Μαθηματικά

Φυλλάδιο Θεωρίας



Γ΄ Γενικού Λυκείου

προσανατολισμού

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α; Ε2018

Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$. Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε:

$$f : A \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x)$$

→ Το γράμμα x παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του Α και λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το γράμμα y, που παριστάνει την τιμή της f στο x, λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή.

→ Το πεδίο ορισμού Α της f συμβολίζεται με D_f.

2. Τι ονομάζεται σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το Α.

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμών της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή: $f(A) = \{y / y = f(x), x \in A\}$

3. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση συνάρτησης

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται με C_f.

4. Ποια είναι η σχέση της γραφικής παράστασης των συναρτήσεων –f, $|f|$ με τη γραφική παράσταση της f;

Η γραφική παράστασης της συνάρτησης −f είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x′x, της γραφικής παράστασης της f, γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x, f(x))$, ως προς τον άξονα x′x.

Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x′x και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα x′x, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.

5. Πότε δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες; Κ 2007, Ε 2012, Κ 2016, Κ2021

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$. Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

6. Πως ορίζονται οι πράξεις των συναρτήσεων;

Ορίζουμε ως άθροισμα $f + g$, διαφορά $f - g$, γινόμενο fg και πηλίκο $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Το πεδίο ορισμού των $f + g$, $f - g$ και fg είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο $\{x \mid x \in A \text{ και } x \in B \text{ με } g(x) \neq 0\}$.

7. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ισχύει ότι $f(x)\cdot g(x)=0$ αν και μόνο αν $f(x)=0$ ή $g(x)=0$»
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις: $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ e^x, & x>1\end{cases}$.

Παρατηρούμε ότι για $x\le 1$ είναι $f(x)g(x)=(x+2)\cdot 0=0$ και για $x>1$, είναι $f(x)g(x)=0\cdot e^x=0$, δηλαδή $f(x)g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ χωρίς όμως κάποια από τις συναρτήσεις f,g να είναι ίση με το 0 για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

8. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ισχύει ότι $f^2(x)=g^2(x)$ αν και μόνο αν $f(x)=\pm g(x)$»
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις: $f(x)=\begin{cases}2, & x\le 1\\ -2, & x>1\end{cases}$ και $g(x)=2,\ x\in\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε οι f,g δεν είναι ίσες ούτε αντίθετες για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όμως $f^2(x)=g^2(x)=4,\ x\in\mathbb{R}$.

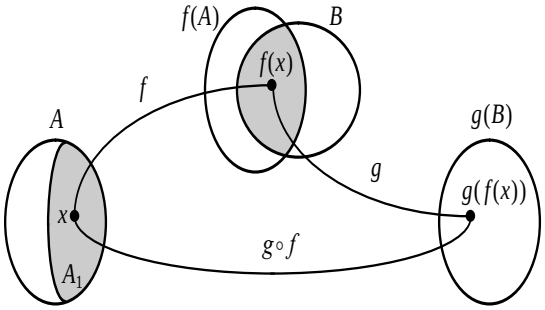
9. Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g;

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g, και τη συμβολίζουμε με $g\circ f$, τη συνάρτηση με τύπο

$(gof)(x)=g(f(x))$.

Το πεδίο ορισμού της gof αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο

$$A_1=\{x\in A/f(x)\in B\}.$$



Είναι φανερό ότι η gof ορίζεται αν $A_1\neq\varnothing$, δηλαδή αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

ΣΧΟΛΙΑ

- Γενικά, αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $g\circ f$ και $f\circ g$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.
- Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h\circ(g\circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h\circ g)\circ f$ και ισχύει $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $h\circ g\circ f$. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

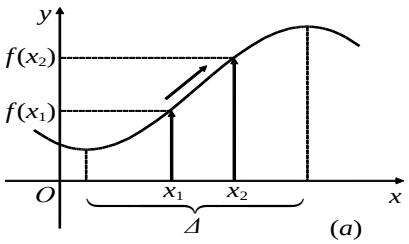
10.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Αν f,g είναι δύο συναρτήσεις για τις οποίες ορίζονται οι $f\circ g$ και $g\circ f$ τότε $f\circ g=g\circ f$»
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής
β) Έστω $f(x)=x+1,\ x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=x^2,\ x\in\mathbb{R}$.

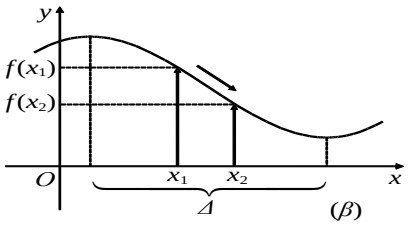
Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $(f\circ g)(x)=f(g(x))=x^2+1$ και $(g\circ f)(x)=g(f(x))=(x+1)^2=x^2+2x+1$.
Είναι φανερό ότι $f\circ g\neq g\circ f$.

11.Πότε μία συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα και πότε γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μια συνάρτηση f λέγεται:
- **γνησίως αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει: $f(x_1)<f(x_2)$ (Σχ. α)



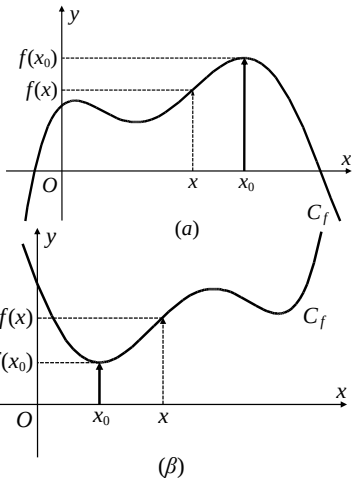
- **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει: $f(x_1)>f(x_2)$ (Σχ. β)



Για να δηλώσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) σε ένα διάστημα Δ, γράφουμε $f\nearrow\Delta$ (αντιστοίχως $f\searrow\Delta$). Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

12.Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο και πότε ελάχιστο **Κ 2014,Ε 2010**

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:
- Παρουσιάζει στο $x_0\in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in A$ (Σχ. α)



- Παρουσιάζει στο $x_0\in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x)\ge f(x_0)$ για κάθε $x\in A$ (Σχ. β).

13.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο ή ελάχιστο, αυτό θα ισχύει σε μοναδικό σημείο του πεδίου ορισμού της».
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής
β) Η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$ παρουσιάζει μέγιστο, το y = 1, σε καθένα από τα σημεία $2\kappa\pi+\pi/2,\ \kappa\in\mathbb{Z}$ και ελάχιστο, το y = −1, σε καθένα από τα σημεία $2\kappa\pi-\pi/2,\ \kappa\in\mathbb{Z}$, αφού $-1\le\eta\mu x\le1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

14. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν παρουσιάζουν ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο ».
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

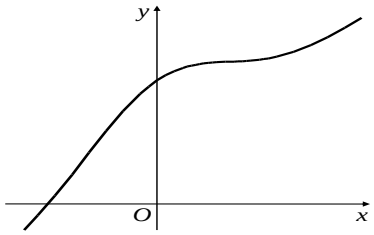
α) Αληθής
β) Οι συναρτήσεις $f(x)=x,\ g(x)=x^3$ δεν έχουν ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο.

15. Πότε μια συνάρτηση λέγεται 1-1; Ε 2005, Ε 2015

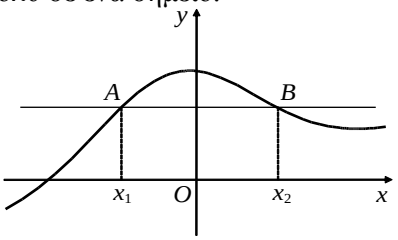
Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση $1-1$, όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1\neq x_2$, τότε $f(x_1)\neq f(x_2)$.
Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύεται ότι:
Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι συνάρτηση $1-1$, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $f(x_1)=f(x_2)$ τότε $x_1=x_2$.

ΣΧΟΛΙΑ

- Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι $1-1$, αν και μόνο αν:
  - Για κάθε στοιχείο *y* του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς *x*.
  - Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.



συνάρτηση 1-1

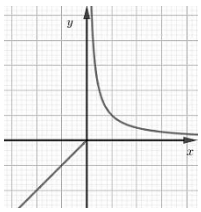


συνάρτηση όχι 1-1

- Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε προφανώς, είναι συνάρτηση 1-1.

16. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε είναι και γνησίως μονότονη.»
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. Κ2018

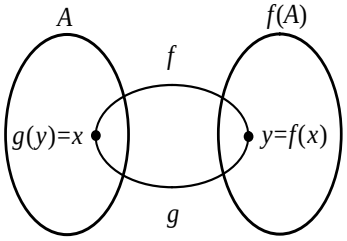
α) Ψευδής
β) Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 0\\ \dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$ είναι 1-1 και δεν είναι γνησίως μονότονη.



17. Πως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} μιας συνάρτησης f και τι γνωρίζεται για τις γραφικές τους παραστάσεις;

Έστω μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι $1-1$, τότε για κάθε στοιχείο *y* του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο *x* του πεδίου ορισμού της Α για το οποίο ισχύει $f(x)=y$.
Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g:f(A)\to\mathbb{R}$ με την οποία κάθε $y\in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x\in A$ για το οποίο ισχύει $f(x)=y$.

Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:
– έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f,
– έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και
– ισχύει η ισοδυναμία: $f(x)=y \Leftrightarrow g(y)=x$.



Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y, τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f. Για το λόγο αυτό η g λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με f^{-1}. Επομένως έχουμε

$$f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$$

οπότε $f^{-1}\left(f(x)\right)=x,\ x\in A$ και $f\left(f^{-1}(y)\right)=y,\ y\in f(A)$.

Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x′Oy′.

ΟΡΙΟ –ΣΥΝΕΧΕΙΑ

→ Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \text{ αν και μόνο αν } \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$$

→ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-\ell\right)=0$

→ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=\ell$

→ $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$

18. Ποια θεωρήματα ισχύουν για το όριο και τη διάταξη;

Για το όριο και τη διάταξη ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0

19. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν για κάθε x κοντά στο x_0 είναι $f(x)>0$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$»
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής
β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=|x|,\ x\neq 0$. Είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$, όμως $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

20. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)<g(x)$ σε μια περιοχή του x_0 τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.»
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=-x^2,\ x\neq 0$ και $g(x)=x^2,\ x\neq 0$.

Είναι $f(x)<g(x)$ για κάθε $x\neq 0$, όμως $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

21. Ποιες είναι οι ιδιότητες των ορίων;

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , τότε:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(kf(x)\right)=k\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ για κάθε σταθερά $k\in\mathbb{R}$.
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
4. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$.
5. $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$
6. $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)}=\sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$ εφόσον $f(x)\geq 0$ κοντά στο x_0 .
7. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{\nu}=\left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^{\nu},\ \nu\in\mathbb{N}^*$

22. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x),\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ τότε υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)$ ».
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x-1}$ και $g(x)=\sqrt{1-x}$. Είναι $A_f=[1,+\infty),\ A_g=(-\infty,1]$ και $A_{f+g}=\{1\}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-1}=0,\ \lim\limits_{x\to 1} g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{1-x}=0$, όμως το όριο της $f(x)+g(x)$ στο $x_0=1$ δεν έχει νόημα αφού δεν υπάρχει περιοχή του 1 στο πεδίο ορισμού για να ορίζεται το $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)+g(x)\right)$.

23. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)$ τότε υπάρχουν και τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x),\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ ».
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}2, & x\leq 0\\ x, & x>0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x, & x\leq 0\\ 2, & x>0\end{cases}$. Παρατηρούμε ότι

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=2,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0,$ δηλαδή δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=0,\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=2,$ δηλαδή δεν υπάρχει ούτε το $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$. Όμως $f(x)+g(x)=x+2,\ x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to 0}(x+2)=2$.

24. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)g(x)\right)$ τότε υπάρχουν και τα $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ »
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Έστω $f(x)=\begin{cases}0, & x>0\\ 5, & x\le 0\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}7, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$. Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=5$, δηλαδή δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=7$ δηλαδή δεν υπάρχει ούτε το $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$, όμως $f(x)g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)g(x)\right)=0$

25. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ τότε υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)g(x)\right)$.»
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x-1}$ και $g(x)=\sqrt{1-x}$. Είναι $A_f=[1,+\infty)$, $A_g=(-\infty,1]$ και $A_{f\cdot g}=\{1\}$. Είναι $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-1}=0$, $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{1-x}=0$, όμως το όριο της $f(x)g(x)$ στο $x_0=1$ δεν έχει νόημα αφού δεν υπάρχει περιοχή του 1 στο πεδίο ορισμού για να ορίζεται το $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x)g(x)\right)$.

26. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ τότε υπάρχουν και τα $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ »
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}-1, & x<x_0\\ 1, & x\ge x_0\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}1, & x<x_0\\ -1, & x\ge x_0\end{cases}$.

Παρατηρούμε ότι τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ δεν υπάρχουν στο $x_0\in\mathbb{R}$, όμως $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}-1, & x<x_0\\ -1, & x\ge x_0\end{cases}$, δηλαδή $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=-1$, $x_0\in\mathbb{R}$.

27. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: « $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\pm 1$»
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1, & x<x_0\\ -1, & x\ge x_0\end{cases}$. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ όμως $|f(x)|=1$, $x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=1$

28. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: « Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$ τότε και $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.»
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Αληθής

β) Από τις ιδιότητες απολύτων ισχύει ότι $-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0,\ \lim\limits_{x\to x_0}\left(-|f(x)|\right)=0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

29. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: « Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f^2(x)=0$ τότε και $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.»
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Αληθής

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|\Leftrightarrow-\sqrt{f^2(x)}\le f(x)\le\sqrt{f^2(x)}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f^2(x)}=\sqrt{0}=0,\ \lim\limits_{x\to x_0}\left(-\sqrt{f^2(x)}\right)=0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

30. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πολυώνυμο $P(x)$, ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$, $x_0\in\mathbb{R}$.

Έστω $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1x+\alpha_0$. Σύμφωνα με τις ιδιότητες ορίων, ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...\alpha_1x+\alpha_0\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu\right)+\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}\right)+\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_1x\right)+\lim_{x\to x_0}\alpha_0=$$
$$=\alpha_\nu\lim_{x\to x_0}x^\nu+\alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0}x^{\nu-1}+...+\alpha_1\lim_{x\to x_0}x+\alpha_0=\alpha_\nu x_0^\nu+\alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1}+...+\alpha_1x+\alpha_0=P(x_0)$$

31. Να αποδείξετε ότι για τα πολυώνυμα $P(x),Q(x)$,με $Q(x_0)\neq0, x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

32. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής. Ε 2016 Ε2020Π Κ2021

Έστω οι συναρτήσεις f,g,h. Αν $h(x)\le f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0 και
$\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\ell$,τότε και $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell$.

33. Ποια είναι τα βασικά τριγωνομετρικά όρια στο $x_0\in\mathbb{R}$;

1. $|\eta\mu x|\le|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$)
2. $\lim\limits_{x\to x_0}\eta\mu x=\eta\mu x_0$
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x_0$
4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$
5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$

34. Πως ορίζεται το όριο της σύνθεσης $f\circ g$ δύο συναρτήσεων f, g στο σημείο x_0;

Για να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(g(x)\right)$, της σύνθετης συνάρτησης $f\circ g$ στο σημείο x_0, εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε $u=g(x)$.
2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ και
3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell=\lim\limits_{u\to u_0} f(u)$.

Αποδεικνύεται ότι, αν $g(x)\neq u_0$ κοντά στο x_0, τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ, δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0} f\left(g(x)\right)=\lim_{u\to u_0} f(u).$$

35. Ποιες είναι οι ιδιότητες του μη πεπερασμένου ορίου $x_0\in\mathbb{R}$;

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$.
3. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0, ενώ
   αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.
4. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-f(x)\right)=-\infty$, ενώ
   αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-f(x)\right)=+\infty$.
5. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$
6. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$, ενώ
   αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)<0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.
7. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$.
8. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\kappa]{f(x)}=+\infty$

Συνέπειες

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{2\nu}}=+\infty, \nu\in\mathbb{N}^*$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=+\infty, \nu\in\mathbb{N}^*$, ενώ
   $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}=-\infty, \nu\in\mathbb{N}^*$,
   Δηλαδή δεν υπάρχει στο μηδέν το όριο της $f(x)=\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}, \nu\in\mathbb{N}^*$,

36.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Υπάρχει το όριο στο μηδέν της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}, \nu\in\mathbb{N}$ »

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. Κ2020Π

α) Ψευδής

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty$, ενώ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty$, οπότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

37.Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, αν ισχύει
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right] = 0$»
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. **Ε2018**

α) Ψευδής

β) Έστω $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ και $g(x) = -\dfrac{1}{x^4}$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ όμως

$$\lim_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x^4} = -\infty$$

38. Ποια είναι τα όρια πολυωνυμικής και ρητής συνάρτησης στο ∞ ;

→ Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\alpha_\nu \neq 0$, ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\alpha_\nu x^\nu\right) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\alpha_\nu x^\nu\right)$$

→ Για τη ρητή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0}$, $\alpha_\nu \neq 0$, $\beta_\mu \neq 0$, ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu}\right) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu}\right)$$

39. Ποια είναι τα όρια της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης στα άκρα του πεδίου ορισμού τους;

1. Αν $\alpha > 1$, τότε: $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} \log_\alpha x = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_\alpha x = +\infty$
2. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε: $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \log_\alpha x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_\alpha x = -\infty$

40. Τι ονομάζεται ακολουθία;

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$.

41. Πότε η ακολουθία (α_ν) έχει όριο $\ell \in \mathbb{R}$;

Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $\ell \in \mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = \ell$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να ισχύει $|\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon$.

42. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 του πεδίου ορισμού της; **Κ2015, Ε 2009**

Έστω μια συνάρτηση f και ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 , όταν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

43. Πότε μια συνάρτηση θα λέμε ότι είναι συνεχής;

Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέμε ότι είναι συνεχής συνάρτηση.

44. Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο (α, β); Ε 2004

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) .

45. Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$; Κ 2008,Κ 2012,Ε 2004, Κ 2017 ,Ε2021

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$.

46. Αν δύο συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο x_0, τότε ποιες άλλες συναρτήσεις που ορίζονται μέσω των f,g είναι συνεχείς στο x_0;

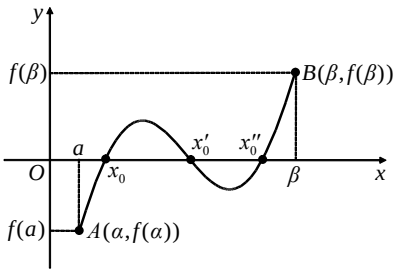
Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις: $f+g$, $c\cdot f$, όπου $c\in\mathbb{R}$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$, $|f|$ και $\sqrt[\nu]{f}$

Επιπλέον αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

47. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να «δώσετε» την γεωμετρική του ερμηνεία. Ε2014 Κ2020Π

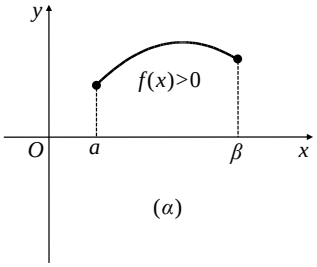
Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει $f(\alpha)f(\beta)<0$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.
Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ το ανοικτό διάστημα (α,β).

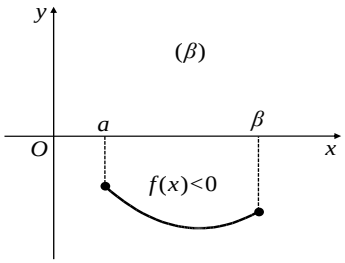
Γεωμετρική ερμηνεία
Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



ΣΧΟΛΙΟ
Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

— Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x\in\Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

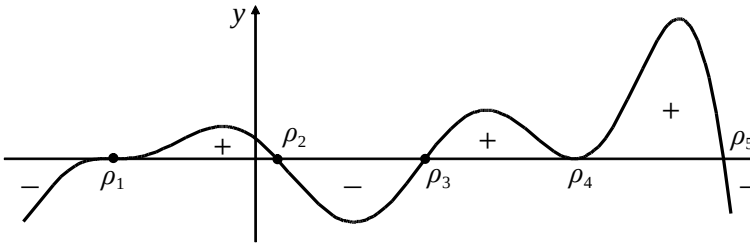




— Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι

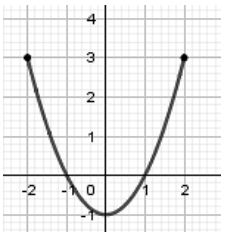
διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
Αυτό μας διευκολύνει στον προσδιορισμό του πρόσημου της f για τις διάφορες τιμές του x.
Συγκεκριμένα, ο προσδιορισμός αυτός γίνεται ως εξής:

α) Βρίσκουμε τις ρίζες της f.



β) Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε έναν αριθμό και βρίσκουμε το πρόσημο της f στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της f στο αντίστοιχο διάστημα.

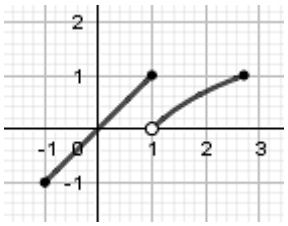
48. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: « Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$ τότε $f(\alpha)f(\beta)<0$»
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.



α) Ψευδής

β) Έστω $f(x)=x^2-1,\ x\in[-2,2]$. Η f είναι συνεχής στο $[-2,2]$,
η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες τις -1, 1 στο $(-2,2)$ όμως
$f(-2)=3, f(2)=3$ και $f(-2)f(2)>0$

49. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$ και $f(\alpha)f(\beta)<0$ τότε η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ »
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.



α) Ψευδής

β) Έστω $f(x)=\begin{cases} x, & -1\le x<1 \\ \ln x, & 1\le x\le e \end{cases}$. Για $x\in[-1,1)$ είναι $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$,
ενώ για $x\in[1,e]$ είναι $f(x)=0\Leftrightarrow \ln x=0\Leftrightarrow x=1$, δηλαδή η $f(x)=0$
έχει δύο ρίζες και $f(-1)=-1, f(e)=\ln e=1$ δηλαδή $f(-1)f(1)<0$,
όμως η f δεν είναι συνεχής στο $[-1,e]$ αφού δεν είναι συνεχής στο $x_0=1$. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=0$

50. Να διατυπώσετε το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών και να το αποδείξετε. Κ 2005, Κ 2015 ,Κ2020

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:
- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

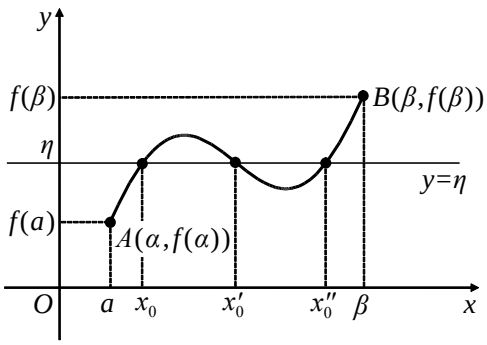
τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η *g* είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$, αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.



Γεωμετρική ερμηνεία

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και τα ακριανά σημεία βρίσκονται σε διαφορετικό ύψος τότε κάθε οριζόντια ευθεία $y=\eta$ με $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$ τέμνει την C_f τουλάχιστον σε ένα σημείο.

51. Τι γνωρίζετε για την εικόνα ενός διαστήματος Δ μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης;

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

52. Να διατυπώσετε για μια συνεχής συνάρτηση το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

Δηλαδή, υπάρχουν $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m=f(x_1)$ και $M=f(x_2)$, να ισχύει

$$\mathbf{m\le f(x)\le M,\quad για\ κάθε\quad x\in[\alpha,\beta]}.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m,M]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της. Τέλος, αποδεικνύεται ότι:

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B) όπου

$A=\lim\limits_{x\to\alpha^+}f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to\beta^-}f(x)$.

Αν, όμως, η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B,A).

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

53. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$; K 2000

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α, την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ. Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι $y-f(x_0)=\lambda(x-x_0)$, όπου $\lambda=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

54. Πότε μια συνάρτηση λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; K 2004, K 2009, K2018

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Παρατήρηση

- Αν θέσουμε $x=x_0+h$ τότε $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
- Πολλές φορές το $h=x-x_0$ συμβολίζεται με Δx ενώ το $f(x_0+h)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ συμβολίζεται με $\Delta f(x_0)$ οπότε $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$.

55. Πότε ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά και πότε προς τα αριστερά κοντά στο t_0 ;

Όταν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά, τότε κοντά στο t_0 ισχύει $\dfrac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}>0$, οπότε είναι $\upsilon(t_0)\geq 0$,

ενώ, όταν το κινητό κινείται προς τα αριστερά κοντά στο t_0 ισχύει $\dfrac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}<0$,οπότε είναι $\upsilon(t_0)\leq 0$

56. Πως ορίζεται η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 ;

Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0 , είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x=s(t)$ τη χρονική στιγμή t_0 . Δηλαδή $\upsilon(t_0)=s'(t_0)$.

57. Τι ονομάζεται κλίση της f στο x_0 και ποια είναι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο x_0 ;

Κλίση της f στο x_0 ή συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο x_0, ονομάζεται το $f'(x_0)$.
Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

58. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. Κ 2000,Κ 2003,Ε 2007, Ε 2013

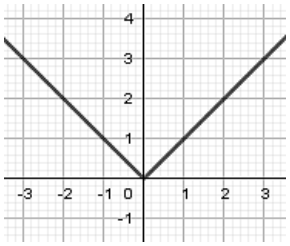
Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$,οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

59. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν η μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α

α) Ψευδής.



β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=|x|$.
Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό,
αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$, ενώ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{x}=-1$.

60. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν η μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α

α) Αληθής.
β) Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο x_0 τότε βάση του θεωρήματος θα ήταν και συνεχής στο σημείο αυτό που δεν ισχύει.

61. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της Α;

Η f είναι παραγωγίσιμη στο Α ή, απλά, παραγωγίσιμη, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

62. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) του πεδίου ορισμού της;

Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$.

63. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της; Κ 2013,Ε 2010 ,Κ2020

Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-}\dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}$.

64. Ποια συνάρτηση ονομάζεται πρώτη παράγωγος μιας συνάρτησης f; Πως ορίζεται η νιοστή παράγωγος μιας συνάρτησης f με $\nu\geq 3$; Κ 2020Π

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και A_1 το σύνολο των σημείων του Α στο οποίο αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x\in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f':A_1\to\mathbb{R}$, $x\to f'(x)$, η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f ή απλά παράγωγος της f.

Η νιοστή παράγωγος της f με $\nu\geq 3$ συμβολίζεται με $f^{(\nu)}$ και είναι: $f^{(\nu)}=\left[f^{(\nu-1)}\right]'$.

65. Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x)=c, c\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=0$, δηλαδή $(c)'=0$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{c-c}{x-x_0}=0$. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$, δηλαδή $(c)'=0$.

66. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=1$, δηλαδή $(x)'=1$.

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{x-x_0}{x-x_0}=1$. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}1=1$, δηλαδή $(x)'=1$.

67. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^\nu, \nu\in\mathbb{N}-\{0,1\}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, δηλαδή $(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}$.

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^\nu-x_0^\nu}{x-x_0}=\frac{(x-x_0)\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1}\right)}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1},\text{οπότε}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\cdots+x_0^{\nu-1}\right)=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\cdots+x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1},\text{δηλαδή }(x^\nu)'=\nu x^{\nu-1}.$$

68. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Ε 2005,Ε 2009

Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}$,οπότε

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, δηλαδή. $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Στο $x_0=0$ είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$, δηλαδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

69. Αν οι συναρτήσεις $f,g:A\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο $x_0\in A$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$. Κ 2020Π Ε2020

Για $x\neq x_0$, ισχύει: $\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$

Δηλαδή $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Γενίκευση: $(f_1+f_2+\ldots+f_k)'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)+\ldots+f_k'(x)$

70. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Αν δύο συναρτήσεις $f,g:A\to\mathbb{R}$ δεν είναι παραγωγίσιμες στο $x_0\in A$, τότε και η $f+g$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0»
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Έστω $f(x)=1-|x|$, $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=|x|$. Οι f,g δεν είναι παραγωγίσιμες στο $x_0=0$ αφού

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-x}{x}=-1$ και

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1,\ \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1.$

Είναι $(f+g)(x)=1-|x|+|x|=1$ και $(f+g)'(x)=0$.

71. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0; Ποια είναι η παράγωγός της στο σημείο αυτό;

Η $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.

Σημείωση

Αν οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ τότε $(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

Το προηγούμενο θεώρημα επεκτείνεται και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Έτσι για τις τρείς συναρτήσεις ισχύει: $(f(x)g(x)h(x))'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$

72. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0)\neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0; Ποια είναι η παράγωγός της στο σημείο αυτό;

Η $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

Αν οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ τότε $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

73. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή $\left(x^{-\nu}\right)'=-\nu x^{-\nu-1}$.

Πράγματι, για κάθε $x\neq 0$ έχουμε: $\left(x^{-\nu}\right)'=\left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)'=\frac{(1)'x^{\nu}-1(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2}=\frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}=-\nu x^{-\nu-1}$.

74. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1=\mathbb{R}-\{x|\sigma\upsilon\nu x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή $(\varepsilon\varphi x)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbb{R}_1$ έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)'=\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

75. Πότε η συνάρτηση $f(g(x))$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και πότε σε ένα διάστημα Δ;

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$

Γενικά, αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $\left(f\left(g(x)\right)\right)'=f'(g(x))g'(x)$.

Δηλαδή, αν $u=g(x)$, τότε $\left(f(u)\right)'=f'(u)u'$.

76. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$.

Πράγματι, αν $y=x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$ και θέσουμε $u=\alpha\ln x$, τότε έχουμε $y=e^{u}$. Επομένως,

$$y'=\left(e^{u}\right)'=e^{u}\cdot u'=e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

77. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, $\alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\alpha^x\ln\alpha$, δηλαδή $\left(\alpha^x\right)'=\alpha^x\ln\alpha$

Πράγματι, αν $y=\alpha^x=e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u=x\ln\alpha$, τότε έχουμε $y=e^u$. Επομένως,
$y'=(e^u)'=e^u\cdot u'=e^{x\ln\alpha}\cdot\ln\alpha=\alpha^x\ln\alpha$.

78. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$ K 2008

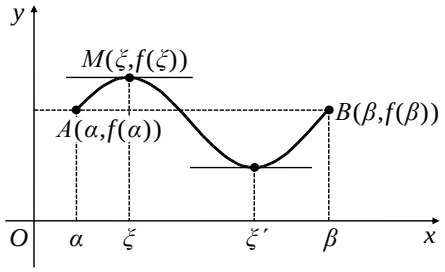
– αν $x>0$, τότε $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$, ενώ
– αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$.
Επομένως, $y'=(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$ και άρα $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$.

79. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x,y συνδέονται με τη σχέση $y=f(x)$, τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0;

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x,y συνδέονται με τη σχέση $y=f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

80. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά. E 2007,E 2012 ,E2020,E2021

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και $f(\alpha)=f(\beta)$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=0$.
Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



81. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Αν μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$ τότε $f(\alpha)=f(\beta)$.»
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Στη συνάρτηση $f(x)=x^2$, $x\in[-1,2]$, παρατηρούμε ότι είναι συνεχής στο $[-1,1]$, είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ με $f'(x)=2x$, είναι $f'(0)=0$ όμως $f(-1)=1$, $f(2)=4$ δηλαδή $f(-1)\neq f(2)$.

82. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Αν μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ τότε $f(\alpha)\neq f(\beta)$».
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Αληθής

β) Αν ήταν $f(\alpha)=f(\beta)$ τότε λόγω του θεωρήματος Rolle θα υπήρχε $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$ που είναι άτοπο.

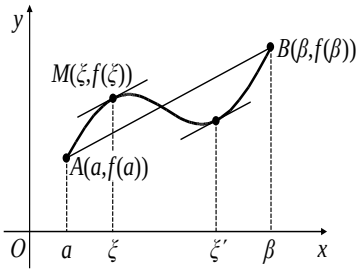
83. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέσης τιμής και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.
Κ 2003, Κ 2013,Ε 2008, Κ 2016

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$



Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας ΑΒ.

84. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν
- **η f είναι συνεχής στο Δ και**
- **$f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι:**

η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ. **Κ 2009, Κ 2014, Ε 2004** ,Ε2021

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1=x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1<x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Επομένως, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ (1)

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

- Αν $x_2<x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι. $f(x_1)=f(x_2)$.Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

85. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν για μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σύνολο Α που αποτελείται από ένωση διαστημάτων, είναι παραγωγίσιμη στο Α και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Α, τότε η f είναι σταθερή στο Α»
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

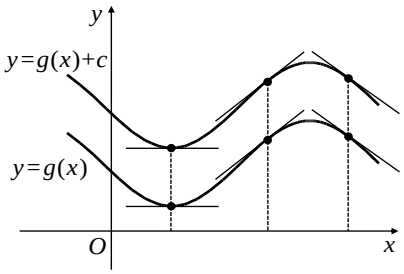
β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-1 & , \quad x<0\\ 1 & , \quad x>0\end{cases}$. Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

86.Έστω δυο συναρτήσεις f,g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν
- **οι f,g είναι συνεχείς στο Δ και**
- **$f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει: $f(x)=g(x)+c$**

Η συνάρτηση $f-g$ *είναι* συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in\Delta$ ισχύει

$$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x)=c$, οπότε $f(x)=g(x)+c$.



87. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις που είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και είναι ίσες με τη πρώτη τους παράγωγο»
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Αληθής

β) $f'(x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)=ce^x,\ c\in\mathbb{R}$

88. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.
- **Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.**
  Κ 2006, Κ 2012, Ε 2000, Κ 2017 Κ2021
- **Αν $f'(x)<0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.**

Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x)>0$.

Έστω $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1)<f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε έχουμε $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$.

Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$, οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

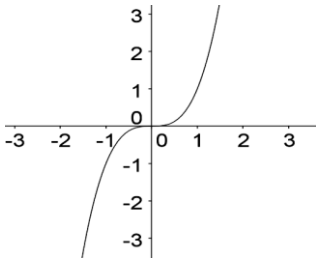
- Στην περίπτωση που είναι $f'(x)<0$ εργαζόμαστε αναλόγως.

89. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Αν μια f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ, τότε $f'(x)>0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ »
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. Κ 2020

α) Ψευδής

β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3$.

Είναι $f'(x)=3x^2$, και $f'(0)=0$, Δηλαδή, βλέποντας το σχήμα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, χωρίς να είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.



90. Να δώσετε τους ορισμούς για το τοπικό μέγιστο Κ 2012, το τοπικό ελάχιστο Κ 2015 και το τοπικό ακρότατο. Ε2020

- Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$.
  Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f.

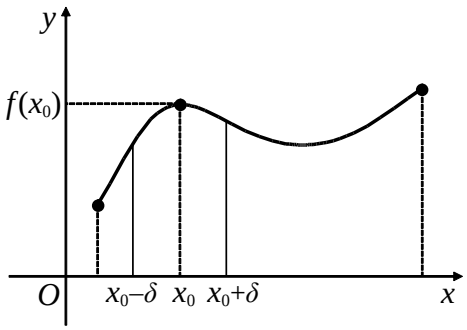
- Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f.
- Τα τοπικά μέγιστα και τα τοπικά ελάχιστα της f λέγονται τοπικά ακρότατα αυτής.

91. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα του Fermat.
Κ 2011, Κ 2004, Ε 2013, Ε 2016, Ε 2017

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο.



Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και

$f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. (1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Επομένως,

— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \qquad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

92. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Έστω συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο x_0 τότε $f'(x_0) = 0$».
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής
β) Η συνάρτηση $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$ αφού $f(x) \geq 0 = f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όμως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό και δεν ορίζεται το $f'(0)$.

93. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Έστω συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν $f'(x_0) = 0$ τότε η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο x_0».
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Ψευδής

β) Η συνάρτηση $f(x)=x^3$, $x\in\mathbb{R}$ έχει $f'(0)=0$ όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

94. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακρότατων και ποια σημεία ονομάζονται κρίσιμα; Ε 2013

Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:
1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).
Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται και είναι συνεχής ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ.

95. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι:
i) Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.
Ε 2012, Κ 2016 ,Ε2020Π
ii) Αν $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

i) Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0]$. (1)
Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in[x_0,\beta)$. (2)
Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.
ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.

96. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).
Ε 2014, Ε2018

Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.
Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.
— Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.
— Αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.
— Τέλος, αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.
Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).
Ομοίως, αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

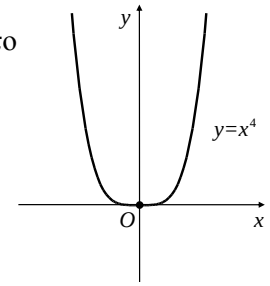
97. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ, πότε θα λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω και πότε προς τα κάτω;
Κ 2006, Κ 2010, Κ 2013

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι:
• Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.
• Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

98. Με βάση ποιο θεώρημα εξετάζουμε την κυρτότητα μιας συνάρτησης f; Ισχύει το αντίστροφό του; Δώστε παράδειγμα. Ε2020Π

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.

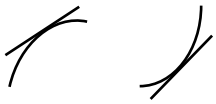
- Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ
- Αν $f''(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κοίλη στο Δ.



Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα,
έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4$ (Σχ. 42). Επειδή η $f'(x)=4x^3$
είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η $f(x)=x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
Εντούτοις, η f'' δεν είναι θετική στο 0 αφού $f''(0)=0$.

99. Ποια είναι η σχετική θέση της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με μία εφαπτομένη της με βάση τη κυρτότητα της συνάρτησης f;

Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ' ένα διάστημα *Δ*, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται "κάτω" (αντιστοίχως "πάνω") από τη γραφική της παράσταση , με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.



100. Πότε το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f;

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

- η f είναι κυρτή στο (α,x_0) και κοίλη στο (x_0,β), ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

101. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής;
Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της, τότε ποια σχέση ισχύει για τη δεύτερη παράγωγο της f στο x_0;
Πότε ένα σημείο είναι βέβαιο σημείο καμπής; Ε 2017

Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:
i) τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται, και
ii) τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f''.
Αν το $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0)=0$.
Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α,β) και $x_0\in(\alpha,\beta)$. Αν

- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και
- ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0,f(x_0))$

τότε το $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.

102. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
« Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής».
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

α) Αληθής

β) Είναι $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$ και $f''(x)=6\alpha x+2\beta$. Είναι $f\cap\downarrow\left(-\infty,-\frac{\beta}{3\alpha}\right]$, $f\cup\uparrow\left[-\frac{\beta}{3\alpha},+\infty\right)$, οπότε έχει σημείο καμπής το $\left(-\frac{\beta}{3\alpha},f\left(-\frac{\beta}{3\alpha}\right)\right)$.

103. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f;
Κ 2010, Ε 2003,Ε 2015 ,Ε2020Π

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

104. Πότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$); **Κ 2007, Ε 2016**

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\ell$), τότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

105. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, (αντιστοίχως στο $-\infty$); **Κ 2005, Κ 2011**

Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0$, αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0$.

Θεώρημα: Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta\in\mathbb{R}$

αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta\in\mathbb{R}$

ΣΧΟΛΙΑ

1. Αποδεικνύεται ότι:
— Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.
— Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

2. Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε:
— Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.
— Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.
—Στο $+\infty$, $-\infty$,εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$,αντιστοίχως $(-\infty,\alpha)$

106. Να διατυπώσετε τους κανόνες De L' Hospital

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

107. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζετε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ; Ε 2006,Ε 2011,Ε 2014

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

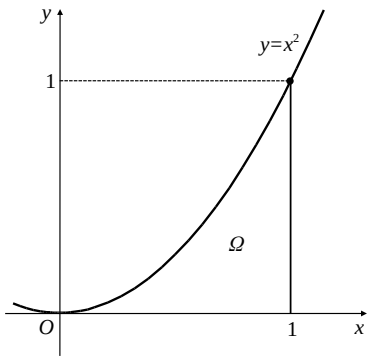
108. Να αποδείξετε ότι:
Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε
- **όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$,είναι παράγουσες της f στο Δ και**
- **κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$.**

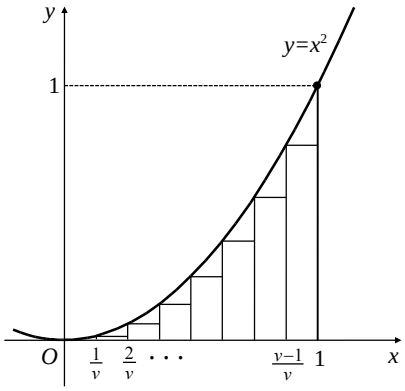
Κ 2010, Ε 2001, Ε 2003, Ε 2015

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in\mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού $G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.
- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε $G'(x)=F'(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x\in\Delta$.

109. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$ είναι $E(\Omega)=\frac{1}{3}$.





Μια μέθοδος να προσεγγίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν είναι η εξής:

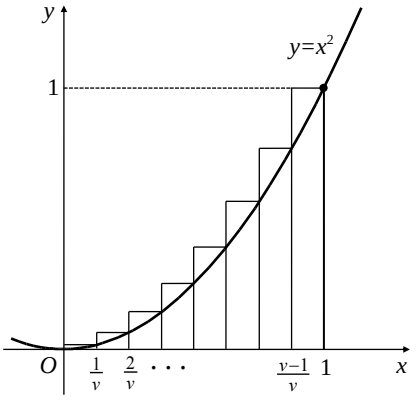
Χωρίζουμε το διάστημα $[0,1]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x=\frac{1}{\nu}$, με άκρα τα σημεία: $x_0=0$,

$x_1=\frac{1}{\nu}$, $x_2=\frac{2}{\nu}$, ……, $x_{\nu-1}=\frac{\nu-1}{\nu}$, $x_\nu=\frac{\nu}{\nu}=1$.

- Σχηματίζουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα υποδιαστήματα αυτά και ύψη την ελάχιστη τιμή της f σε καθένα από αυτά. (Σχ. 6). Μια προσέγγιση του εμβαδού που ζητάμε είναι το άθροισμα, ε_ν, των εμβαδών των παραπάνω ορθογωνίων. Δηλαδή, το:

$$\varepsilon_\nu=f(0)\frac{1}{\nu}+f\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}+f\left(\frac{2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}+\cdots+f\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}=\frac{1}{\nu}\left[0^2+\left(\frac{1}{\nu}\right)^2+\left(\frac{2}{\nu}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{\nu^3}[1^2+2^2+\cdots+(\nu-1)^2]=\frac{1}{\nu^3}\frac{(\nu-1)\cdot\nu(2\nu-1)}{6}=\frac{2\nu^2-3\nu+1}{6\nu^2}.$$



• Αν, τώρα, σχηματίσουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα παραπάνω υποδιαστήματα και ύψη την μέγιστη τιμή της f σε καθένα απ' αυτά (Σχ. 7), τότε το άθροισμα

$$E_\nu = f\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + f\left(\frac{2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + \cdots + f\left(\frac{\nu}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}$$

των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι μια ακόμη προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού. Είναι όμως,

$$E_\nu = f\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + f\left(\frac{2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu} + \cdots + f\left(\frac{\nu}{\nu}\right)\cdot\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu}\left[\left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + \left(\frac{2}{\nu}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\nu}{\nu}\right)^2\right]$$

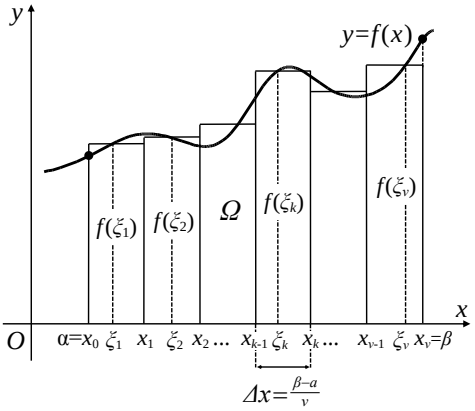
$$= \frac{1}{\nu^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + \nu^2) = \frac{1}{\nu^3}\cdot\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} = \frac{2\nu^2+3\nu+1}{6\nu^2}.$$

Το ζητούμενο, όμως, εμβαδόν Ε βρίσκεται μεταξύ των ε_ν και E_ν. Δηλαδή ισχύει $\varepsilon_\nu \le E \le E_\nu$, οπότε

$\lim\limits_{\nu\to\infty}\varepsilon_\nu \le E \le \lim\limits_{\nu\to\infty}E_\nu$. Επειδή $\lim\limits_{\nu\to\infty}\varepsilon_\nu = \lim\limits_{\nu\to\infty}E_\nu = \frac{1}{3}$, έχουμε $E = \frac{1}{3}$.

110. Να δώσετε τον ορισμό του εμβαδού χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με $f(x) \ge 0$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = α και x = β.

Για να ορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω εργαζόμαστε ως εξής:



• Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$, με τα σημεία

$\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$.

• Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_κ και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_\kappa)$. Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι

$$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x = [f(\xi_1) + \cdots + f(\xi_\nu)]\Delta x$$

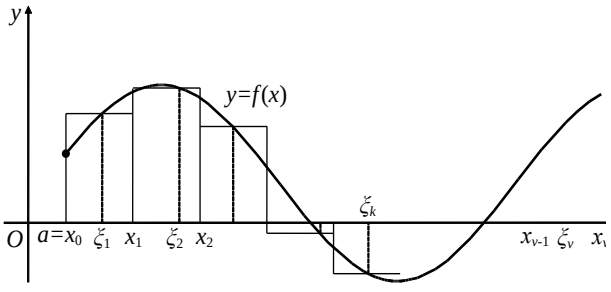
• Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{\nu\to+\infty} S_\nu$.

Αποδεικνύεται ότι το $\lim\limits_{\nu\to+\infty} S_\nu$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_κ. Το όριο αυτό ονομάζεται εμβαδόν του επιπέδου χωρίου Ω και συμβολίζεται με $E(\Omega)$. Είναι φανερό ότι $E(\Omega) \ge 0$.

111. Να δώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$.

Με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{\beta-\alpha}{\nu}$.

Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, για κάθε $\kappa \in \{1,2,\ldots,\nu\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα



$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\kappa)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x$ το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής:

$S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x$ (1) .Αποδεικνύεται ότι,

"Το όριο του αθροίσματος S_ν, δηλαδή το $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ (1) υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ".

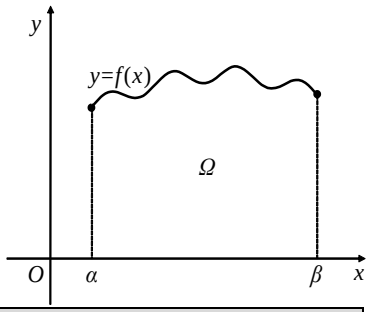
Το παραπάνω όριο (1) ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται "ολοκλήρωμα της f από το α στο β". Δηλαδή,

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$$

Από τους ορισμούς του εμβαδού και του ορισμένου ολοκληρώματος προκύπτει ότι:

Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$. Δηλαδή,

$\int_\alpha^\beta f(x)dx = E(\Omega)$.



Επομένως Αν $f(x)\geq 0$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$

112. Ποιες οι ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος;

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

Έστω f,g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Τότε ισχύουν

- $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx$
- $\int_\alpha^\beta [f(x)+g(x)]dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$ και γενικά
- $\int_\alpha^\beta [\lambda f(x)+\mu g(x)]dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx + \mu\int_\alpha^\beta g(x)dx$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$, τότε ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3ο

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$.

113. Ποιος είναι ο τύπος της κατά παράγοντες ολοκλήρωσης;

$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$ όπου f',g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$.

114. Ποιος είναι ο τύπος της ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής;

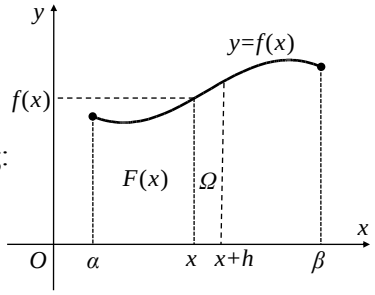
$$\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du,$$

όπου f,g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u=g(x)$, $du=g'(x)dx$ και $u_1=g(\alpha)$, $u_2=g(\beta)$.

115. Αν f μια συνεχής συνάρτηση σ΄ ένα διάστημα Δ και α ένα σημείο του Δ, να γράψετε τι γνωρίζετε συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$.

Η συνάρτηση F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, δηλαδή

$F'(x)=\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)'=f(x)$ για κάθε $x\in\Delta$.



- Εποπτικά το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει ως εξής:

$F(x+h)-F(x)=\int_{x}^{x+h} f(t)dt=$ Εμβαδόν του χωρίου $\Omega\approx f(x)\cdot h$, για μικρά $h>0$.

Άρα, για μικρά $h>0$ είναι $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}\approx f(x)$, οπότε

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$$

116. Να διατυπώσετε το θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού και να το αποδείξετε.
Κ 2002, Κ 2013, Ε 2008, Κ2018

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$.

Απόδειξη

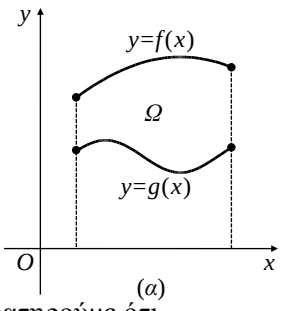
Η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $G(x)=F(x)+c$. (1)

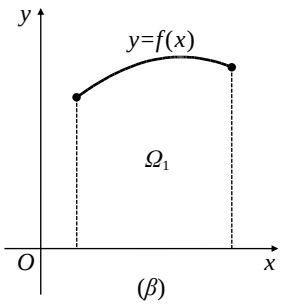
Από την (1), για $x=\alpha$, έχουμε $G(\alpha)=F(\alpha)+c=\int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt+c=c$, οπότε $c=G(\alpha)$.

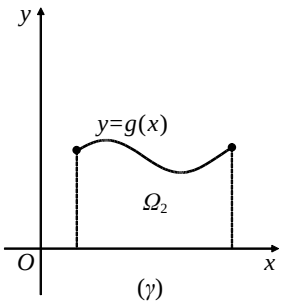
Επομένως, $G(x)=F(x)+G(\alpha)$ οπότε, για $x=\beta$, έχουμε

$G(\beta)=F(\beta)+G(\alpha)=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt+G(\alpha)$ και άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$.

117. Έστω, δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g, και τις ευθείες x = α και x = β είναι: $E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$







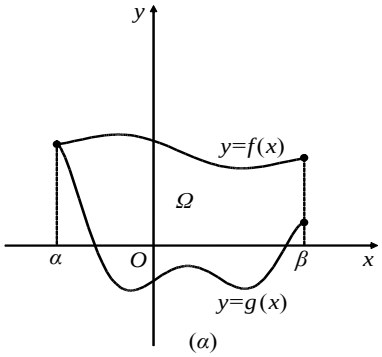
Παρατηρούμε ότι

$E(\Omega)=E(\Omega_1)-E(\Omega_2)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx-\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx$. Επομένως,

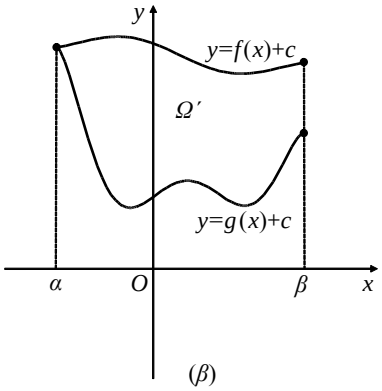
$$E(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)-g(x))dx.$$

118. Έστω, δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $g(x)\le f(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g, και τις ευθείες x = α και x = β είναι: $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta (f(x)-g(x))dx$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει αριθμό $c\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x)+c\ge g(x)+c\ge 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω'



(α)



(β)

Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (1), έχουμε

$E(\Omega)=E(\Omega')=\int_\alpha^\beta[(f(x)+c)-(g(x)+c)]dx=\int_\alpha^\beta(f(x)-g(x))dx$.Άρα $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta(f(x)-g(x))dx$.

119. Έστω, μια συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g, του άξονα x΄x και τις ευθείες x = α και x = β είναι: $E(\Omega)=-\int_\alpha^\beta g(x)dx$

Επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=0$, έχουμε

$E(\Omega)=\int_\alpha^\beta(f(x)-g(x))dx=\int_\alpha^\beta[-g(x)]dx=-\int_\alpha^\beta g(x)dx$.

Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$,

τότε $E(\Omega)=-\int_\alpha^\beta g(x)dx$

