/K}$

ΑΣΚΗΣΗ 17

Ποσότητα αερίου $n = 0,2 \text{mol}$ υφίσταται την κυκλική μεταβολή του του παρακάτω σχήματος όπου AB ισόθερμη εκτόνωση, ΒΓ ισόχωρη ψύξη, ΓΑ αδιαβατική συμπίεση.



Να υπολογιστεί η μεταβολή της εντροπίας του αερίου στις επιμέρους μεταβολές AB, BΓ και ΓΑ.

Δίνεται $R=8,314\text{J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$, $\ln 3 = 1,0986$.

ΛΥΣΗ

$$\Delta S_{AB} = 1,83\text{J/K}, \Delta S_{B\Gamma} = -1,83\text{J/K}, \Delta S_{\Gamma A} = 0$$