# $2^{ο}$ ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

| | |
|---|---|
| **ΜΑΘΗΜΑ :** | **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ** |
| **ΕΝΟΤΗΤΑ:** | **§ 2.1 Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους** |
| **ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:** | |

**Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**1.** Δίνονται οι αριθμοί:

$$0,\quad 3,\quad -5,\quad \frac{2}{3},\quad \sqrt{2},\quad -7{,}13,\quad 4{,}\overline{12},\quad \frac{\sqrt{3}}{5}$$

Να βρείτε ποιοι από τους παραπάνω αριθμούς είναι:

α) φυσικοί, β) ακέραιοι, γ) ρητοί,

δ) άρρητοι, ε) πραγματικοί.

**2.** Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = -2\left[3(x-1)-(x+3)\right]-\left[-(-x-2)-2(x+1)\right]$$

και $B = (x+1)(x-4)-(x-2)(x-3)$

α) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις Α και Β.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει:

i) $AB = 0$ ii) $AB \neq 0$

**3.** Αν α, β, γ και δ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

α) $\beta\gamma - \alpha\delta = 2$, β) ο $\beta\delta - \alpha\gamma$ είναι περιττός αριθμός,

γ) ο $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ είναι άρτιος αριθμός, αλλά όχι πολλαπλάσιο του 4.

**4.** Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{2\alpha-5\gamma-\varepsilon}{2\beta-5\delta-\zeta}=\frac{\alpha}{\beta},\quad \text{όπου } \beta\delta\zeta(2\beta-5\delta-\zeta)\neq 0$$

**5.** α) Να υπολογίσετε τις δυνάμεις $2^5$, $5^{-2}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$, $23^0$ και $0^0$.

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

i) $(-2)^4$ και $-2^4$ ii) $(-2)^3$ και $-2^3$

iii) $(-7)^{41}$ και 0 iv) $(-13)^{152}$ και 0

**6.** Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = 8-3\cdot 2^3-(-1)^7\left[(2^6:4+3^3:3):5-3^2\right]$$

**7.** Γνωρίζουμε ότι ισχύει η πρόταση:

«Αν $\alpha=\beta$, τότε $\alpha^\nu=\beta^\nu$.»

Να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης.

**8.** Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των δυνάμεων:

α) $2^{-6}\cdot 2^{11}$ β) $3^{21}:3^{18}$ γ) $2^7\cdot 5^7$

δ) $\frac{18^4}{9^4}$ ε) $\frac{8^{25}\cdot 0{,}5^{15}}{4^{28}}$ στ) $8^{10}\cdot 9^{15}\cdot 6^{-30}$

**9.** Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τους αριθμούς:

α) 1.230.000.000 β) 0,00000025

γ) $(3\cdot 10^5)(4\cdot 10^7)$ δ) $0{,}000008\cdot 0{,}0006$

**10.** Αν $x=9$ και $y=\frac{1}{27}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{(x^{-3}y^{-2})^4:(x^7y^5)^{-2}}{(x^{-2}y^{-1})^2}$$

**11.** Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A=(x^2+2x)^3-(x^3-3x)^2-(4x^2-3x)(4x^2+3x)$$

**12.** Αν $x+\frac{1}{x}=3$, να βρείτε την τιμή των παραστάσεων $A=x^2+\frac{1}{x^2}$ και $B=x^3+\frac{1}{x^3}$.

**13.** Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $(2\alpha-\beta)(2\alpha+\beta)-(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=2\alpha^2-3\beta^2$

β) $(x-1)^3+(2x)^2=x(x+1)^2-(x-1)^2$

**14.** Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β, με $\alpha\neq 0$, ισχύει:

$$(\alpha+\beta)^3+\alpha(\alpha-3\beta)(\alpha+3\beta)=(\beta-\alpha)^3$$

να αποδείξετε ότι $\alpha^2=\beta^2$.

**15.** Αν ισχύει $\alpha-\beta=3$, να αποδείξετε ότι $3\alpha-\beta^2-3\beta+2\alpha\beta=\alpha^2$.

**16.** Δίνεται ένας ακέραιος αριθμός α. Αν ο αριθμός $\alpha^2+2\alpha$ είναι άρτιος, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός α είναι άρτιος.

**17.** Με ένα αντιπαράδειγμα να αποδείξετε ότι ο ισχυρισμός:

«Για κάθε $\alpha>0$ ισχύει ότι $\alpha^3>\alpha^2$.»

δεν είναι αληθής.

**18.** Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A=x^7+x^5-x^3-x$ β) $B=x^2+6x-4y^2+9$

γ) $\Gamma=x+y-3x^2-6xy-3y^2$ δ) $\Delta=(x+y)^4-8(x+y)^2+16$

**19.** Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A=7\cdot 65^2-7\cdot 35^2$ β) $B=199^2+2\cdot 199+1$

**20.** Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παρακάτω παράσταση και στη συνέχεια να την απλοποιήσετε:

$$A=\frac{x^4-16}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-x}{x^2-2x}$$

**21.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $4x^3=9x$ β) $x^3+2x^2=9x+18$

**22.** Να λύσετε την εξίσωση:

$$(2x+5)^3+(3-5x)^3+(3x-8)^3=0$$

## Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

### Α. Αριθμητικές παραστάσεις

**1.** Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

**α)** $6 \cdot 2^2 + 7(-4) - (-2)^3$

**β)** $\left[-7(-3) - 2(-2^2) - 6(-3)^2\right] : (-5)$

**γ)** $\left[3 \cdot 2^3 - 4 \cdot 3^2 - 2(-2 - 7^0)\right]^2 : \left[1 - (-2)^3\right]$

**δ)** $\left[9(-2)^2 - 2^3 : (-4 + 2 \cdot 3)\right] : \left[-4^2 - 4(-6)\right]$

**2.** Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

**α)** $\left[-13^0 + \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{5}\right)^{-1}\right](-2 + 2^{-1}) - \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 0{,}5\right]$

**β)** $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - (-2)^{-2} + \left(-\frac{4}{3}\right)^{-1}\right] : \left[6 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\right]$

**3.** Να βρείτε τον αντίθετο και τον αντίστροφο του αριθμού:

$$x = \frac{\left[(-2)^2 + (-2)^3 - (-2)^4\right] : (-2)}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} + 2^{-3} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$$

**4.** Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

**α)** $\dfrac{\frac{5}{4} : \frac{2}{3} + \frac{3^2}{2^3} - 4^{-1} \cdot 2}{5 - \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} : \frac{2}{5}}$

**β)** $\left(\frac{3}{3 - 3^{-1}} - \frac{4 + 4^{-1}}{4}\right)^{-1} : \frac{1}{4^{-1} - 2^{-1}}$

### Β. Απλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

**5.** Αν $\alpha = -\frac{16}{5}$ και $\beta = \frac{1}{10}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = 5\alpha - 4\left[10\alpha - 3(\alpha - \beta) - 6(\alpha + \beta)\right]$$

**6.** Αν $x - y = -\frac{1}{5}$, να βρείτε τις τιμές των επόμενων παραστάσεων:

**α)** $A = -12x - 4(y - 2x) - 2(3y - 7x)$

**β)** $B = 5y - \left[-2(y - 2x) - 3(x - 2y)\right]$

**7.** Αν $\frac{y + 3}{x} = 2$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = -2\left[-1 - (4y - 3x)\right] - 10(y - x)$$

**8.** Αν οι αριθμοί x και y είναι αντίθετοι, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{3(x - 1) - (y + x) \cdot 2 - (1 - 3y)}{2 - \left[y(1 - x) - x(-y - 1)\right]}$$

**9.** Αν οι αριθμοί x και y είναι αντίστροφοι, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = -\frac{-3(x - 1) - (3 - 7x)}{\frac{(-18) : (-9)}{-\left[-(y - 1) - (1 - 2y)\right]}}$$

**10.** Οι αριθμοί $\alpha = x - 3y - 2$ και $\beta = 2y - 1$ είναι αντίθετοι. Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{-2\left[-(3y - 2x) - (x - 2y)\right]}{-4x - \left[-(y + 3x - 1) - 2(x - y)\right]}$$

### Γ. Άρτιοι και περιττοί αριθμοί – Πολ/σια φυσικού

**11.** Έστω α, β και γ τρεις διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι:

**α)** ο αριθμός $\alpha + 2\beta + \gamma$ είναι πολλαπλάσιο του 4,

**β)** ο αριθμός $\alpha + 2\beta + 3\gamma + 4$ είναι πολλαπλάσιο του 6,

**γ)** ο αριθμός $2\alpha + \beta + \gamma + 7$ είναι άρτιος, αλλά δεν είναι πολλαπλάσιο του 4.

**12.** Ο αριθμός α είναι άρτιος και ο αριθμός β είναι περιττός. Να αποδείξετε ότι:

**α)** ο αριθμός $\alpha + \beta + 1$ είναι άρτιος,

**β)** ο αριθμός $\alpha - \beta$ είναι περιττός,

**γ)** ο αριθμός $\alpha + 2\beta$ είναι άρτιος,

**δ)** ο αριθμός $2\alpha + 2\beta$ είναι άρτιος, αλλά δεν είναι πολλαπλάσιο του 4.

### Δ. Αναλογίες

**13.** Αν ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{5} \quad \text{και} \quad \alpha + \beta = 40$$

να βρείτε τους αριθμούς α και β.

**14.** Οι γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ανάλογες των αριθμών 2, 3, 4. Να βρείτε τις γωνίες αυτές.

**15.** Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ και δ, με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$, ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4 \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}$$

**α)** Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha = 3\beta \quad \text{και} \quad \delta = 5\gamma$$

**β)** Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$$

***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

**16.** Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{4x + 5y}{x - 4y} = -2$$

**α)** Να αποδείξετε ότι $y = 2x$.

**β)** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$$

***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

**17.** Αν ισχύει η αναλογία:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\delta}=2$$

να βρείτε τους λόγους:

**α)** $\frac{\alpha}{\delta}$ **β)** $\frac{\alpha+2\beta+\gamma}{\alpha-3\gamma+4\delta}$ **γ)** $\frac{\alpha^2-3\beta\gamma}{\beta^2+\gamma^2}$

**18.** Για τους αριθμούς α και β ισχύει:

$$\frac{\alpha}{4}=\frac{\beta}{6} \quad \text{και} \quad 3\alpha+2\beta=2$$

Να βρείτε:

**α)** τους αριθμούς α και β,

**β)** την τιμή της παράστασης:

$$A=-2\{-2\alpha-2[-\alpha(\beta-2)-\beta(1-\alpha)]\}$$

**19.** Αν ισχύει:

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=4 \quad \text{και} \quad \alpha+\beta=504$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{2016-[6-10x+2(4x-y-3)]}{-3(x-\omega)-3(y+\omega)}$$

## Ε. Ιδιότητες δυνάμεων

**20.** Να κάνετε τις πράξεις:

**α)** $(-2)^9:2^5$ **β)** $3^{11}:(-3)^8$

**γ)** $-4^6(-4)^{-4}$ **δ)** $(-2)^{15}:(-2)^{10}$

**ε)** $(-3)^{21}:3^{19}$ **στ)** $((-2)^3)^5(2^{-4})^3$

**21.** Να κάνετε τις πράξεις:

**α)** $2^{12}\cdot 8^{-5}(0,25)^{-4}$ **β)** $8^5\cdot 16^{-3}$

**γ)** $3^5\left(\frac{1}{9}\right)^8\cdot 27^3$ **δ)** $\frac{(2^{16}\cdot 8^{-4})^6}{(-0,5)^{-20}}$

**22.** Να κάνετε τις πράξεις:

**α)** $\frac{8^5\cdot 5^6}{4^6\cdot 5^5}$ **β)** $\frac{4^{15}\cdot 9^{14}}{6^{27}}$

**γ)** $\left(\frac{9}{8}\right)^4:\left(\frac{3^5}{2^7}\right)^2$ **δ)** $\frac{12^{13}}{16^6}:27^4$

**ε)** $\frac{8^9}{81}:\left(\frac{4^3}{6}\right)^5$ **στ)** $8^{-9}:\left(\frac{12^4}{18^2}\right)^{-5}$

**23.** Να γράψετε σε τυποποιημένη μορφή τα αποτελέσματα των επόμενων πράξεων:

**α)** $6.000.000\cdot 700.000$

**β)** $0,00007\cdot 0,0000008$

**γ)** $18.000.000:0,0000006$

**δ)** $0,000035:50.000$

**24.** Αν α, x, y $\neq 0$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

**α)** $\dfrac{\left(\frac{\alpha^{10}}{\alpha^7}\right)^5:\left(\frac{\alpha^{-3}}{\alpha^{-1}}\right)^{-7}}{\left[\left(\frac{1}{\alpha^3}\right)^4(\alpha^5)^2\right]^{-3}(\alpha^4)^{-2}}$

**β)** $\dfrac{\left(\frac{y^3}{x^2}\right)^4:\left[\left(\frac{y^{-5}}{x^{-4}}\right)^3(x^{-1}y^3)^{-5}\right]}{\left[\left(\frac{y^2}{x^3}\right)^{-4}\left(\frac{y}{x^3}\right)^3\right]^{-9}}$

**25.** Αν ισχύει ότι $xy=-2$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{(x^3y^2)^4:(x^{-2}y)}{(x^4y^2)^2}:\frac{x^{-3}:(y^2)^4}{(x^{-2}y^{-3})^3y}$$

**26.** Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α και β, με $\alpha\neq\beta$, για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}=\frac{\alpha}{\beta}$$

**α)** Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

**β)** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K=\frac{\alpha^{22}(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}(\alpha\beta)^{25}}$$

***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

**27.** Δίνονται οι αριθμοί:

$$\alpha=2^4\cdot 8^3\cdot 16^2\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}\left(\frac{1}{4}\right)^3 \quad \text{και}$$

$$\beta=0,5^4\cdot 0,25^3\left(\frac{1}{8}\right)^{10}$$

**α)** Να γράψετε τους αριθμούς α και β ως δυνάμεις με βάση το 2.

**β)** Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A=(\alpha^{-3}\beta^4)^{-3}:(\alpha:\beta^5)^3$$

**28.** Αν ο ν είναι ακέραιος αριθμός, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

**α)** $A=(-1)^{2\nu}+(-1)^{\nu}(-1)^{\nu+1}-(-1)^{4\nu+2}$

**β)** $B=(-1)^{\nu}(-1)^{\nu+1}(-1)^{\nu+3}(-1)^{3\nu+1}$

**γ)** $\Gamma=7(-1)^{\nu+4}-7(-1)^{\nu+16}$

**29.** Αν ο ν είναι φυσικός αριθμός, να αποδείξετε ότι:

**α)** ο αριθμός $x=2^{\nu+3}-2^{\nu}$ είναι πολλαπλάσιο του 7,

**β)** ο αριθμός $y=3^{\nu+2}-3^{\nu+1}-3^{\nu}$ είναι πολλαπλάσιο του 5.

## Ζ. Αξιοσημείωτες ταυτότητες

**30.** Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

**α)** $(3x+\ldots)^2=\ldots+6xy+\ldots$

**β)** $(4\alpha^3-\ldots)^2=\ldots-\ldots+25\beta^2$

**γ)** $(\ldots+\ldots)^2=9\alpha^2+12\alpha\beta+\ldots$

**δ)** $(\ldots-\beta)^2=\ldots-\alpha\beta+\ldots$

**ε)** $(x+\ldots)^2=\ldots+\frac{3}{2}x+\ldots$

**στ)** $(2x^2-\ldots)^2=\ldots-2x^5+\ldots$

**31.** Να συμπληρώσετε τα επόμενα κενά, ώστε να προκύψει άθροισμα ή διαφορά κύβων:

**α)** $(2\alpha+1)(\ldots-\ldots+\ldots)=\ldots$

**β)** $(3y-x)(\ldots+\ldots+\ldots)=\ldots$

**γ)** $(3\alpha+\ldots)(\ldots-12\alpha\beta+\ldots)=\ldots$

**δ)** $(\ldots-\ldots)(x^2+2x+\ldots)=\ldots$

**ε)** $(\ldots+\ldots)(9x^2-\ldots+4y^2)=\ldots$

**στ)** $(\ldots-2\beta)(\ldots+\alpha\beta+\ldots)=\ldots$

**32.** Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

**α)** $(3x+2)^2-(2x+3)^2=5(x+1)(x-1)$

**β)** $\dfrac{(\alpha-3\beta)^2-(\beta-3\alpha)^2}{8}=(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)$

**γ)** $x(-x-1)^2-(2x)^2=(-1+x)^2-(-x+1)^3$

**δ)** $(\omega+2)^3-6(\omega+1)^2=\omega^3+2$

**ε)** $(x^3+1)^2+(-x^2-1)^3=(2x)^3-3x^2(x+1)^2$

**33.** Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

**α)** $(3x-y)^3+(x-2y)^3+(3y-4x)^3=$
$=3(3x-y)(x-2y)(3y-4x)$

**β)** $(5-3x)^3-(2-x)^3-(3-2x)^3=$
$=3(5-3x)(x-2)(2x-3)$

## Η. Ταυτότητες υπό συνθήκη

**34.** Αν ισχύει:

$$(\alpha+1)^2-(\beta-1)^2-(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=6$$

να αποδείξετε ότι $\alpha+\beta=3$.

**35.** Αν $\alpha+\beta=1$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^3(\beta+1)-\beta^3(\alpha+1)=\alpha-\beta$$

**36.** Αν ισχύει $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$, να αποδείξετε ότι:

$$(\tau-\alpha)^2+(\tau-\beta)^2+(\tau-\gamma)^2+\tau^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

**37.** Αν ισχύει $\alpha+\beta+\gamma=x$, να αποδείξετε ότι:

$$(x-3\alpha)^3+(x-3\beta)^3+(x-3\gamma)^3=$$
$$=3(x-3\alpha)(x-3\beta)(x-3\gamma)$$

**38.** Για τους πραγματικούς μη μηδενικούς αριθμούς α, β και γ ισχύουν:

$$\alpha+\beta+\gamma=3 \quad \text{και}$$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=0$$

**α)** Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

**β)** Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=9$.

## Θ. Απαγωγή σε άτοπο – Αντιπαράδειγμα

**39.** Αν ο αριθμός $x^2$ είναι άρρητος, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός x είναι άρρητος.

**40.** Ο αριθμός α είναι ακέραιος. Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός $(\alpha+3)^2$ είναι άρτιος, τότε ο αριθμός α είναι περιττός.

**41.** Οι αριθμοί α και β είναι ακέραιοι. Αν ο αριθμός $(\alpha+2\beta+1)^2$ είναι άρτιος, να αποδείξετε ότι ο αριθμός α είναι περιττός.

**42.** Δίνονται οι ακέραιοι αριθμοί α και β. Αν οι αριθμοί β και $\alpha^2+\beta^2$ είναι περιττοί, να αποδείξετε ότι ο αριθμός α είναι άρτιος.

**43.** Με ένα αντιπαράδειγμα να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ισχυρισμοί δεν είναι αληθείς.

**α)** Για κάθε $\alpha>0$ ισχύει ότι:

$$\alpha>\frac{1}{\alpha}$$

**β)** Για κάθε $\alpha<5$ ισχύει ότι:

$$\alpha^2<25$$

**γ)** Για κάθε $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$, με $\alpha<5$ και $\beta<10$, ισχύει ότι $\alpha\beta<50$.

**δ)** Για κάθε $\alpha>6$ και $\beta>2$ ισχύει ότι:

$$\frac{\alpha}{\beta}>3$$

## Ι. Υπολογισμός τιμής παράστασης με συνθήκη

**44.** Αν ισχύει $(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)^2$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=(\alpha\beta-1)^{2016}$.

**45. α)** Αν ισχύει $2x+\dfrac{3}{x}=6$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A=8x^3+\frac{27}{x^3}$$

**β)** Αν ισχύει $x-\dfrac{1}{x}=2$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$B=x^3-\frac{1}{x^3}$$

**46.** Αν ισχύει $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=2$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

**α)** $A=\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}$ **β)** $B=\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}$

**γ)** $\Gamma=\alpha^4+\dfrac{1}{\alpha^4}$ **δ)** $\Delta=\alpha^7+\dfrac{1}{\alpha^7}$

**47.** Αν ισχύουν $\alpha+\beta=3$ και $\alpha^3+\beta^3=18$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

**α)** $A=\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$ **β)** $B=\alpha\beta$

**γ)** $\Gamma=\alpha^2+\beta^2$ **δ)** $\Delta=(\alpha-\beta)^2$

**48.** Αν για τον αριθμό α ισχύει ότι:

$$\alpha^2-7\alpha-1=0$$

να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

**α)** $\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}$ **β)** $\alpha^4+\dfrac{1}{\alpha^4}$

## Κ. Παραγοντοποίηση παραστάσεων

**49.** Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

**α)** $4\alpha^3-\alpha(\beta-\gamma)^2$

**β)** $x^5-x^3+8x^2-8$

**γ)** $\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-2\alpha-2\beta$

**δ)** $x^2+y^2+x^3+y^3+2xy$

**ε)** $\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2+2\alpha\beta-2\gamma\delta$

**στ)** $x^2+9y^2-2x+6y-6xy$

**50.** Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

**α)** $3x^4 - 3xy^3 + yx^3 - y^4$ **β)** $\alpha^3 + \alpha^2 + \frac{\alpha}{4}$

**γ)** $x^2 - 6x + 9 - y^2$ **δ)** $\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + 2\beta\gamma$

**ε)** $(x-1)^2 + 6(1-x) + 9$

**στ)** $\alpha(\alpha^2 - 1) + (\alpha - 1)^2 + 2\alpha - 2$

**51.** Να παραγοντοποιήσετε τις επόμενες παραστάσεις:

**α)** $(x^2 - 9)^2 - x^2 - 6x - 9$

**β)** $x^3 + 1 - 3(x^2 - 1)$

**γ)** $\alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha - 4\beta - 3$

**δ)** $x^8 - 27x^5 - x^4 + 27x$

**ε)** $(3x - 9)(x^2 - 9) - x^2 + 6x - 9$

**στ)** $(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha + \beta)^5 - (\alpha - \beta)^3(\alpha + \beta)^4$

**52.** Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

**α)** $(x - y)^3 + (y - \omega)^3 + (\omega - x)^3$

**β)** $(x - 2y)^3 + (3x + y)^3 + (y - 4x)^3$

**γ)** $\alpha^3(\beta - \gamma)^3 + \beta^3(\gamma - \alpha)^3 + \gamma^3(\alpha - \beta)^3$

**δ)** $8(2x - 3y)^3 + (2x + y)^3 - (6x - 5y)^3$

## Λ. Αριθμητικοί υπολογισμοί με τη βοήθεια της παραγοντοποίησης και των ταυτοτήτων

**53.** Να κάνετε τις πράξεις:

**α)** $58 \cdot 61 + 58 \cdot 47 - 8 \cdot 58$

**β)** $77 \cdot 33 + 77 \cdot 68 - 77$

**γ)** $36 \cdot 47 - 16 \cdot 23 + 36 \cdot 23 - 16 \cdot 47$

**δ)** $102^2 - 98^2$ **ε)** $5 \cdot 63^2 - 5 \cdot 61^2$

**στ)** $3 \cdot 97^2 - 27$ **ζ)** $25^2 - 24^2 - 93^2$

**η)** $79^2 + 2 \cdot 79 + 1$ **θ)** $32^2 - 24 \cdot 32 + 12^2$

**54.** Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

**α)** $A = \dfrac{43^2 - 11^2}{36{,}5^2 - 27{,}5^2} - \dfrac{37^2 - 23^2}{22^2 - 8^2}$

**β)** $B = \dfrac{53^3 + 27^3}{80} + 3 \cdot 53 \cdot 27$

**γ)** $\Gamma = \dfrac{63^2 - 21^2}{24^2 + 2 \cdot 18 \cdot 24 + 18^2}$

**55.** **α)** Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\alpha^2 - (\alpha - 2)(\alpha + 2) = 4$$

**β)** Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = 3{,}12345^2 - 1{,}12345 \cdot 5{,}12345$$

**56.** **α)** Αν $\alpha, \beta \neq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^3 - \beta^3}{(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta} = \alpha - \beta$$

**β)** Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{99^3 - 19^3}{118^2 - 99 \cdot 19}$$

**57.** **α)** Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 = \alpha\beta$$

**β)** Να βρείτε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού:

$$x = \left(\frac{5^{2017} + 2^{2016}}{2}\right)^2 - \left(\frac{5^{2017} - 2^{2016}}{2}\right)^2$$

## Μ. Απλοποίηση ρητών παραστάσεων

**58.** Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

**α)** $\dfrac{\alpha\beta + 2\beta + 3\alpha + 6}{\beta^2 + 6\beta + 9} \cdot \dfrac{8 - 4\alpha}{\alpha^2 - 4}$

**β)** $\dfrac{5y - 10y^2}{12y^2 + 6y^3} \cdot \dfrac{2y + y^2}{2y - 1}$

**γ)** $\dfrac{\alpha^2 + 4\alpha + 4}{\alpha x - \alpha y} : \dfrac{\alpha^2 + 2\alpha}{\alpha^2 x - \alpha^2 y}$

**δ)** $\dfrac{x^2 - 8x + 16}{\alpha x^2 + \alpha x y} : \dfrac{x^3 - 16x}{x^2 + 2xy + y^2}$

**ε)** $\dfrac{x - 2}{8x^3 - 27} : \dfrac{\alpha x - 2\alpha + \beta x - 2\beta}{3 - 2x}$

**στ)** $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9} : \left(\dfrac{x - 3}{x + 3}\right)^{-3}$

**59.** Να απλοποιήσετε τις επόμενες παραστάσεις:

**α)** $\left(\dfrac{\alpha^3 + 125}{10\alpha - 2} \cdot \dfrac{1 - 25\alpha^2}{\alpha^3 - 5\alpha^2 + 25\alpha}\right) : \dfrac{3\alpha + 15}{4}$

**β)** $\left[\left(1 + \dfrac{x}{y}\right)\left(1 + \dfrac{y}{x}\right)\right] : \left(x - \dfrac{y^2}{x}\right)$

**γ)** $\dfrac{\dfrac{64\alpha^2\beta^2 - 1}{x^2 + 14x + 49}}{\dfrac{8\alpha^3\beta - \alpha^2}{x^2 - 49} \cdot \dfrac{x - 7}{\alpha^2 x - 8\alpha^2}}$

**δ)** $\dfrac{\dfrac{-6x - 3\alpha}{\alpha x - \alpha^2} : \dfrac{9x^2 - 4\alpha^2}{x - \alpha}}{\dfrac{2x + \alpha}{3\alpha x + 2\alpha^2}}$

**60.** Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι επόμενες παραστάσεις και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η τιμή τους είναι σταθερή.

**α)** $A = \dfrac{x^2 - 27}{x^2 - 9} - \left[\dfrac{5}{x + 3} - \left(\dfrac{x}{x - 3} - \dfrac{x + 1}{x + 3}\right)\right]$

**β)** $B = \dfrac{x^2 + 1}{x} - \dfrac{x^2}{x + 1} - \dfrac{1}{x + x^2} -$

$- \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} : \dfrac{x - 1}{x + 1}$

## Ν. Επίλυση εξισώσεων

**61.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)** $x^3 = 4x$ **β)** $3x^3 + 5x = 21x - x^3$

**γ)** $2x(3x-1)^2 - 8x^3 = 0$ **δ)** $3x^3 - 2x^2 = 27x - 18$

**62.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)** $(x - 5)^3 + (x + 3)^3 + (2 - 2x)^3 = 0$

**β)** $(x + 2)^3 + (3x - 5)^3 = (4x - 3)^3$

**γ)** $(3 - 5x)^3 + 8(x - 2)^3 + (3x + 1)^3 = 0$

**δ)** $(x + 4)^3 - (3x - 2)^3 - 8(3 - x)^3 = 0$

**63.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

**α)** $2x^2 - 8 + 3(x^2 - 4x + 4) = 14 - 7x$

**β)** $x(x^2 - 6x + 9) + x^3 - 9x = -x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x$

## Ξ. Συνδυαστικά θέματα

**64.** Αν οι αριθμοί $\frac{2x}{3}$ και $-\frac{16}{y}$ είναι αντίθετοι:

**α)** να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\frac{x}{4}$ και $\frac{y}{6}$ είναι αντίστροφοι,

**β)** να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{-5[3x-y(x-2)]-3[x(y-5)-(2y-1)]+4y}{(2\cdot 3^9+3^9)^2:(9^{15}:27^4)}$$

**65.** Για τους αριθμούς α και β ισχύει:

$$(-\alpha-\beta)^2-(-\beta+\alpha)^2=4 \qquad (1)$$

και:

$$(\alpha-\beta-1)(\alpha+\beta-1)=-2(1+\alpha-\alpha^2) \qquad (2)$$

**α)** Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

**β)** Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha^2+\beta^2$.

**γ)** Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

**i)** $A=(\alpha+\beta)^2$ **ii)** $B=\alpha^4+\beta^4$

**66.** Δίνονται οι μη μηδενικοί αριθμοί α και β, με $\beta+4\alpha\neq 0$, για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{4\beta-2\alpha}{\beta+4\alpha}=-5$$

Να βρείτε:

**α)** τον λόγο $\frac{\beta}{\alpha}$,

**β)** την τιμή της παράστασης:

$$A=\left[\frac{\beta:\alpha^{-4}}{(\beta^{-1}\alpha^3)^3}\right]^2:\left[\frac{\alpha^7:\alpha^2}{(\beta^5)^2\beta^{-7}}\right]^{-1}$$

**67.** Δίνεται η παράσταση:

$$A=\frac{(x^2-2x+1)(x^3-9x)}{x^2-x}$$

**α)** Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A.

**β)** Να απλοποιήσετε την παράσταση A.

**γ)** Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει $A=0$.

# 3ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

| | |
|---|---|
| **ΜΑΘΗΜΑ :** | **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ** |
| **ΕΝΟΤΗΤΑ:** | **§ 2.2 Διάταξη πραγματικών αριθμών** |
| **ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:** | |

**Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**1.** α) Αν οι αριθμοί $\alpha, \beta$ είναι ομόσημοι, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$$

β) Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$.

γ) i) Αν $\alpha > 0$, τότε ισχύει ότι $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$.

ii) Αν $\alpha < 0$, τότε ισχύει ότι $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$.

**2.** Να αποδείξετε ότι $(x^2+1)(y^2+4) \geq (xy+2)^2$.

**3.** Αν ισχύει $\alpha > \beta > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^7 - \frac{1}{\alpha} > \beta^7 - \frac{1}{\beta}$$

**4.** Αν ισχύει $\alpha > \beta > 1$, να αποδείξετε ότι $\beta(\alpha+1) > \alpha + \beta^2$.

**5.** Να αποδείξετε ότι $\alpha\beta \leq \frac{\alpha^2+\beta^2}{2} \leq \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}$ για $\alpha \neq \beta$.

**6.** α) Αν $x \neq 1$, να αποδείξετε ότι $\frac{x^3-2}{x-1} > \frac{x^2-2x}{x-1}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$.

**7.** Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} \geq 2$ για κάθε $\alpha \neq 0$,

β) $\frac{(x-1)^2}{x^2+1} \leq \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$.

**8.** Αν $x \neq 3$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha = x^2 + 4$ και $\beta = 6x - 5$.

**9.** Αν ισχύει $0 < \alpha < \beta$, να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha^{15}\beta^{10}$ και $\alpha^5\beta^{20}$.

**10.** Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$.

**11.** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha$ και $\beta$ για τους οποίους ισχύει:

$$\alpha^2 + \beta^2 + 13 = 2(3\alpha - 2\beta)$$

**12.** Να αποδείξετε ότι $2\alpha^2 - 6\alpha + 9 > 0$.

**13.** Αν ισχύουν $1 \leq \alpha \leq 3$ και $-4 \leq \beta \leq -2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α) $2\alpha + 3\beta$ β) $\alpha - \beta$ γ) $\alpha^2 + \beta^2$ δ) $\frac{\alpha}{\beta}$

**14.** Να γράψετε με μορφή διαστήματος τα σύνολα των αριθμών x για τους οποίους ισχύει:

α) $1 \leq x \leq 5$ β) $-2 < x < 4$ γ) $-3 \leq x < 0$ δ) $-7 < x \leq 13$

ε) $x \geq 3$ στ) $x \leq 1$ ζ) $x > -2$ η) $x < -4$

## Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

### Α. Αποδεικτικές ασκήσεις

**1.** **α)** Αν ισχύει $\alpha < 3 < \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha\beta + 9 < 3(\alpha + \beta)$$

**β)** Αν ισχύει $\alpha < -2 < \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^2 - 2\beta > \alpha(\beta - 2)$$

**2.** Να αποδείξετε ότι:

**α)** $25 - 2(x-3)^2 \geq 8x - (2x+1)^2$

**β)** $\frac{x}{2} \geq 2 - \frac{(x-5)^2}{8}$

**γ)** $\beta^2 \geq \frac{\alpha\beta}{2} - \frac{(\alpha-\beta)^2}{8}$

**δ)** $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2) \geq (\alpha x + \beta y)^2$

**3.** Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

**α)** $\alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta + \alpha^2 \geq 0$

**β)** $\alpha^2\beta^2 + 9\beta^2 + 2\alpha^2 + 18 \geq 6\alpha\beta^2 + 12\alpha$

**4.** Αν ισχύει $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι:

**α)** $\alpha < \frac{2\alpha+3\beta}{5} < \beta$

**β)** $\alpha^3 + \beta^3 \leq \beta(\alpha^2+\beta^2) \leq 2\beta^3 - \alpha(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

**5.** Αν ισχύουν $0 < \alpha < \beta$ και $0 < \gamma < \delta$, να αποδείξετε ότι:

**α)** $2\alpha + 3\gamma < 2\beta + 3\delta$ **β)** $2\delta - 3\alpha > 2\gamma - 3\beta$

**γ)** $\alpha^2 - \frac{1}{\gamma} < \beta^2 - \frac{1}{\delta}$ **δ)** $\alpha\gamma + \frac{1}{\beta} < \beta\delta + \frac{1}{\alpha}$

**6.** Αν ισχύει $\alpha + \beta = 4$, να αποδείξετε ότι:

**α)** $\alpha\beta \leq 4$ **β)** $\alpha^2 + \beta^2 \geq 8$

**7.** Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

**α)** να αποδείξετε ότι $\alpha^3 < \alpha$,

**β)** να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0, \quad \alpha^3, \quad 1, \quad \alpha, \quad \frac{1}{\alpha}$$

***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

**8.** Αν $\alpha + \beta \geq 0$, να αποδείξετε ότι:

**α)** $\alpha^3 + \beta^3 \geq \alpha\beta(\alpha+\beta)$

**β)** $\frac{\alpha^3+\beta^3}{2} \geq \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3$

### Β. Σύγκριση αριθμών

**9.** Αν ισχύει $\alpha < 1$, να συγκρίνετε τους αριθμούς:

**α)** $x = 7 - 4\alpha$ και $y = 4 - \alpha$

**β)** $x = \alpha^3 - 2$ και $y = \alpha^2 - 2\alpha$

**10.** Αν $\alpha < \beta < \gamma$, να συγκρίνετε τους αριθμούς:

**α)** $\alpha\beta + \beta\gamma$ και $\beta^2 + \alpha\gamma$

**β)** $\alpha\beta + \alpha\gamma$ και $\alpha^2 + \beta\gamma$

**11.** Αν ισχύει $0 < \alpha < \beta$, να συγκρίνετε τους αριθμούς:

**α)** $\frac{\alpha^5}{\beta^5}$ και $1$ **β)** $\frac{1}{\alpha^9}$ και $\frac{1}{\beta^9}$

**γ)** $\alpha^{10}\beta^7$ και $\beta^{10}\alpha^7$

**12.** Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

**α)** $5^{20} \cdot 7^{12}$ και $7^{20} \cdot 5^{12}$

**β)** $6^6 \cdot 3^8$ και $3^{20}$

### Γ. Η ισότητα $\alpha^2+\beta^2=0$

**13.** Να βρείτε τους αριθμούς x και y για τους οποίους ισχύει:

**α)** $2x^2 + y^2 + 4 = 4x + 2xy$

**β)** $2x^2 + 9y^2 = -9 - 6x(1-y)$

**14.** Δίνονται οι παραστάσεις:

$$K = 2\alpha^2 + \beta^2 \quad \text{και} \quad \Lambda = 2\alpha\beta, \quad \text{όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

**α)** Να αποδείξετε ότι $K \geq \Lambda$ για κάθε τιμή των α, β.

**β)** Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

**15.** Δίνονται οι παραστάσεις:

$$K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 \quad \text{και} \quad \Lambda = 2\alpha(3-\beta)$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

**α)** Να αποδείξετε ότι:

$$K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$$

**β)** Να αποδείξετε ότι $K \geq \Lambda$ για κάθε τιμή των α, β.

**γ)** Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

**16.** Να βρείτε τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma > 0$ για τους οποίους ισχύει:

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3 \quad \text{και} \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3$$

### Δ. Μέγιστη και ελάχιστη τιμή παραστάσεων

**17.** Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

**α)** $x + y$ **β)** $2x - 3y$ **γ)** $\frac{x}{y}$

***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

**18.** Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν $3 \leq x \leq 5$ και $-2 \leq y \leq -1$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

**α)** $y - x$ **β)** $x^2 + y^2$

***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

**19.** Αν $-2 < \alpha < -1$ και $-4 < \beta < -3$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμίας από τις παραστάσεις:

**α)** $4\alpha - 2\beta + 1$ **β)** $2 - 3\alpha\beta$

**γ)** $2\alpha^2 + \beta^2$ **δ)** $\beta^2 - \alpha^3$

**ε)** $(\alpha+2)^2 - 2\beta$ **στ)** $1 - \frac{\alpha}{\beta}$

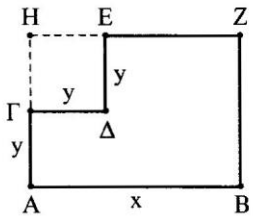
**20.** Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύουν $4 \le x \le 7$ και $2 \le y \le 3$, τότε:

**α)** να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου,

**β)** αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

**21.** Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.




**α)** Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του χρωματισμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση:

$$\Pi = 2x + 4y$$

**β)** Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω χρωματισμένου σχήματος.

***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

## Ε. Διαστήματα

**22.** Να γράψετε σε μορφή διαστήματος τα σύνολα των αριθμών x που ικανοποιούν τις σχέσεις:

**α)** $2 \le x \le 6$ **β)** $1 < x \le 5$

**γ)** $-4 \le x < 3$ **δ)** $-8 < x < -2$

**ε)** $x > 4$ **στ)** $x \le -5$

**ζ)** $x < 0$ **η)** $x \ge -1$

**23.** Αν $x \in [1, 2]$ και $y \in [3, 4]$, να γράψετε σε μορφή διαστήματος τα σύνολα στα οποία ανήκουν οι αριθμοί:

**α)** $\alpha = 2x + 3y$ **β)** $\beta = 3x - 2y$

**γ)** $\gamma = -4x - y$ **δ)** $\delta = xy - 6$

**24.** Με βασικό σύνολο το $\mathbb{R}$ θεωρούμε τα σύνολα $A = [2, +\infty)$ και $B = (-\infty, 6)$. Να βρείτε τα επόμενα σύνολα:

**α)** $A \cup B$ **β)** $A \cap B$ **γ)** $A'$

**δ)** $B'$ **ε)** $A' \cap B'$ **στ)** $A \cup B'$

**ζ)** $A - B$ **η)** $B - A$

**25.** Να βρείτε τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$ και $A - B$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

**α)** $A = [1, 4]$ και $B = (3, 5)$

**β)** $A = [2, 7]$ και $B = [7, 10]$

**γ)** $A = [-1, 2]$ και $B = (2, 3)$

**δ)** $A = [-3, 1]$ και $B = [-1, 1)$

## Ζ. Σύνθετες ασκήσεις

**26.** Να αποδείξετε ότι:

**α)** $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \ge \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$

**β)** $(\alpha + \beta + \gamma)^2 \ge 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

**27.** Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

**α)** $\alpha + \dfrac{4}{\alpha} \ge 4$

**β)** $\left(\alpha + \dfrac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \dfrac{4}{\beta}\right) \ge 16$

***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

**28.** **α)** Για κάθε α, $\beta \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^2 + \beta^2 \ge 2\alpha\beta$$

**β)** Για κάθε x, y, $\omega > 0$ να αποδείξετε ότι:

$$(x^2 + 1)(y^2 + 4)(\omega^2 + 9) \ge 48xy\omega$$

**29.** **α)** Για κάθε $\alpha > 0$ να αποδείξετε ότι:

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \ge 2$$

**β)** Για κάθε x, $y \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{y^2 + 1} \ge 2$$

**30.** Δίνονται οι αριθμοί α, β, $\gamma > 0$. Να αποδείξετε ότι:

**α)** $2(\alpha^2 + \beta^2) \ge (\alpha + \beta)^2$

**β)** $\dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha + \beta} + \dfrac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta + \gamma} + \dfrac{\gamma^2 + \alpha^2}{\gamma + \alpha} \ge \alpha + \beta + \gamma$

**γ)** $8(\alpha^4 + \beta^4) \ge (\alpha + \beta)^4$

**31.** **α)** Αν $\alpha > 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha < \alpha^2 < \alpha^3 < \alpha^4$$

**β)** Αν $A = x^2 - 6x + \dfrac{101}{10}$, με $x \in \mathbb{R}$, να συγκρίνετε τις τιμές των παραστάσεων $A^3$ και $A^4$.

**32.** Για τους αριθμούς α και β ισχύει:

$$\alpha\beta + 1 > \alpha + \beta > 2$$

**α)** Να αποδείξετε ότι $\alpha - 1 > 0$ και $1 - \beta < 0$.

**β)** Να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{\alpha^2} < \dfrac{1}{\alpha - 1} - \dfrac{1}{\alpha}$.

**γ)** Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$x = \beta^3 - 1 \quad \text{και} \quad y = \beta^2 - \beta$$

## Η. Μήκη πλευρών τριγώνου και ανισότητες

**33.** Αν α, β, γ είναι τα μήκη πλευρών τριγώνου, να αποδείξετε ότι:

**α)** $\dfrac{\alpha}{\beta + \gamma} + \dfrac{\beta}{\alpha + \gamma} + \dfrac{\gamma}{\alpha + \beta} < 3$

**β)** $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$

**34.** Αν τ είναι η ημιπερίμετρος ενός τριγώνου ΑΒΓ, με πλευρές α, β και γ, να αποδείξετε ότι:

**α)** $\dfrac{1}{\alpha + \beta} < \dfrac{1}{\tau}$

**β)** $\dfrac{\alpha}{\alpha + \beta} + \dfrac{\beta}{\beta + \gamma} + \dfrac{\gamma}{\gamma + \alpha} < 2$

**35.** Να βρείτε τους αριθμούς $\nu \in \mathbb{N}^*$, ώστε οι αριθμοί:

$$6\nu + 1, \quad 2\nu + 3 \quad \text{και} \quad 3\nu + 2$$

να είναι μήκη πλευρών τριγώνου.

## Θ. Συνδυαστικά θέματα

**36.** Για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει ότι:

$$x^2 + y^2 + 16x + 4y + 68 = 0$$

Να βρείτε:

**α)** τους αριθμούς x και y,

**β)** την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{(x^{-2}y^{-13}\omega^{-2})^{-3}(y^2\omega^{-3})^4 : x^{-1}}{(x^2y^3\omega^2)^3(x^{-3}y^{-2}\omega^3)^{-4}}$$

όπου $\omega \neq 0$.

**37.** Δίνεται η παράσταση:

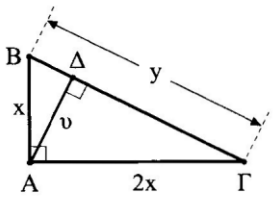
$$A = \frac{x^4 - x^3 + 11x^2 - 11x}{x^3 - x}$$

**α)** Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A.

**β)** Να απλοποιήσετε την παράσταση A.

**γ)** Αν $x \in (2, 4)$, να αποδείξετε ότι $A \in (3, 9)$.

**38.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90°$, $AB = x$, $A\Gamma = 2x$, $B\Gamma = y$ και το ύψος του $A\Delta = \upsilon$. Να αποδείξετε ότι:




**α)** $y^2 = 5x^2$

**β)** $\frac{11x}{5} < y < \frac{9x}{4}$

**γ)** $\frac{17x}{20} < \upsilon < \frac{9x}{10}$

# 4ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

| | |
|---|---|
| **ΜΑΘΗΜΑ :** | **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ** |
| **ΕΝΟΤΗΤΑ:** | **§ 2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού** |
| **ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:** | |

**Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**1.** Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |-5| + |2| - |-3| - |-4|$.

**2.** Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = |-x^2 - 2| - |x^2 - 4x + 4|$$

**3.** Αν ισχύει $\alpha < 2 < \beta$, να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = |\alpha - 2| + |2\beta - 4| - |\alpha - \beta| - |3\alpha - 2\beta - 4|$$

**4.** Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής την παράσταση:

$$A = 2 - |x - 2|$$

**5.** Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής την παράσταση:

$$A = 2x + |x + 3| - |2 - x|$$

**6.** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A = |x||x^3 + 2x^2 + x|$ β) $B = \dfrac{|x^5 + x^3|}{|x^3 + x|}$ για $x \neq 0$

**7.** Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = |x - y| + |y - x| - |2y - 2x|$$

**8.** Να αποδείξετε ότι $|\alpha - 2\beta|^2 + |2\alpha + \beta|^2 = 5(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$.

**9.** Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = |\alpha - |\alpha|| - ||\alpha| + \alpha|$.

**10.** Αν ισχύει ότι $|2x - y| + |2x - 6| = |3 - x|$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς $x$ και $y$.

**11.** Αν $\beta \neq 0$ και ισχύει ότι $|\alpha - |\beta|| = |\alpha| + |\beta|$, να αποδείξετε ότι $\alpha \leq 0$.

**12.** α) Αν ισχύει ότι $|2\alpha - 2\beta + 5| = 5$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta$ ή $\beta - \alpha = 5$.

β) Αν ισχύει ότι $|\alpha + \beta| = |2\alpha - 7\beta|$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 8\beta$ ή $\alpha = 2\beta$.

**13.** Να αποδείξετε ότι $|x + y| \leq |x + 2| + |y - 2|$.

**14.** Να αποδείξετε ότι $|\alpha\beta| - \alpha\beta \geq \alpha|\beta| - \beta|\alpha|$.

**15.** Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha$ και $\beta$ ισχύει ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 8$, να αποδείξετε ότι $-4 \leq \alpha + \beta \leq 4$.

**16.** Αν ισχύει ότι $|\alpha - 2\beta| < |2\alpha - \beta|$, να αποδείξετε ότι $|\beta| < |\alpha|$.

**17.** Αν ισχύει ότι $d(\alpha, 2\beta) - d(2\alpha, \beta) = d(5, 8) - d(2, -1)$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ίσοι ή αντίθετοι.

**18.** Το διάστημα $[-4, \beta]$ έχει κέντρο τον αριθμό 3. Να βρείτε:

α) τον αριθμό β,

β) το μήκος και την ακτίνα του διαστήματος.

**19.** Να βρείτε σε ποιο σύνολο ανήκουν οι αριθμοί x για τους οποίους ισχύει:

α) $|x| < 5$ β) $|x| > 6$ γ) $|x - 3| < 2$ δ) $|x + 5| > 1$

**20.** Αν ισχύει $|x| \leq 1$ και $|y| \leq 2$, να αποδείξετε ότι:

α) $|7x - 2y| \leq 11$ β) $|1 - 3x + 4y| \leq 12$

## Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

### Α. Απόλυτη τιμή πραγματικών αριθμών

**1.** Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

**α)** $A = |-2| + |5| - |-3|$

**β)** $B = \dfrac{|4| + |-7| - |-5|}{|-8| - |-1| - |-4|}$

**γ)** $\Gamma = \dfrac{|-3|(|-5| - |1|)}{-|-1| - |-3|}$

**δ)** $\Delta = \dfrac{\left(-|-4| - |-2|\right)^2 |-5|}{|-4||-2| + |-2|}$

**2.** Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

**α)** $A = |\sqrt{5} - 2| + |\sqrt{5} - 3|$

**β)** $B = |\pi - 4| - |\pi - 3| - |2\pi - 7|$

### Β. Απλοποίηση παραστάσεων

**3.** Αν $\alpha < 3 < \beta$, να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

**α)** $A = |3 - \alpha| + |3 - \beta| - |\alpha - \beta|$

**β)** $B = |\alpha - 3| + |\beta| + |\alpha - \beta|$

**γ)** $\Gamma = |\alpha - 4| - |\beta - 2|$

**δ)** $\Delta = |\alpha - \beta| - |5 - \alpha| - |1 - \beta|$

**4.** Δίνεται η παράσταση:

$$A = |x - 1| - |x - 2|$$

**α)** Για $1 < x < 2$ να αποδείξετε ότι $A = 2x - 3$.

**β)** Για $x < 1$ να αποδείξετε ότι η παράσταση Α έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

**5.** Δίνεται η παράσταση:

$$A = |x - 1| + |y - 3|$$

με x και y πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$. Να αποδείξετε ότι:

**α)** $A = x - y + 2$ **β)** $0 < A < 4$

***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

**6.** Δίνεται η παράσταση:

$$A = |3x - 6| + 2$$

όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

**α)** Να αποδείξετε ότι:

**i)** για κάθε $x \geq 2$ είναι $A = 3x - 4$,

**ii)** για κάθε $x < 2$ είναι $A = 8 - 3x$.

**β)** Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4$$

***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

**7.** Να απλοποιήσετε τις επόμενες παραστάσεις:

**α)** $A = \dfrac{x^2 + 2|x|}{|x| + 2}$ **β)** $B = \dfrac{|x|^3 + 3x^2}{2|x| + 6}$

**γ)** $\Gamma = \dfrac{x^2 + 4|x| + 4}{|x| + 2}$ **δ)** $\Delta = \dfrac{x^2 - 1}{|x| + 1}$

**8.** Να γράψετε την παράσταση:

$$A = \big|x - |x|\big| + \big|x + |x|\big|$$

χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

**9.** Αν $x \neq 0$, να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης:

$$A = \left(1 + \frac{|x|}{x}\right)(x - |x|)$$

είναι σταθερή (ανεξάρτητη του x).

**10.** Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

**α)** $A = x - |x - 2| + |x + 4|$

**β)** $B = 2x - |1 - x| - |x|$

**γ)** $\Gamma = |2 - x| + |3x - 3| - 2x$

**11.** Δίνεται η παράσταση:

$$A = |x + 2| + |3 - x| - 2|x|$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση Α είναι ανεξάρτητη του x.

### Γ. Σχέσεις της μορφής $|x|=\theta$, $|x|=|\alpha|$ και $|x|+|y|=0$

**12.** Αν ισχύει ότι:

$$|\alpha - \beta + 3| = 3$$

να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta$ ή $\alpha = \beta - 6$.

**13.** Αν ισχύει ότι $|3\alpha - \beta| = |2\alpha - 9\beta|$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 2\beta$ ή $\alpha = -8\beta$.

**14.** Αν ισχύει ότι $|4\alpha - 5\beta| + |2\alpha - \beta| = |4\alpha - 2\beta|$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta$ ή $\alpha = 2\beta$.

**15.** Αν ισχύει ότι $|\alpha + \beta| = |\alpha - \beta|$, να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς α και β ισούται με 0.

**16.** Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύουν:

**α)** $|\alpha - 3\beta| + |3\beta - 6| - |2\beta - 4| = 0$

**β)** $|2\alpha + \beta - 5| + |3\alpha + 2\beta - 6| = 0$

**17.** Να βρείτε τον αριθμό x για τον οποίο ισχύει:

**α)** $|x^2 - 9| + |x^2 + 3x| = 0$

**β)** $|x^3 - 4x| + |x^3 - 2x^2 - 9x + 18| = 0$

### Δ. Αποδεικτικές ασκήσεις

**18.** Να αποδείξετε ότι:

**α)** $|\alpha + 1|^2 - 4\alpha = |\alpha - 1|^2$

**β)** $\big(|\alpha| - |\beta|\big)^2 + 2|\alpha\beta| = \alpha^2 + \beta^2$

**γ)** $|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 2\big(|\alpha|^2 + |\beta|^2\big)$

**δ)** $\big(|\alpha| - |\beta|\big)\big(|\alpha| + |\beta|\big) + 2\beta(\alpha + \beta) = |\alpha + \beta|^2$

**ε)** $|\alpha + 2\beta|^2 + 3\big(|\alpha| + |\beta|\big)\big(|\alpha| - |\beta|\big) = |2\alpha + \beta|^2$

**19.** Αν ισχύει ότι $|2\alpha + \beta| = |2\alpha| + |\beta|$, όπου $\alpha, \beta \neq 0$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι.

**20.** **α)** Αν ισχύει ότι $|\alpha+3|=|\alpha|+3$, να αποδείξετε ότι $\alpha \geq 0$.

**β)** Αν ισχύει ότι $|\alpha+2|=\big||\alpha|-2\big|$, να αποδείξετε ότι $\alpha \leq 0$.

**21.** Να αποδείξετε ότι:

**α)** $\alpha^2+\beta^2 \geq 2|\alpha\beta|$ **β)** $x^2+4 \geq 4|x|$

**22.** Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει:

**α)** $\left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right| \leq 1$ **β)** $\dfrac{4x^2+9}{12} \geq |x|$

**23.** **α)** Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}-\{0\}$, να αποδείξετε ότι:

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2 \qquad (1)$$

**β)** Πότε ισχύει η ισότητα στη σχέση (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

**24.** Αν $|x| \leq 2$ και $|y| \leq 3$, να αποδείξετε ότι:

**α)** $|x+y| \leq 5$ **β)** $|x-y| \leq 5$

**γ)** $|3x+y| \leq 9$ **δ)** $|2x-3y| \leq 13$

**ε)** $|x-2y+3| \leq 11$ **στ)** $\left|\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}+5\right| \leq 7$

**25.** Έστω αριθμοί $\alpha, \beta \neq 0$ για τους οποίους ισχύει ότι $|\alpha+\beta|<|\alpha-\beta|$. Να αποδείξετε ότι:

**α)** οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι,

**β)** ισχύει $\alpha|\beta|+\beta|\alpha|=0$.

**26.** Να αποδείξετε ότι:

**α)** $|\alpha+\beta| \leq |\alpha-\gamma|+|\gamma+\beta|$

**β)** $|2\alpha-3\beta| \leq |\alpha-5\beta|+|\alpha+2\beta|$

**γ)** $|\alpha-\beta| \leq |2\alpha+5\beta|+|3\alpha-7\beta|+|\beta-4\alpha|$

**27.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

**α)** $|x-3|+|2-x| \geq 1$

**β)** $|x+5|+|x+3| \geq 2$

**γ)** $\big||x-7|-|4-x|\big| \leq 3$

## Ε. Απόσταση δύο αριθμών

**28.** Να βρείτε το μήκος, το κέντρο και την ακτίνα των παρακάτω διαστημάτων:

**α)** $[2, 8]$ **β)** $[-17, -5]$

**γ)** $[-10, 24]$ **δ)** $[-19, 11]$

**29.** Το διάστημα $[-9, \beta]$ έχει ακτίνα 7. Να βρείτε:

**α)** τον αριθμό β,

**β)** το κέντρο του διαστήματος.

**30.** Το διάστημα $[\alpha, 8]$ έχει κέντρο 3. Να βρείτε:

**α)** τον αριθμό α,

**β)** την ακτίνα του διαστήματος.

**31.** Αν ισχύει ότι $d(2\alpha, 9\beta)=d(\alpha, 0)$, να αποδείξετε ότι $\alpha=9\beta$ ή $\alpha=3\beta$.

**32.** Αν $\alpha<1<\beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$K=d(1, \alpha)+d(1, \beta)-d(\alpha, \beta)$$

**33.** Να αποδείξετε ότι $d(4\alpha, 0) \leq d(4\alpha^2, -1)$.

**34.** Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση $d(x, 5) \leq 9$.

**α)** Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

**β)** Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x.

**γ)** Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β).

**δ)** Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να αποδείξετε ότι:

$$|x+4|+|x-14|=18$$

***(Τ.Θ. - 4ο θέμα)***

## Ζ. Ανισότητες της μορφής $|x-x_0|<$ ή $>\rho$

**35.** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

| Απόλυτη τιμή | Διάστημα ή ένωση διαστημάτων |
|---|---|
| $\|x\|<3$ | |
| $\|x\| \leq 4$ | |
| $\|x\|>2$ | |
| $\|x\| \geq 5$ | |
| | $x \in [-1, 1]$ |
| | $x \in (-6, 6)$ |
| | $x \in (-\infty, -8] \cup [8, +\infty)$ |
| | $x \in (-\infty, -10) \cup (10, +\infty)$ |

**36.** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

| Απόλυτη τιμή | Ανισότητα |
|---|---|
| $\|x\|<5$ | |
| $\|x\| \geq 3$ | |
| $\|x\| \leq 2$ | |
| $\|x\|>4$ | |
| | $x<-7$ ή $x>7$ |
| | $-9 \leq x \leq 9$ |
| | $x \leq -1$ ή $x \geq 1$ |
| | $-13<x<13$ |

**37.** Αν ισχύει ότι $|x|<2$ και $|y|<4$, να βρείτε τα διαστήματα στα οποία ανήκουν οι παραστάσεις:

**α)** $\alpha=2x+3y$ **β)** $\beta=x-2y+4$

**γ)** $\gamma=3x-y-2$ **δ)** $\delta=-4x-5y+3$

**38.** **α)** Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει $|y-3|<1$.

**β)** Αν x και y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με:

$$1<x<3 \quad \text{και} \quad 2<y<4$$

να αποδείξετε ότι:

**i)** $6<\Pi<14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου,

**ii)** $2<E<12$, όπου Ε είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου.

***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

## Η. Συνδυαστικά θέματα

**39.** Δίνεται η παράσταση:

$$A = |x-3| - |x+1| + |y-1| - |y+2|$$

όπου $-1 \le x \le 3$ και $-2 \le y \le 1$.

**α)** Να απλοποιήσετε την παράσταση Α.

**β)** Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης Α.

**40.** Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = |2x-4| \quad \text{και} \quad B = |x-3|$$

όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

**α)** Για κάθε $2 \le x < 3$ να αποδείξετε ότι:

$$A + B = x - 1$$

**β)** Υπάρχει $x \in [2, 3)$, ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

**41.** Για τους αριθμούς α και β ισχύει ότι:

$$|\alpha + 2\beta| + |3\beta - 3| = |2 - 2\beta|$$

**α)** Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

**β)** Δίνεται η παράσταση:

$$A = -\alpha - \frac{|\beta - x|}{x^2 + \alpha x + \beta}$$

**i)** Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α.

**ii)** Να απλοποιήσετε την παράσταση Α και να τη γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

**42.** Για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει ότι:

- $|\alpha - 2| < 1$
- $|\beta - 3| \le 2$

**α)** Να αποδείξετε ότι $1 < \alpha < 3$.

**β)** Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β.

**γ)** Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha - 3\beta$.

**δ)** Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$.

***(Τ.Θ. - 4ο θέμα)***

**43.** Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση:

$$(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0$$

**α)** Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α και β.

**β)** Αν επιπλέον $|\beta - \alpha| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = |\alpha - 1| + |1 - \beta|$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά.

***(Τ.Θ. - 4ο θέμα)***

**44.** Δίνονται τα σημεία Α, Β και Μ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς −2, 7 και x αντίστοιχα, με:

$$-2 < x < 7$$

**α)** Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων:

**i)** $|x+2|$ **ii)** $|x-7|$

**β)** Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:

$$|x+2| + |x-7|$$

**γ)** Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = |x+2| + |x-7|$$

γεωμετρικά.

**δ)** Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

***(Τ.Θ. - 4ο θέμα)***

**45.** Δίνεται η παράσταση:

$$A = \left(\frac{x^2 - x}{x^2 + 1} - \frac{2x^2}{1 - x + x^2 - x^3}\right) \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

**α)** Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α.

**β)** Να απλοποιήσετε την παράσταση Α.

**γ)** Αν ισχύει ότι $|3x - 2| < 1$, να αποδείξετε ότι:

$$|A - 3| < 1$$

# 5ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

| | |
|---|---|
| **ΜΑΘΗΜΑ :** | **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ** |
| **ΕΝΟΤΗΤΑ:** | **§ 2.4 Ρίζες πραγματικών αριθμών** |
| **ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:** | |

**Α. ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

**1.** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\sqrt{37}^2$ β) $\sqrt{23^2}$ γ) $\sqrt{(-29)^2}$ δ) $\sqrt{-8}^2$

ε) $\sqrt{-5^2}$ στ) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}$ ζ) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ η) $\sqrt{x^2-2x+1}$

**2.** Αν ισχύει ότι $2 < x < 3$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}-\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$$

**3.** Να βρείτε τις παρακάτω ρίζες:

α) $\sqrt[3]{27}$ β) $\sqrt[4]{16}$ γ) $\sqrt[5]{0{,}00001}$

δ) $\sqrt[6]{0}$ ε) $\sqrt[7]{1}$ στ) $\sqrt[3]{-8}$

**4.** Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις (με την προϋπόθεση ότι ορίζονται όσες παραστάσεις περιέχουν μεταβλητές):

α) $\sqrt[3]{7}^3$ β) $\sqrt[4]{6^4}$ γ) $\sqrt[6]{(-5)^6}$

δ) $\sqrt[7]{(-4)^7}$ ε) $\sqrt[12]{3^5}\cdot\sqrt[12]{3^7}$ στ) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$

ζ) $\sqrt[3]{x^3}$ η) $\sqrt[4]{x^4}$ θ) $\sqrt[8]{\alpha^3}\cdot\sqrt[8]{\alpha}^5$

**5.** Με την προϋπόθεση ότι ορίζονται οι παρακάτω παραστάσεις να τις απλοποιήσετε.

α) $A=\sqrt{9\alpha^2\beta}+\sqrt{\alpha^2\beta}-2\alpha\sqrt{\beta}$ β) $B=\sqrt[3]{8\alpha^3\beta^2}-\alpha\sqrt[3]{\beta^2}$

**6.** Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $25^{\frac{1}{2}}$ β) $16^{\frac{3}{4}}$ γ) $\dfrac{9^{\frac{3}{4}}\cdot 9^{\frac{5}{2}}}{9^{\frac{7}{4}}}$

**7.** Αν $\alpha \geq 0$, να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A=\sqrt[4]{\sqrt[3]{\alpha^5}}\cdot\sqrt{\sqrt[6]{\alpha^7}}$$

**8.** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A=\sqrt[6]{8}$ β) $B=\sqrt[8]{\alpha^6}$ γ) $\Gamma=\sqrt[9]{\alpha^6}$

δ) $\Delta=\sqrt[12]{\alpha^3}$ ε) $E=\sqrt[4]{\alpha^{12}}$ στ) $Z=\sqrt[3]{\alpha^{18}}$

**9.** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A=\sqrt{5\sqrt[3]{5}}$ β) $B=\sqrt[3]{\alpha^2\sqrt[5]{\alpha^3\sqrt{\alpha}}}$ για $\alpha \geq 0$

**10.** Αν $\alpha > 0$, να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \frac{\sqrt[5]{\alpha^3} \cdot \sqrt[3]{\alpha^7}}{\sqrt[15]{\alpha^{14}}}$$

**11.** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $A = \sqrt{50} - \sqrt{18} - \sqrt{8}$ β) $B = \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16}$

**12.** Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$$

**13.** α) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις $(3+\sqrt{2})^2$ και $(1-\sqrt{2})^2$.

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$.

**14.** Αν ισχύει ότι $0 < \alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt[3]{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} < \sqrt[3]{\beta} - \frac{1}{\sqrt{\beta}}$$

**15.** Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

α) $A = \sqrt{2x+6}$ β) $B = \frac{x+2}{\sqrt[3]{x-4}}$ γ) $\Gamma = \sqrt[3]{x+3} + \sqrt[4]{5-x}$

δ) $\Delta = \sqrt[5]{x+1} - \frac{1}{x-2}$ ε) $E = \sqrt{x^2+1}$ στ) $Z = \frac{1}{\sqrt[5]{x^2-6x+9}}$

**16.** Να βρείτε τους αριθμούς x και y για τους οποίους ισχύει:

$$\sqrt{2x+6} + \sqrt[3]{x-2y+7} = 0$$

**17.** Αν $\alpha, \beta \geq 0$ και $\alpha \neq \beta$, να αποδείξετε ότι $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$.

**18.** Αν $\alpha, \beta > 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{5\alpha - 4\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} \geq \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$$

**19.** Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt[6]{6} < \sqrt[4]{4}$ β) $\sqrt{6} + \sqrt{2} > 2 + \sqrt{3}$

**20.** Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α) $\sqrt{5}$ και $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ β) $\sqrt{5}-2$ και $3-\sqrt{11}$

**21.** Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

α) $\frac{2}{\sqrt{6}}$ β) $\frac{1}{\sqrt[5]{7^3}}$ γ) $\frac{5}{\sqrt[4]{5^9}}$

**22.** Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

α) $\frac{2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ β) $\frac{26}{4+\sqrt{3}}$

**23.** Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

## Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

### Α. Υπολογιστικές ασκήσεις

**1.** Να υπολογίσετε τις παρακάτω ρίζες:

**α)** $\sqrt{2^4 \cdot 3^2}$ **β)** $\sqrt[3]{3^6 \cdot 5^3}$

**γ)** $\sqrt{2^6 \cdot 3^4}$ **δ)** $\sqrt[4]{3^{12} \cdot 2^8}$

**2.** Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

**α)** $\sqrt[6]{2^5} \cdot \sqrt[6]{2^{13}}$ **β)** $\sqrt[4]{7^5} \cdot \sqrt[4]{7^3}$

**γ)** $\dfrac{\sqrt[3]{2^{16}}}{\sqrt[3]{2^4}}$ **δ)** $\sqrt[5]{3^3} \cdot \sqrt[5]{3^4} \cdot \sqrt[5]{3^8}$

**ε)** $\dfrac{\sqrt[5]{6^9} \cdot \sqrt[5]{6^7}}{\sqrt[5]{6^6}}$ **στ)** $\dfrac{\sqrt[3]{2^7} \cdot \sqrt[3]{2^{13}}}{\sqrt[3]{2^4} \cdot \sqrt[3]{2}}$

**3.** Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

**α)** $4^{\frac{5}{6}} \cdot 4^{\frac{2}{3}}$ **β)** $\dfrac{8^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{14}{15}}}{8^{\frac{1}{5}} \cdot 8^{\frac{1}{15}}}$

**γ)** $\dfrac{\left(4^{\frac{39}{8}}\right)^{\frac{2}{3}}}{\left(4^{\frac{27}{28}}\right)^{\frac{7}{9}}}$ **δ)** $\left(2^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} \left(18^{\frac{7}{10}}\right)^{\frac{5}{7}}$

**ε)** $\sqrt[3]{4^{\frac{13}{4}}} \cdot \sqrt{4^{\frac{17}{6}}}$ **στ)** $\left(\sqrt[4]{8^3}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\sqrt{8}\right)^{\frac{1}{3}}$

**4.** Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

**α)** $\sqrt{\sqrt[3]{2^5}} \cdot \sqrt[6]{2}$ **β)** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3^5}} \cdot \sqrt[12]{3^7}$

**γ)** $\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt{6^{11}}}}{\sqrt[8]{6^3}}$ **δ)** $\sqrt{\sqrt[6]{5^{13}}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{5^{11}}}$

**ε)** $\sqrt[3]{\sqrt[6]{7^{23}}} \cdot \sqrt{\sqrt[9]{7^{13}}}$ **στ)** $\dfrac{\sqrt[8]{\sqrt{4^{37}}}}{\sqrt[4]{\sqrt[4]{4^5}}}$

**5.** Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

**α)** $A = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{3}$

**β)** $B = \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[3]{2^4} \cdot \sqrt{2^3}$

**γ)** $\Gamma = \sqrt[3]{7^2} \cdot \sqrt[4]{7^3} \cdot \sqrt[12]{7^7}$

**δ)** $\Delta = \dfrac{\sqrt{5^3} \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[6]{5}}$

**6.** Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

**α)** $\left(\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{72} - \sqrt{50}\right)$

**β)** $\dfrac{3\sqrt{27} + \sqrt{108}}{\sqrt{12} + \sqrt{3}}$

**7.** Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$\sqrt{2} \cong 1{,}41 \quad \sqrt{3} \cong 1{,}73 \quad \sqrt{5} \cong 2{,}24 \quad \sqrt{7} \cong 2{,}64$

**α)** Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$.

**β)** Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών, πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\frac{3\sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}}$$

***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

**8.** Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$ και $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε:

**α)** να αποδείξετε ότι $AB = 1$,

**β)** να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi = A^2 + B^2$$

***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

**9.** Να κάνετε τις πράξεις:

**α)** $\dfrac{\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{10} + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{10} - \sqrt{2}\right)}$

**β)** $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{5} + 1\right)^2 + \sqrt{20} - \sqrt{24}$

**10.** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

**α)** $\sqrt{\left(\sqrt{5} - 2\right)^2}$ **β)** $\sqrt{\left(3 - \sqrt{10}\right)^2}$

**γ)** $\sqrt[3]{8\left(3 - \sqrt{5}\right)^3}$ **δ)** $\sqrt[3]{27\left(2 - \sqrt{5}\right)^3}$

**ε)** $\sqrt[4]{16\left(\sqrt{7} - 3\right)^4}$ **στ)** $\sqrt[4]{81\left(\sqrt{17} - 4\right)^4}$

**11.** Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

**α)** $A = \sqrt{\sqrt{5} - 1} \cdot \sqrt{\sqrt{5} + 1}$

**β)** $B = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 \left(2\sqrt{2} + 3\right)$

**γ)** $\Gamma = \sqrt[3]{\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{15} - 1\right)^2 + \sqrt[4]{81}}$

**δ)** $\Delta = \left(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}\right)$

**ε)** $E = \sqrt{\left(\sqrt{10} + 1\right)^2 - \sqrt{160}} \cdot \left(\sqrt{10} + 1\right)$

**12. α)** Να αναλύσετε τους αριθμούς 1296 και 1728 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

**β)** Να υπολογίσετε τις ρίζες:

**i)** $\sqrt{1296}$ **ii)** $\sqrt[4]{1296}$ **iii)** $\sqrt[3]{1728}$

**13. α)** Να βρείτε τα αναπτύγματα $\left(\sqrt{3} + 2\right)^2$ και $\left(\sqrt{3} - 2\right)^2$.

**β)** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}\right)\sqrt{3}$$

**14.** Δίνονται αριθμοί x και y για τους οποίους ισχύουν:

$$x + y = 4 \quad \text{και} \quad x - y = -2\sqrt{3}$$

**α)** Να αποδείξετε ότι:

$$x = 2 - \sqrt{3} \quad \text{και} \quad y = 2 + \sqrt{3}$$

**β)** Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

**i)** $A = x^2 + 3xy + y^2$

**ii)** $B = x^3 + y^3$

**15.** Δίνεται ο αριθμός:

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

**α)** Να αποδείξετε ότι $x < 0$.

**β)** Να βρείτε τον αριθμό $x^2$.

γ) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x\sqrt{8}$ είναι ακέραιος.

## Β. Περιορισμοί σε παραστάσεις με ρίζες

**16.** Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι επόμενες παραστάσεις. Στη συνέχεια να γράψετε τα διαστήματα στα οποία ανήκει το x.

**α)** $A = \sqrt{x+2} + \sqrt{3-x}$

**β)** $B = \sqrt{2x-6} - \sqrt[3]{x-5}$

**γ)** $\Gamma = \dfrac{\sqrt[3]{3x+12}}{\sqrt[4]{7-x}}$ **δ)** $\Delta = \dfrac{\sqrt{12-4x}}{\sqrt[4]{2x+14}}$

**17.** Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις:

**α)** $A = \sqrt{3x-6} + \dfrac{1}{x-5}$

**β)** $B = \dfrac{1-x}{\sqrt{9-3x}} + \dfrac{x}{x+2}$

**18.** Δίνεται η παράσταση:

$$A = \sqrt{x^2+4} - \sqrt{x-4}$$

**α)** Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

**β)** Αν $x = 4$, να αποδείξετε ότι:

$$A^2 - A = 2(10 - \sqrt{5})$$

***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

**19.** Δίνεται η παράσταση:

$$B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$$

**α)** Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x υπό μορφή διαστήματος.

**β)** Για $x = 4$ να αποδείξετε ότι:

$$B^2 + 6B = B^4$$

***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

**20.** Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \sqrt{(x-2)^2} \quad \text{και} \quad B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$$

όπου x πραγματικός αριθμός.

**α)** Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A;

**β)** Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B;

**γ)** Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \leq 2$ ισχύει:

$$A = B$$

***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

## Γ. Απλοποίηση παραστάσεων

**21.** Αν ο x είναι πραγματικός αριθμός, να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \sqrt{16x^2} + \sqrt{4x^2} - 3x$$

**22.** Δίνεται η παράσταση:

$$K = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$$

**α)** Να βρείτε τις τιμές που πρέπει να πάρει το x, ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

**β)** Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

**23.** Δίνεται η παράσταση:

$$A = (\sqrt{3-x} - \sqrt{x+2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x})$$

**α)** Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A.

**β)** Να απλοποιήσετε την παράσταση A.

**γ)** Να αποδείξετε ότι $|A| \leq 5$.

**24.** Αν $\alpha, \beta \geq 0$, να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

**α)** $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\alpha^6}}$ **β)** $\sqrt[3]{\sqrt{\alpha^9\beta^6}}$

**γ)** $\sqrt{\sqrt[3]{\alpha^5}} \cdot \sqrt[6]{\alpha}$ **δ)** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\alpha^7}} \cdot \sqrt[6]{\sqrt{\alpha^5}}$

**ε)** $\sqrt[10]{\alpha^3\beta^9} \cdot \sqrt{\sqrt[5]{\alpha^7\beta^{11}}}$ **στ)** $\sqrt[6]{\sqrt[3]{\alpha^8\beta^4}} \cdot \sqrt[9]{\sqrt{\alpha\beta^5}}$

**25.** Αν $\alpha, \beta > 0$, $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$ και $\alpha \neq \beta$, να αποδείξετε ότι οι παρακάτω παραστάσεις έχουν σταθερή τιμή:

**α)** $A = \dfrac{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2 - (\sqrt{\alpha\beta}+1)^2}{(\alpha-1)(\beta-1)}$

**β)** $B = \left(\dfrac{\alpha\sqrt{\alpha}+\beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}} - \sqrt{\alpha\beta}\right)\left(\dfrac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\alpha-\beta}\right)^2$

**26.** Έστω $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\alpha^2 - \sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{\alpha^2\beta} - \alpha}{\alpha + \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}$$

είναι ανεξάρτητη από το β.

**27.** Δίνονται πραγματικοί αριθμοί x και y για τους οποίους ισχύουν $1 < y < 2$ και $y - x = 1$.
Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \sqrt{4x^2+4y-3} + 2\sqrt{y^2-6x-2y+10}$$

## Δ. Ρητοποίηση παρανομαστών

**28.** Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

**α)** $\dfrac{10}{\sqrt{5}}$ **β)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ **γ)** $\dfrac{6}{\sqrt[3]{3^2}}$

**δ)** $\dfrac{12}{\sqrt[8]{9^5}}$ **ε)** $\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$ **στ)** $\dfrac{6}{5\sqrt[7]{3^5}}$

**29.** Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

**α)** $\dfrac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$ **β)** $\dfrac{2}{\sqrt{7}-1}$

**γ)** $\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2}$ **δ)** $\dfrac{6}{4\sqrt{3}-5\sqrt{2}}$

**30.** Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

**α)** $\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}}$ **β)** $\frac{20}{\sqrt[5]{6^3}\cdot\sqrt[4]{5}}$

**γ)** $\frac{8}{\sqrt[3]{3}\cdot(3-\sqrt{5})}$ **δ)** $\frac{12}{\sqrt[6]{2^5}\cdot(\sqrt{7}+\sqrt{6})}$

**31.** Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

**α)** $\frac{6}{\sqrt{18}+\sqrt{32}-\sqrt{8}}$

**β)** $\frac{19}{\sqrt{48}+\sqrt{72}-\sqrt{12}-\sqrt{2}}$

**32.** Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

**α)** $A=\frac{1}{3-\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+1}-\frac{1}{2\sqrt{5}-4}$

**β)** $B=\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}$

**33. α)** Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$(2+\sqrt{3})^3 \quad \text{και} \quad (2-\sqrt{3})^3$$

**β)** Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{1}{\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}}+\frac{1}{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}}$$

## Ε. Απόδειξη ταυτοτήτων

**34.** Αν $\alpha, \beta \geq 0$, να αποδείξετε ότι:

**α)** $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2+(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2=2(\alpha+\beta)$

**β)** $(\sqrt{\alpha\beta}-1)^2+(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(\alpha+1)(\beta+1)$

**γ)** $(2\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2-3(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})=$
$=(\sqrt{\alpha}-2\sqrt{\beta})^2$

**δ)** $\sqrt{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2+4\sqrt{\alpha\beta}}\cdot(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})=\alpha-\beta$

**35.** Αν $x \geq 1$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}-x=\sqrt{x^2-1}$$

**36.** Αν $0<x<1$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{x}}=\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}}$$

**37. α)** Αν $\nu \geq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\sqrt{\nu+1}+\sqrt{\nu}}=\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}$$

**β)** Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

## Ζ. Απόδειξη ανισοτήτων

**38.** Αν $\alpha, \beta \geq 0$, να αποδείξετε ότι:

**α)** $\sqrt{4\alpha+9\beta} \leq 2\sqrt{\alpha}+3\sqrt{\beta}$

**β)** $\sqrt{(\alpha+2)(\beta+3)} \geq \sqrt{3\alpha}+\sqrt{2\beta}$

**γ)** $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}) \geq 2(\sqrt{\alpha\beta}-\beta)$

**δ)** $\sqrt{\frac{\alpha+4\beta}{2}} \geq \frac{\sqrt{\alpha}+2\sqrt{\beta}}{2}$

**39.** Αν $x, y > 0$, με $x+y=4$, να αποδείξετε ότι:

**α)** $xy \leq 4$ **β)** $\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2} \leq 4$

**γ)** $x\sqrt{\frac{y}{2}}+y\sqrt{\frac{x}{2}} \leq 4$

**40. α)** Αν $x, y \geq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}$$

**β)** Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$, να αποδείξετε ότι:

**i)** $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1) \geq \sqrt{64\alpha\beta\gamma}$

**ii)** $\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}\right)\left(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}\right) \geq 8$

**41. α)** Αν $\alpha > 1$ και ν, μ είναι θετικοί ακέραιοι, με $\nu < \mu$, να αποδείξετε ότι $\sqrt[\nu]{\alpha} > \sqrt[\mu]{\alpha}$.

**β)** Αν $\alpha > 1$, να διατάξετε από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τις τιμές:

$$\frac{1}{\alpha}, \quad \sqrt{\alpha}, \quad \frac{\alpha}{\sqrt[3]{\alpha^2}}, \quad \sqrt[4]{\alpha}, \quad \sqrt[6]{\alpha}, \quad \alpha$$

## Η. Σύγκριση αριθμών – Ανισότητες μεταξύ αριθμών

**42.** Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

**α)** $2\sqrt{3}$ και $\sqrt{13}$ **β)** $3\sqrt{2}$ και $\sqrt{17}$

**γ)** $\sqrt{2}+1$ και $\sqrt{3}$ **δ)** $\sqrt{7}+\sqrt{3}$ και $\sqrt{10}$

**ε)** $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ και $2\sqrt{2}$

**στ)** $2\sqrt{6}-3\sqrt{3}$ και $4\sqrt{2}-\sqrt{31}$

**43.** Αν είναι $A=\sqrt[3]{5}$, $B=\sqrt{3}$ και $\Gamma=\sqrt[6]{5}$, τότε:

**α)** να αποδείξετε ότι $A\cdot B\cdot\Gamma=\sqrt{15}$,

**β)** να συγκρίνετε τους αριθμούς Α και Β.

***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

**44.** Δίνονται οι αριθμοί:

$$A=(\sqrt{2})^6 \quad \text{και} \quad B=(\sqrt[3]{2})^6$$

**α)** Να αποδείξετε ότι $A-B=4$.

**β)** Να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς $\sqrt{2}$, 1 και $\sqrt[3]{2}$.

***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

**45. α)** Να αποδείξετε ότι $3<\sqrt[3]{30}<4$.

**β)** Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$\sqrt[3]{30} \quad \text{και} \quad 6-\sqrt[3]{30}$$

***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

**46.** Να βρείτε έναν ρητό αριθμό μεταξύ των αριθμών:

**α)** $\sqrt{2}$ και $\sqrt{3}$ **β)** $\sqrt{5}$ και $\sqrt{6}$

## Θ. Ρίζα ως υπόρριζη ποσότητα

**47.** Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

**α)** $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}}\cdot\sqrt[24]{2^{31}}$

**β)** $\sqrt[4]{2^5\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt[3]{2\sqrt[4]{\frac{1}{2}}}}$

**48.** Αν $\alpha\geq 0$, να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις με τη μορφή μίας ρίζας:

**α)** $\sqrt[4]{\alpha\sqrt[3]{\alpha^5}}$ **β)** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\alpha^5}\cdot\sqrt[4]{\alpha^7}}$

**γ)** $\sqrt[4]{\alpha\sqrt[3]{\alpha^2\sqrt{\alpha}}}$ **δ)** $\sqrt[5]{\sqrt[6]{\alpha^4}\cdot\sqrt[3]{\alpha^8}}$

**ε)** $\sqrt[7]{\alpha^4\sqrt[3]{\alpha^2\sqrt[4]{\alpha^7}}}$ **στ)** $\sqrt[3]{\alpha^2\sqrt[3]{\alpha^4\sqrt[4]{\alpha^3\sqrt[5]{\alpha}}}}$

**49.** Αν $\alpha,\beta>0$, να απλοποιήσετε τις επόμενες παραστάσεις:

**α)** $\sqrt[3]{\alpha^2\beta^3\sqrt{\alpha^5\beta^6}}$ **β)** $\sqrt{\alpha^3\beta\sqrt[3]{\alpha^2\beta^3\sqrt[3]{\alpha\beta^4}}}$

**γ)** $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}\sqrt[3]{\frac{\beta^2}{\alpha^2}\sqrt[4]{\frac{\beta^3}{\alpha^3}}}}$ **δ)** $\sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{\beta}\sqrt[4]{\frac{\beta^3}{\alpha^2}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta^3}}}}$

**50.** Δίνονται αριθμοί $\alpha,\beta>0$ για τους οποίους ισχύει ότι $\alpha^2\beta=27$. Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A=\sqrt{\alpha^3\sqrt[4]{\beta^2\sqrt[3]{\beta^2\alpha^4}}}\ :\ \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}\sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}}}$$

## Ι. Συνδυαστικά θέματα

**51.** Δίνεται η παράσταση:

$$A=\sqrt[4]{\frac{x\sqrt[3]{y}}{y^2\sqrt{x}}}:\left(\frac{\sqrt[12]{y}}{\sqrt[8]{x}}\right)^7$$

**α)** Να απλοποιήσετε την παράσταση Α.

**β)** Να αποδείξετε πως όταν $x=\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\sqrt[16]{2}$ και $y=\left(\sqrt[8]{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, τότε η τιμή της παράστασης Α είναι ακέραιος αριθμός.

**52. α)** Αν $x\geq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=x+1$$

**β)** Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{\frac{\sqrt{98}}{10-\sqrt{98}}+\frac{10}{10+\sqrt{98}}}{\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{34}-\sqrt{32}}+\frac{\sqrt{34}}{\sqrt{34}+\sqrt{32}}}$$

**53.** Δίνονται οι αριθμοί:

$$\alpha=\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{28-10\sqrt{3}}$$

και:

$$\beta=\left(\sqrt[3]{2\sqrt[5]{3\sqrt{2}}}:\sqrt[5]{3\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}\right)\sqrt[20]{4}\cdot\sqrt[15]{9}$$

**α)** Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

**β)** Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A=\sqrt[6]{\alpha}\cdot\beta^2$$

**γ)** Να λύσετε την εξίσωση $\beta x=\alpha$ και να γράψετε τη λύση της ως κλάσμα με ρητό παρονομαστή.

**54.** Δίνεται ο αριθμός:

$$x=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}$$

**α)** Να αποδείξετε ότι $x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

**β)** Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

**i)** $x+\frac{2}{x}$ **ii)** $x^2+\frac{4}{x^2}$ **iii)** $x^3+\frac{8}{x^3}$

**55. α)** Για οποιαδήποτε $x,y\geq 0$ να αποδείξετε ότι:

$$\left(\sqrt{\frac{x}{2}}-\sqrt{\frac{y}{2}}\right)^2\leq x+y$$

**β)** Δίνεται η παράσταση:

$$A=\left(\sqrt{\frac{\alpha+5}{2}}-\sqrt{\frac{\beta+3}{2}}\right)^2+$$

$$+\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}-\sqrt{\frac{7-\beta}{2}}\right)^2$$

**i)** Να βρείτε για ποιες τιμές των α και β ορίζεται η παράσταση Α.

**ii)** Για τις επιτρεπόμενες τιμές των α και β να αποδείξετε ότι $A\leq 16$.

# 6ο ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

**ΜΑΘΗΜΑ :** **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΑΛΓΕΒΡΑ**

**ΕΝΟΤΗΤΑ:** **Ασκήσεις επανάληψης 2ου κεφαλαίου**

**ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:**

**.1** Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A=\left(\frac{2^4x^3y^5}{8x^{-2}y^8}\right)^3 \quad \text{και} \quad B=\frac{(x^{-3}y^4)^2}{(4x^{-9}y)^{-1}}$$

όπου $x, y \neq 0$.

**α)** Να αποδείξετε ότι το γινόμενο $A \cdot B$ είναι ανεξάρτητο των x και y.

**β)** Να βρείτε την τιμή του πηλίκου $A : B$, αν είναι $x=-4$ και $y=-8$.

**.2** Δίνεται η παράσταση:

$$A=\frac{x^4+2x^3-9x^2-18x}{x^3-9x}$$

**α)** Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A.

**β)** Να απλοποιήσετε την παράσταση A.

**γ)** Να υπολογίσετε την παράσταση A, όταν:

**i)** $x=\sqrt[3]{\frac{4\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}}}\cdot\frac{\sqrt[9]{16}}{\sqrt[12]{3}}$

**ii)** $x=27^7\cdot 16^5\cdot 36^{-10}$

**.3** Δίνονται οι αριθμοί:

$$\alpha=\frac{\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt{27}}{\sqrt[12]{27}} \quad \text{και} \quad \beta=\sqrt{2^2\sqrt[3]{2^4\sqrt{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}}$$

**α)** Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

**β)** Δίνεται η παράσταση:

$$A=\frac{x^2-6x+\alpha}{x^3-\beta x}\cdot\frac{x^3-\beta^{\frac{1}{2}}x^2}{x^2-\alpha^{\frac{1}{2}}x}$$

**i)** Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A.

**ii)** Να απλοποιήσετε την παράσταση A.

**iii)** Αν είναι $8<x<13$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{3}<A<1$$

**.4** Δίνεται ο αριθμός:

$$x=2016^{\sqrt{8}+\sqrt{50}-\sqrt{98}}-(-1)^{2016}$$

Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει ότι $\alpha\beta<x$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\beta+4}{\alpha}\leq\frac{4-\alpha}{\beta}-\frac{8}{\alpha\beta}$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

**.5 α)** Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^2-\left[\frac{x(x-1)}{2}\right]^2=x^3$$

**β)** Να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

$$\alpha=\sqrt[3]{(1008\cdot 2017)^2-(1008\cdot 2015)^2}$$

είναι ακέραιος.

**.6 α)** Αν $\beta=\alpha-1$, να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^4+\beta^4)=\alpha^8-\beta^8$$

**β)** Να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

$$x=\sqrt{199(10^4+99^2)(10^8+99^4)+99^8}$$

είναι ακέραιος.

**.7 α)** Για οποιαδήποτε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=3\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$$

**β)** Αν για τους αριθμούς α και β ισχύουν:

$$\alpha+\beta=\sqrt{17} \quad \text{και} \quad \alpha-\beta=3$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$K=\alpha^3-\beta^3$$

**.8** Δίνεται ο αριθμός $\alpha=8^{\frac{1}{11}}\cdot 3^{\frac{7}{11}}\cdot 12^{\frac{4}{11}}$.

**α)** Να βρείτε τον αριθμό α.

**β)** Να βρείτε τον αριθμό:

$$\beta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{2}}$$

**γ)** Για τις τιμές των α και β που βρήκατε να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$8(x-\beta)^2\geq(2x-\alpha)^2-(\alpha-\beta)^{\frac{3}{2}}$$

**.9** Δίνεται η παράσταση:

$$A=\sqrt[5]{\sqrt[6]{6^2}\cdot\sqrt[6]{\sqrt[4]{6^9}}\cdot\sqrt[3]{6\sqrt[10]{\frac{1}{6^6}\sqrt[4]{6^3}}}}$$

**α)** Να απλοποιήσετε την παράσταση A.

**β)** Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{4}{A}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

**.10 α)** Να βρείτε τον αριθμό:

$$\alpha=-11\cdot\frac{9+\sqrt{75}}{15-7\sqrt{12}}\cdot\frac{13-\sqrt{147}}{4+\sqrt{27}}$$

**β)** Αν $x=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha+1}$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $y=10x^2-x^4$ είναι φυσικός.

**.11** Δίνονται πραγματικοί αριθμοί x και y για τους οποίους ισχύει $1\leq x\leq 2$ και $3\leq y\leq 5$, καθώς και η παράσταση:

$$A=|x-1|+|3x-6|+|y-3|-|2y-10|$$

**α)** Να γράψετε την παράσταση A χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

**β)** Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή της παράστασης A.

**.12** Δίνονται οι αριθμοί:

$$\alpha = \left(\sqrt{7+\sqrt{13}} - \sqrt{7-\sqrt{13}}\right)^2 \quad \text{και}$$

$$\beta = \sqrt[3]{3+\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{4+\sqrt{7}} \cdot \sqrt[3]{3-\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{4-\sqrt{7}}$$

**α)** Να βρείτε τους αριθμούς α και β.

**β)** Αν ισχύει $\alpha < x < \beta$, να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$A = \sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{x^2-6x+9}$$

είναι ανεξάρτητη του x.

**.13** Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y για τα οποία ισχύουν:

$$|x-3| \le 2 \quad \text{και} \quad |y-6| \le 4$$

**α)** Να αποδείξετε ότι:

$$1 \le x \le 5 \quad \text{και} \quad 2 \le y \le 10$$

**β)** Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις 2x και y.

***(Τ.Θ. - 2ο θέμα)***

**.14** Δίνονται ετερόσημοι αριθμοί $\alpha, \beta \neq 0$ για τους οποίους ισχύει $|2\alpha-\beta| = |\alpha+3\beta|$.

**α)** Να βρείτε τον λόγο $\frac{\alpha}{\beta}$.

**β)** Να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

$$x = \frac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{2\alpha^2+3\alpha\beta-\beta^2}$$

είναι ακέραιος.

**.15** Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x-4| < 1$.

**α)** Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{3} < \frac{x^2}{x+22} < 1$.

**β)** Θεωρούμε τον αριθμό:

$$\alpha = \big|\,|x-3|-2\big| + \big|\,|x-5|-2\big|$$

**i)** Να αποδείξετε ότι η τιμή του α είναι ανεξάρτητη του x.

**ii)** Αν ισχύει $|\beta-\gamma| = |\gamma-\delta| - \alpha$ και επιπλέον είναι $|\beta-\varepsilon| = \alpha^2 - |\varepsilon-\delta|$, να αποδείξετε ότι:

$$2 \le |\beta-\delta| \le 4$$

**.16** Για τους θετικούς αριθμούς x, y και z ισχύει:

$$xy+yz+zx = 1$$

**α)** Να αποδείξετε ότι $(x+z)(x+y) = 1+x^2$.

**β)** Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

**.17** Αν ισχύει ότι $\alpha+\beta+\gamma = 0$, τότε:

**α)** να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A = (3\alpha-\beta)^3 + (3\beta-\gamma)^3 + (3\gamma-\alpha)^3$$

**β)** να αποδείξετε ότι $\gamma^2-\alpha^2-\beta^2 = 2\alpha\beta$,

**γ)** να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$B = \frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta(\gamma-2)}{\gamma^2-\alpha^2-\beta^2}$$

είναι σταθερή,

**δ)** να συγκρίνετε τους αριθμούς $\gamma^2$ και $4\alpha\beta$.

**.18 α)** Αν $x, y \ge 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

**β)** Αν $\alpha, \beta, \gamma \ge 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\alpha\beta} + \sqrt{\beta\gamma} + \sqrt{\alpha\gamma} \le \alpha+\beta+\gamma$$

**γ)** Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{6} + \sqrt{12} + \sqrt{8} < 9$$

**.19 α)** Για κάθε $x \ge 0$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x+1}{2} \ge \sqrt{x}$$

**β)** Δίνεται η παράσταση:

$$A = \sqrt{\frac{\kappa+1}{2} + \sqrt{\kappa}} - \sqrt{\frac{\kappa+1}{2} - \sqrt{\kappa}}$$

**i)** Να βρείτε για ποιες τιμές του κ ορίζεται η παράσταση A.

**ii)** Αν $\kappa \ge 1$, να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης A είναι σταθερή.

**γ)** Να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

$$y = \frac{\sqrt{4030}}{\sqrt{1008+\sqrt{2015}} + \sqrt{1008-\sqrt{2015}}}$$

είναι ακέραιος.

**δ)** Αν $\alpha, \beta > 0$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$B = \frac{\sqrt{\alpha+1+\sqrt{2\alpha+1}} - \sqrt{\alpha+1-\sqrt{2\alpha+1}}}{\sqrt{\beta+2+\sqrt{2\beta+3}} - \sqrt{\beta+2-\sqrt{2\beta+3}}}$$

**.20 α)** Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} - \frac{(x+y)^2}{\alpha+\beta} = \frac{(x\beta-y\alpha)^2}{\alpha\beta(\alpha+\beta)}$$

**β)** Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x^4}{12} + \frac{x^8}{13} = \frac{(x^2+x^4)^2}{25}$.

**γ)** Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} \ge \frac{(x+y)^2}{\alpha+\beta}$$

**δ)** Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta, \gamma \in (0, +\infty)$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} \ge \frac{(x+y+z)^2}{\alpha+\beta+\gamma}$$

**ε)** Για κάθε $x, y, z \in (0, +\infty)$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \ge \frac{x+y+z}{2}$$

**στ)** Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in (0, +\infty)$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\alpha+\beta} + \frac{1}{\beta+\gamma} + \frac{1}{\gamma+\alpha} \ge \frac{9}{2(\alpha+\beta+\gamma)}$$